

Θεωρία Γραφημάτων

10η Διάλεξη

A. Συμβώνης

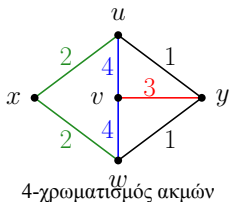
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
Τομέας Μαθηματικών

Φεβρουάριος 2022

Χρωματισμός ακμών

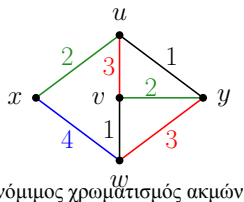
k -χρωματισμός ακμών:

Η ανάθεση χρωμάτων από το χρωματικό σύνολο $1, \dots, k$ στις ακμές ενός γραφήματος G .



Νόμιμος χρωματισμός ακμών:

Ένας χρωματισμός στον οποίο κάθε ζεύγος γειτονικών ακμών χρωματίζεται με διαφορετικά χρώματα.



k -χρωματισμός ακμών (εναλλακτικός ορισμός):

Μια διαμέριση $\{E_1, E_2, \dots, E_k\}$ των ακμών $E(G)$ ενός γραφήματος G .

Νόμιμος k -χρωματισμός ακμών:

Ένας k -χρωματισμός ακμών $\{E_1, E_2, \dots, E_k\}$ όπου κάθε υποσύνολο ακμών E_i , $1 \leq i \leq k$, είναι ένα ταίριασμα στο γράφημα G .

Ένα γράφημα G ονομάζεται *k -χρωματίσιμο ως προς τις ακμές*, ανν έχει έναν νόμιμο k -χρωματισμό ακμών.

Χρωματικός δείκτης $\chi'(G)$:

Έστω γράφημα G χωρίς βρόχους. Ο *χρωματικός δείκτης* $\chi'(G)$ είναι ο ελάχιστος ακέραιος k τέτοιος ώστε το G είναι νόμιμα k -χρωματίσιμο ως προς τις ακμές.

Σημείωση: Για κάθε γράφημα G χωρίς βρόχους ισχύει $\chi'(G) \geq \Delta(G)$.

Σημείωση: Έστω γράφημα G το οποίο είναι άρτιος κύκλος. Τότε, $\chi'(G) = 2$.

Έστω γράφημα G , έστω ένας k -χρωματισμός $\mathcal{C} = \{E_1, E_2, \dots, E_k\}$ του G και έστω μια κορυφή $u \in V(G)$. Λέμε ότι *το χρώμα i εκπροσωπείται στην κορυφή u* αν υπάρχει μια ακμή $e \in E_i$ η οποία προσπίπτει στην κορυφή u .

$c(u)$:

Έστω γράφημα G , χρωματισμός \mathcal{C} του G και κορυφή $u \in V(G)$. Με $c(u)$ συμβολίζουμε τον αριθμό χρωμάτων του \mathcal{C} που εκπροσωπούνται στην u .

- $c(u) \leq d(u)$

Λήμμα 10.1:

Έστω συνεκτικό γράφημα G χωρίς βρόχους το οποίο δεν είναι περιττός κύκλος. Τότε το G έχει έναν 2-χρωματισμό ακμών στον οποίο και τα 2 χρώματα εκπροσωπούνται σε κάθε κορυφή βαθμού ≥ 2 .

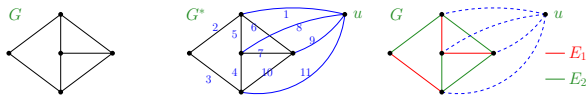
Απόδειξη :

Περίπτωση 1: Το γράφημα έχει περιήγηση Euler.

- Αν το G είναι ένας άρτιος κύκλος, ένας νόμιμος 2-χρωματισμός του G πληροί την ιδιότητα. ✓
- Διαφορετικά (το G δεν είναι περιττός κύκλος) το G έχει τουλάχιστον μια κορυφή άρτιου βαθμού ≥ 4 , έστω την u .
- Έστω $P = ue_1v_1e_2 \dots e_mv_mu$ μία περιήγηση Euler του G όπου $m = |E(G)|$.
- Κάθε κορυφή $v \in V(G)$ εμφανίζεται ως "εσωτερική" στην περιήγηση Euler P . Αυτό ισχύει γιατί για κάθε κορυφή έχουμε ότι $d(v) \geq 2$ $\forall v \in V(G)$ και $d(u) \geq 4$.
- Ο 2-χρωματισμός $\mathcal{C} = \{E_1, E_2\}$ όπου
$$E_1 = \{e_i | i \text{ περιττός} \} \quad \text{και}$$
$$E_2 = \{e_i | i \text{ άρτιος} \}$$
 έχει τη ζητούμενη ιδιότητα. ✓

Περίπτωση 2: Το γράφημα G δεν έχει περιήγηση Euler

- Κατασκευάζω με βάση το G γράφημα G^* :
 - Προσθέτω νέα κορυφή u .
 - Ενώνω την u με τις κορυφές περιττού βαθμού του G .



- Κάθε κορυφή του G^* έχει άρτιο βαθμό.
- Ορίζουμε τον χρωματισμό $\mathcal{C}_{G^*} = \{E_1, E_2\}$ του G^* όπως στην περίπτωση-1.
- Ορίζουμε τον χρωματισμό $\mathcal{C}_G = \{E_1 \cap E(G), E_2 \cap E(G)\}$.
- Ο \mathcal{C}_G έχει την ζητούμενη ιδιότητα. ✓

Λήμμα 10.2:

Έστω χρωματισμός ακμών C ενός γραφήματος G . Ο C είναι ένας νόμιμος χρωματισμός του G αν $c(u) = d(u)$ για κάθε κορυφή u του G . ■

Βελτιωμένος χρωματισμός ακμών:

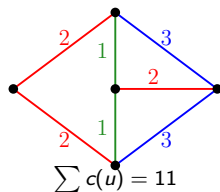
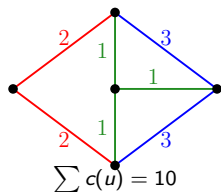
Έστω δύο k -χρωματισμοί ακμών, C και C' ενός γραφήματος G . Λέμε ότι ο C' είναι ένας **βελτιωμένος χρωματισμός ακμών** ως προς τον C εάν

$$\sum_{u \in V(G)} c'(u) > \sum_{u \in V(G)} c(u)$$

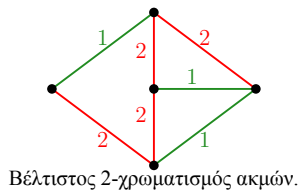
όπου $c'(u)$ είναι ο αριθμός των χρωμάτων που εκπροσωπούνται στην κορυφή u στην χρωματισμό C' .

Βέλτιστος k -χρωματισμός ακμών:

Ένας k -χρωματισμός ακμών που δεν μπορεί να ``βελτιωθεί''.



3-χρωματισμός ακμών.



Λήμμα 10.3:

Έστω $C = \{E_1, E_2, \dots, E_k\}$ ένας βέλτιστος k -χρωματισμός ακμών του G . Εάν υπάρχει μια κορυφή u του G και χρώματα i, j τέτοια ώστε το i να μην εκπροσωπείται στην u και το j να εκπροσωπείται τουλάχιστον 2 φορές στην u , τότε η συνιστώσα του $G[E_i \cup E_j]$ που περιέχει την u είναι περιττός κύκλος.

Απόδειξη [Με άτοπο] :

- Έστω u μια κορυφή και i, j χρώματα που ικανοποιούν την υπόθεση.
- Έστω ότι η συνιστώσα H του $G[E_i \cup E_j]$ που περιέχει την u δεν είναι περιττός κύκλος.
- Από το **Λήμμα ??**, η H έχει έναν 2-χρωματισμό ακμών C_1 όπου και τα 2 χρώματα εκπροσωπούνται σε κάθε κορυφή βαθμού ≥ 2 της H .
- Θεωρούμε ότι τα δύο χρώματα του C_1 είναι τα i και j .
- Τροποποιούμε το χρωματισμό C έτσι ώστε οι ακμές της H να χρωματιστούν σύμφωνα με τον C_1 .
- Έστω $C' = \{E_1, E_2, \dots, E'_i, \dots, E'_j, \dots, E_k\}$ ο νέος k -χρωματισμός ακμών του G όπου μόνο τα E'_i και E'_j έχουν αλλάξει σε σχέση με τον C .
- $c'(v)$: ο αριθμός χρωμάτων που εκπροσωπούνται στην κορυφή v , $\forall v \in V(G)$, στο C' .
 $c'(u) = c(u) + 1$ και
 $c'(v) \geq c(v) \quad \forall v \in V: u \neq v$.
- $\sum_{v \in V(G)} c'(v) > \sum_{v \in V(G)} c(v)$ **Άτοπο**, γιατί υποθέσαμε ότι C βέλτιστο. ■

Θεώρημα 10.4 [Koning]:

Έστω ένα διμερές γράφημα G . Τότε, $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Απόδειξη :

- Έστω G ένα διμερές γράφημα με $\chi'(G) > \Delta(G)$.
- Έστω $\mathcal{C} = \{E_1, E_2, \dots, E_{\Delta(G)}\}$ ένας βέλτιστος χρωματισμός ακμών του G .
- Έστω κορυφή u : $c(u) < d(u)$.
[H κορυφή u πάντα υπάρχει. Εάν για κάθε κορυφή u ισχυρε ότι $c(u) = d(u)$ τότε θα είχαμε έναν νόμιμο $\Delta(G)$ -χρωματισμό ακμών [Λήμμα ??].]
- Η u ικανοποιεί την υπόθεση του Λήμματος ??.
- Άρα, το G περιέχει έναν περιττό κύκλο.
- Το G δεν είναι διμερές. **Άτοπο.**

Θεώρημα 10.5 [Vizing-1964, Gupta-1966]:

Έστω απλό γράφημα G . Τότε, είτε $\chi'(G) = \Delta(G)$ ή $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

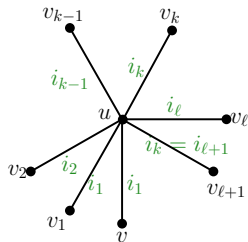
Απόδειξη [Fournier-1973] :

- Έστω γράφημα G . Αρκεί να δείξουμε ότι $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.
- Έστω ότι $\chi'(G) > \Delta(G) + 1$ [για να καταλήξουμε σε άτοπο].
- Έστω $\mathcal{C} = \{E_1, E_2, \dots, E_{\Delta(G)+1}\}$ ένας βέλτιστος $(\Delta(G) + 1)$ -χρωματισμός ακμών.
- Έστω κορυφή u : $c(u) < d(u)$. [Πάντα υπάρχει!! Γιατί?]

- Υπάρχουν χρώματα i_0 και i_1 : το i_0 δεν εκπροσωπείται στην u ενώ το i_1 εκπροσωπείται τουλάχιστον 2 φορές.
- Έστω ότι οι ακμές uv και uv_1 έχουν χρώμα i_1 .
- $d(v_1) < \Delta(G) + 1 \Rightarrow$ Υπάρχει χρώμα, έστω i_2 , που δεν εκπροσωπείται στην v_1 .
- Το χρώμα i_2 εκπροσωπείται στην u .
- Έστω ότι η ακμή uv_2 έχει χρώμα i_2 .

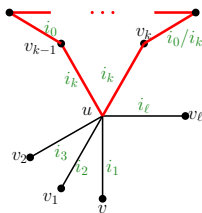
• Συνεχίζοντας με όμοιο τρόπο... κατασκευάζουμε ακολουθία κορυφών v_1, v_2, \dots και ακολουθία χρωμάτων i_1, i_2, \dots τέτοια ώστε:

- Η uv_j έχει χρώμα i_j .
- Το χρώμα i_{j+1} δεν εκπροσωπείται στην v_j .
- Λόγω του ότι ο βαθμός της u είναι πεπερασμένος, υπάρχει μικρότερος ακέραιος ℓ : για κάποιο $k < \ell$ ισχύει $i_{\ell+1} = i_k$.



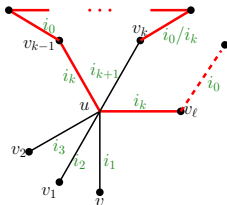
- Επαναχρωματίζουμε το G :

- Η ακμή uv_j χρωματίζεται με i_{j+1} , $1 \leq j \leq k-1$.
- Έστω $\mathcal{C}' = \{E'_1, E'_2, \dots, E'_{\Delta(G)+1}\}$ ο νέος χρωματισμός.
- $c'(v) \geq c(v) \forall v \in V(G)$
- Το \mathcal{C}' είναι επίσης βέλτιστος $(\Delta(G) + 1)$ -χρωματισμός ακμών του G .



- Η συνιστώσα H' του $G [E'_{i_0} \cup E'_{i_k}]$ που περιέχει την u είναι περιττός κύκλος [Λήμμα ??]. • Συνεχίζοντας, επαναχρωματίζουμε το G .

- Η ακμή uv_j με χρώμα i_{j+1} , $\leq j \leq \ell$
 \Rightarrow Η ακμή uv_ℓ παίρνει χρώμα i_k γιατί $i_k = i_{\ell+1}$.
- Έστω $\mathcal{C}'' = \{E''_1, E''_2, \dots, E''_{\Delta(G)+1}\}$ ο νέος χρωματισμός.
- $c''(v) \geq c(v) \forall v \in V(G)$
- Το \mathcal{C}'' είναι επίσης βέλτιστος $(\Delta(G) + 1)$ -χρωματισμός ακμών του G .



- Η συνιστώσα H'' του $G [E''_i, E''_k]$ που περιέχει την u είναι περιττός κύκλος και, επιπλέον, περιέχει την v_k .
- Λόγω του ότι η v_k έχει βαθμό 2 στην H' , η v_k έχει βαθμό 1 στην H'' .
- Άρα, η H'' δεν είναι περιττός κύκλος. **Άτοπο.** ■

Πολλαπλότητα γραφήματος $\mu(G)$:

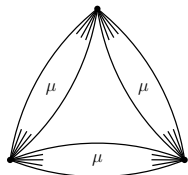
Ο μέγιστος αριθμός ακμών που ενώνει 2 κορυφές του G . Συμβολίζεται με $\mu(G)$.

- Ο Vizing απέδειξε το παρακάτω, πιο γενικό θεώρημα:

Θεώρημα 10.6 [Vizing-1964]:

Έστω γράφημα G χωρίς βρόχους. Τότε, $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + \mu(G)$.

Παράδειγμα:



$$\begin{aligned}\Delta(G) &= 2\mu \\ \mu(G) &= \mu \\ \chi'(G) &= 3\mu = \Delta(G) + \mu(G)\end{aligned}$$