ΧΗΜΙΚΟΙ ΜΗΧΑΝΙΚΟΙ

ΦΥΛΛΟ 1

(1) Να λύσετε τα Π.Α.Τ:

(i) $y'sinx - ylny = 0, \;\; y(\frac{\pi}{2}) = e,$

(ii) $y' = 2xy + x, \;\; y(0) = 1,$

(iii) $x^3 + xy^2 + x^2yy' = 0, \;\; y(1) = 1.$

(2) Προσδιορίστε τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις $\varphi(x)$ ώστε

$$\int_a^x t\varphi(t)dt = x^2 + \varphi(x).$$

(3) Να λυθούν οι Δ.Ε :

(i) $xy' = (x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} + y,$

(ii) $x + y + 1 + (2x + 2y - 1)y' = 0,$ (υπόδειξη: θέστε $z = x + y$)

(iii) $y' - xy = -x^3y^3,$

(iv) $y' - y^2 + 2e^xy = e^{2x} + e^x$, αν γνωρίζουμε ότι e^x είναι μια λύση της.

(iv) $e^xsiny - 2ysinx + (e^xcosy + 2cosx)y' = 0,$

(v) $3x^2y + 2xy + y^3 + (x^2 + y^2)y' = 0.$

ΦΥΛΛΟ 2

1. Δείξτε ότι για κάθε (x_0, y_0) του πεδίου Ω του $\mathbb{R}^2$ οι παρακάτω Δ.Ε. έχουν μοναδική λύση $y(x) : y(x_0) = y_0$

   (i) $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$, όπου $P, Q \in C^{(1)}(\Omega)$ και $Q(x, y) \neq 0$, για κάθε $(x, y) \in \Omega$.

   (ii) $y' = g(x)y + h(x)y^P$, όπου $g, h \in C^{(1)}(I)$, I διάστημα του $\mathbb{R}$ και $\Omega = I \times \mathbb{R}$,

   (iii) $y' = f(\frac{\alpha x+\beta y+\gamma}{\delta x+\varepsilon y+\zeta})$,όπου $f \in C^{(1)}(\mathbb{R})$ και $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \delta x + \varepsilon y + \zeta > 0\}$.

2. Με χρήση Θ.*Picard* δείξτε ότι το Π.Α.Τ.

$$y' = 3xy + x^2 + y^2 \quad , y(0) = 1$$

   έχει μοναδική λύση. Προσδιορίστε ένα διάστημα $[-h, h]$ στο οποίο ορίζεται η λύση και τους τρείς πρώτους όρους της ακολουθίας των συναρτήσεων που σύμφωνα με το Θ.*Picard* συγκλίνει ομοιόμορφα στη λύση.

3. Δείξτε ότι η ακολουθία των συναρτήσεων

$$y_\nu(x) = x^\nu, \nu = 0, 1, 2, ...$$

συγκλίνει σημειακά στη σταθερή συνάρτηση $\mathbf{0}$ στο διάστημα $(0, 1)$ και ότι η ακολουθία δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στην συνάρτηση $\mathbf{0}$ στο διάστημα $(0, 1)$. Δώστε τους αντίστοιχους ορισμούς.

4. Εξετάστε αν το Π.Α.Τ.

$$y' = x^2|y|, \quad y(0) = 0,$$

έχει μοναδική λύση.

5. Με τη μέθοδο των ισοκλινών, να παρασταθεί γραφικά η οικογένεια των λύσεων της Δ.Ε. $y' = xy$.