Θεωρία Γραφημάτων
10η Διάλεξη

Α. Συμβώνης

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
Τομέας Μαθηματικών

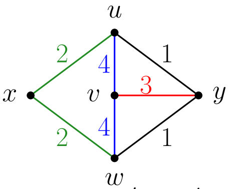
Φεβρουάριος 2017

k-χρωματισμός ακμών:

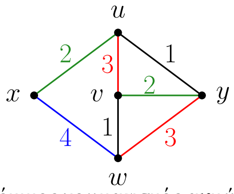
Η ανάθεση χρωμάτων από το χρωματικό σύνολο $1, \dots, k$ στις ακμές ενός γραφήματος G.

Νόμιμος χρωματισμός ακμών:

Ένας χρωματισμός στον οποίο κάθε ζεύγος γειτονικών ακμών χρωματίζεται με διαφορετικά χρώματα.



4-χρωματισμός ακμών



νόμιμος χρωματισμός ακμών

k-χρωματισμός ακμών (εναλλακτικός ορισμός):

Μια διαμέριση $\{E_1, E_2, \dots, E_k\}$ των ακμών $E(G)$ ενός γραφήματος G.

Νόμιμος k-χρωματισμός ακμών:

Ένας k-χρωματισμός ακμών $\{E_1, E_2, \dots, E_k\}$ όπου κάθε υποσύνολο ακμών E_i, $1 \le i \le k$, είναι ένα ταίριασμα στο γράφημα G.

Ένα γράφημα G ονομάζεται ***k-χρωματίσιμο ως προς τις ακμές***, ανν έχει έναν νόμιμο k-χρωματισμό ακμών.

Χρωματικός δείκτης $\chi'(G)$:

Έστω γράφημα G χωρίς βρόγχους. Ο ***χρωματικός δείκτης $\chi'(G)$*** είναι ο ελάχιστος ακέραιος k τέτοιος ώστε το G είναι νόμιμα k-χρωματίσιμο ως προς τις ακμές.

Σημείωση: Για κάθε γράφημα G χωρίς βρόγχους ισχύει $\chi'(G) \geq \Delta(G)$.

Σημείωση: Έστω γράφημα G το οποίο είναι άρτιος κύκλος. Τότε, $\chi'(G) = 2$.

Έστω γράφημα G, έστω ένας k-χρωματισμός $\mathcal{C} = \{E_1, E_2, \ldots, E_k\}$ του G και έστω μια κορυφή $u \in V(G)$. Λέμε ότι ***το χρώμα i εκπροσωπείται στην κορυφή u*** αν υπάρχει μια ακμή $e \in E_i$ η οποία προσπίπτει στην κορυφή u.

$c(u)$:

Έστω γράφημα G, χρωματισμός $\mathcal{C}$ του G και κορυφή $u \in V(G)$. Με $c(u)$ συμβολίζουμε τον αριθμό χρωμάτων του $\mathcal{C}$ που εκπροσωπούνται στην u.

- $c(u) \leq d(u)$

Λήμμα 10.1:

Έστω συνεκτικό γράφημα G χωρίς βρόγχους το οποίο δεν είναι περιττός κύκλος. Τότε το G έχει έναν 2-χρωματισμό ακμών στον οποίο και τα 2 χρώματα εκπροσωπούνται σε κάθε κορυφή βαθμού ≥ 2.

Απόδειξη :

Περίπτωση 1: Το γράφημα έχει περιήγηση Euler.

- Αν το G είναι ένας άρτιος κύκλος, ένας νόμιμος 2-χρωματισμός του G πληροί την ιδιότητα. ✓
- Διαφορετικά (το G δεν είναι περιττός κύκλος) το G έχει τουλάχιστον μια κορυφή άρτιου βαθμού ≥ 4, έστω την u.
- Έστω $P = ue_1v_1e_2 \ldots e_m u$ μία περιήγηση Euler του G όπου $m = |E(G)|$.
- Κάθε κορυφή $v \in V(G)$ εμφανίζεται ως "εσωτερική" στην περιήγηση Euler P. Αυτό ισχύει γιατί για κάθε κορυφή έχουμε ότι $d(v) \geq 2 \; \forall v \in V(G)$ και $d(u) \geq 4$.
- Ο 2-χρωματισμός $\mathcal{C} = \{E_1, E_2\}$ όπου

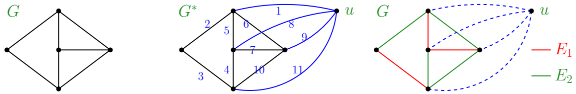
  $E_1 = \{e_i | i \text{ περιττός}\}$ και

  $E_2 = \{e_i | i \text{ άρτιος}\}$

  έχει τη ζητούμενη ιδιότητα. ✓

Περίπτωση 2: Το γράφημα G δεν έχει περιήγηση Euler

- Κατασκευάζω με βάση το G γράφημα G^*:
  - Προσθέτω νέα κορυφή u.
  - Ενώνω την u με τις κορυφές περιττού βαθμού του G.



- Κάθε κορυφή του G^* έχει άρτιο βαθμό.
- Ορίζουμε τον χρωματισμό $\mathcal{C}_{G^*} = \{E_1, E_2\}$ του G^* όπως στην περίπτωση-1.
- Ορίζουμε τον χρωματισμό $\mathcal{C}_G = \{E_1 \cap E(G), E_2 \cap E(G)\}$.
- Ο C_G έχει την ζητούμενη ιδιότητα. ✓

Λήμμα 10.2:

Έστω χρωματισμός ακμών $\mathcal{C}$ ενός γραφήματος G. Ο $\mathcal{C}$ είναι ένας νόμιμος χρωματισμός του G ανν $c(u) = d(u)$ για κάθε κορυφή u του G.

Βελτιωμένος χρωματισμός ακμών:

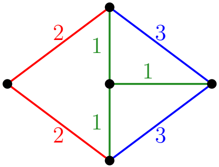
Έστω δύο k-χρωματισμοί ακμών, $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ ενός γραφήματος G. Λέμε ότι ο $\mathcal{C}'$ είναι ένας ***βελτιωμένος χρωματισμός ακμών*** ως προς τον $\mathcal{C}$ εάν

$$\sum_{u \in V(G)} c'(u) > \sum_{u \in V(G)} c(u)$$

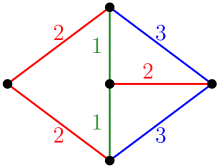
όπου $c'(u)$ είναι ο αριθμός των χρωμάτων που εκπροσωπούνται στην κορυφή u στην χρωματισμό $\mathcal{C}'$.

Βέλτιστος k-χρωματισμός ακμών:

Ένας k-χρωματισμός ακμών που δεν μπορεί να “βελτιωθεί”.

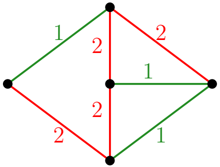


$\sum c(u) = 10$



$\sum c(u) = 11$

3-χρωματισμός ακμών.



Βέλτιστος 2-χρωματισμός ακμών.

Λήμμα 10.3:

Έστω $\mathcal{C} = \{E_1, E_2 \ldots, E_k\}$ ένας βέλτιστος k-χρωματισμός ακμών του G. Εάν υπάρχει μια κορυφή u του G και χρώματα i, j τέτοια ώστε το i να μην εκπροσωπείται στην u και το j να εκπροσωπείται τουλάχιστον 2 φορές στην u, τότε η συνιστώσα του $G\left[E_i \cup E_j\right]$ που περιέχει την u είναι περιττός κύκλος.

***Απόδειξη** [Με άτοπο]:*

- Έστω u μια κορυφή και i, j χρώματα που ικανοποιούν την υπόθεση.
- Έστω ότι η συνιστώσα H του $G\left[E_i \cup E_j\right]$ που περιέχει την u δεν είναι περιττός κύκλος.
- Από το Λήμμα 10.1, η H έχει έναν 2-χρωματισμό ακμών $\mathcal{C}_1$ όπου και τα 2 χρώματα εκπροσωπούνται σε κάθε κορυφή βαθμού ≥ 2 της H.
- Θεωρούμε ότι τα δύο χρώματα του $\mathcal{C}_1$ είναι τα i και j.
- Τροποποιούμε το χρωματισμό $\mathcal{C}$ έτσι ώστε οι ακμές της H να χρωματιστούν σύμφωνα με τον $\mathcal{C}_1$.
- Έστω $\mathcal{C}' = \left\{E_1, E_2, \ldots, E'_i, \ldots E'_j, \ldots, E_k\right\}$ ο νέος k-χρωματισμός ακμών του G όπου μόνο τα E'_i και E'_j έχουν αλλάξει σε σχέση με τον $\mathcal{C}$.
- $c'(v)$: ο αριθμός χρωμάτων που εκπροσωπούνται στην κορυφή v, $\forall v \in V(G)$, στο $\mathcal{C}'$.

  $c'(u) = c(u) + 1$ και

  $c'(v) \geq c(v) \quad \forall v \in V : u \neq v.$
- $\sum_{v \in V(G)} c'(v) > \sum_{v \in V(G)} c(v)$ ***Άτοπο,*** γιατί υποθέσαμε ότι $\mathcal{C}$ βέλτιστο. ■

Θεώρημα 10.4 *[Koning]*:

Έστω ένα διμερές γράφημα G. Τότε, $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Απόδειξη :

- Έστω G ένα διμερές γράφημα με $\chi'(G) > \Delta(G)$.
- Έστω $\mathcal{C} = \left\{ E_1, E_2, \ldots, E_{\Delta(G)} \right\}$ ένας βέλτιστος χρωματισμός ακμών του G.
- Έστω κορυφή u: $c(u) < d(u)$.

[Η κορυφή u πάντα υπάρχει. Εάν για κάθε κορυφή u ίσχυε ότι $c(u) = d(u)$ τότε θα είχαμε έναν νόμιμο $\Delta(G)$-χρωματισμό ακμών [Λήμμα 10.2].]

- Η u ικανοποιεί την υπόθεση του Λήμματος 10.3.
- Άρα, το G περιέχει έναν περιττό κύκλο.
- Το G δεν είναι διμερές. ***Άτοπο.*** ■

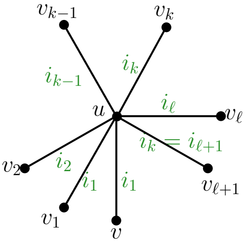
Θεώρημα 10.5 *[Vizing-1964,Gupta-1966]*:

Έστω απλό γράφημα G. Τότε, είτε $\chi'(G) = \Delta(G)$ ή $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

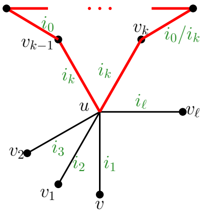
***Απόδειξη** [Fournier-1973]:*

- Έστω γράφημα G. Αρκεί να δείξουμε ότι $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.
- Έστω ότι $\chi'(G) > \Delta(G) + 1$ [για να καταλήξουμε σε άτοπο].
  Έστω $\mathcal{C} = \left\{ E_1, E_2, \ldots, E_{\Delta(G)+1} \right\}$ ένας βέλτιστος $(\Delta(G) + 1)$-χρωματισμός ακμών.
- Έστω κορυφή u: $c(u) < d(u)$. [Πάντα υπάρχει!! Γιατί?]

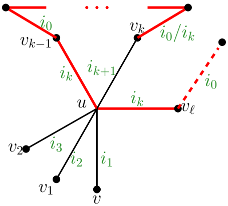
- Υπάρχουν χρώματα i_0 και i_1: το i_0 δεν εκπροσωπείται στην u ενώ το i_1 εκπροσωπείται τουλάχιστον 2 φορές.
- Έστω ότι οι ακμές uv και uv_1 έχουν χρώμα i_1.
- $d(v_1) < \Delta(G) + 1 \Rightarrow$ Υπάρχει χρώμα, έστω i_2, που δεν εκπροσωπείται στην v_1.
- Το χρώμα i_2 εκπροσωπείται στην u.
- Έστω ότι η ακμή uv_2 έχει χρώμα i_2.
- Συνεχίζοντας με όμοιο τρόπο…κατασκευάζουμε ακολουθία κορυφών $v_1, v_2, \ldots$ και ακολουθία χρωμάτων $i_1, i_2, \ldots$ τέτοια ώστε:
  - Η uv_j έχει χρώμα i_j.
  - Το χρώμα i_{j+1} δεν εκπροσωπείται στην v_j.
- Λόγω του ότι ο βαθμός της u είναι πεπερασμένος, υπάρχει μικρότερος ακέραιος ℓ: για κάποιο $k < \ell$ ισχύει $i_{\ell+1} = i_k$.



- Επαναχρωματίζουμε το G:
  - Η ακμή uv_j χρωματίζεται με i_{j+1}, $1 \leq i \leq k-1$.
  - Έστω $\mathcal{C}' = \left\{E'_1, E'_2, \ldots, E'_{\Delta(G)+1}\right\}$ ο νέος χρωματισμός.
  - $c'(v) \geq c(v)\ \forall v \in V(G)$
  - Το $\mathcal{C}'$ είναι επίσης βέλτιστος $(\Delta(G)+1)$-χρωματισμός ακμών του G.



- Η συνιστώσα H' του $G\left[E'_{i_0} \cup E'_{i_k}\right]$ που περιέχει την u είναι περιττός κύκλος [Λήμμα 10.3].
- Συνεχίζοντας, επαναχρωματίζουμε το G:
  - Η ακμή uv_j με χρώμα i_{j+1}, $\leq j \leq \ell$
    $\Rightarrow$ Η ακμή uv_ℓ παίρνει χρώμα i_k γιατί $i_k = i_{\ell+1}$.
  - Έστω $\mathcal{C}'' = \left\{E''_1, E''_2, \ldots, E''_{\Delta(G)+1}\right\}$ ο νέος χρωματισμός.
  - $c''(v) \geq c(v)\ \forall v \in V(G)$
  - Το $\mathcal{C}''$ είναι επίσης βέλτιστος $(\Delta(G)+1)$-χρωματισμός ακμών του G.



- Η συνιστώσα H'' του $G\left[E''_{i_0}, E''_{i_k}\right]$ που περιέχει την u είναι περιττός κύκλος και, επιπλέον, περιέχει την v_k.
- Λόγω του ότι η v_k έχει βαθμό 2 στην H', η v_k έχει βαθμό 1 στην H''.
- Άρα, η H'' δεν είναι περιττός κύκλος. *Άτοπο.* ■

Πολλαπλότητα γραφήματος $\mu(G)$:

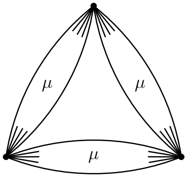
Ο μέγιστος αριθμός ακμών που ενώνει 2 κορυφές του G. Συμβολίζεται με $\mu(G)$.

- Ο Vizing απέδειξε το παρακάτω, πιο γενικό θεώρημα:

Θεώρημα 10.6 *[Vizing-1964]*:

Έστω γράφημα G χωρίς βρόγχους. Τότε, $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + \mu(G)$.

Παράδειγμα:



$$\Delta(G) = 2\mu$$
$$\mu(G) = \mu$$
$$\chi'(G) = 3\mu = \Delta(G) + \mu(G)$$