

ΠΟΛΙΤΙΚΟΙ ΜΗΧΑΝΙΚΟΙ

ΦΥΛΛΟ 1

Άσκηση 1. (Προαιρετική)

(i) Εξετάστε ποια από τα παρακάτω υποσύνολα του \mathbf{R}^2 είναι (a) ανοικτά (b) κλειστά.

$A_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x| \leq y\}$, $A_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 1, x > 0\}$,
 $A_3 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1, x > 0\}$, $A_4 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2, y = 0\}$.

(ii) Δείξτε ότι ένα υποσύνολο A του \mathbf{R}^n είναι κλειστό αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $\{x_n\}$ στοιχείων του A ισχύει: Αν η ακολουθία $\{x_n\}$ συγκλίνει στο $x \in \mathbf{R}^n$, τότε $x \in A$.

(Ένα υποσύνολο A του \mathbf{R}^n είναι ανοικτό αν για κάθε $x \in A$ υπάρχει σφαίρα $B(x, \rho)$ του \mathbf{R}^n με κέντρο x και ακτίνα ρ που περιέχεται στο A , ενώ το A είναι κλειστό αν το συμπληρωματικό του στον \mathbf{R}^n είναι ανοικτό. Η ακολουθία $\{x_n\}$ του \mathbf{R}^n συγκλίνει στο $x \in \mathbf{R}^n$ αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ που εξαρτάται από το ϵ , ώστε $x_n \in B(x, \epsilon)$ για κάθε $n \geq n_0$.)

Άσκηση 2. Διατυπώστε το Θεώρημα Πεπλεγμένων Συναρτήσεων για συναρτήσεις δύο μεταβλητών. Στη συνέχεια δείξτε ότι η εξίσωση $-x^2 + y^2 + e^{xy} = 0$, λύνεται τοπικά ως προς y στο σημείο $(1, 0)$ και υπολογίστε τη παράγωγο $y'(1)$ της λύσης $y(x)$ στο σημείο 1.

Άσκηση 3. Να λύσετε τα Π.Α.Τ:

(i) $\frac{x}{x+1}y' = \frac{y-1}{y+2}$, $y(-3) = -3$,

(ii) $y' \sin x - y \ln y = 0$, $y(\frac{\pi}{2}) = e$,

(iii) $xy' + y = \cos x$, $y(\pi) = 1$.

(iv) $x^3 + xy^2 + x^2yy' = 0$, $y(1) = 1$.

Άσκηση 4. Προσδιορίστε τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις $\varphi(x)$ ώστε

$$\int_a^x t\varphi(t)dt = x^2 + \varphi(x).$$

Άσκηση 5. Να λυθούν οι Δ.Ε σε κατάλληλο υποσύνολο Ω του \mathbf{R}^2 . Στη συνέχεια προσδιορίστε τα σημεία (x_0, y_0) του Ω στα οποία, σύμφωνα με τη θεωρία, δεν εξασφαλίζεται λύση $y(x)$ της Δ.Ε. με $y(x_0) = y_0$.

(i) $\frac{y}{x} + x^2 + (y^3 + \ln(x))y' = 0$,

$$(ii) -\frac{y^2}{2x} - xye^x + (y - xe^x)y' = 0. \text{ (Υπόδειξη: } \frac{Py-Qx}{Q} = f(x)\text{)}.$$

Άσκηση 6. Να λυθούν οι Δ.Ε:

$$(i) xy' = (x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} + y,$$

$$(ii) x + y + 1 + (2x + 2y - 1)y' = 0, \text{ (υπόδειξη: θέστε } z = x + y\text{)}$$

$$(iii) y' - xy = -x^3y^3,$$

$$(iv) y' - y^2 + 2e^xy = e^{2x} + e^x, \text{ αν γνωρίζουμε ότι } e^x \text{ είναι μια λύση της.}$$

$$(iv) e^x \sin y - 2y \sin x + (e^x \cos y + 2 \cos x)y' = 0,$$

$$(v) 3x^2y + 2xy + y^3 + (x^2 + y^2)y' = 0.$$