Θεωρία Γραφημάτων
9η Διάλεξη

Α. Συμβώνης

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
Τομέας Μαθηματικών

Φεβρουάριος 2017

Ταιριάσματα (Matchings)

Ταίριασμα:

Ένα υποσύνολο M των ακμών ενός γραφήματος G ονομάζεται ***ταίριασμα*** στο G εάν οι ακμές του M δεν έχουν κοινές κορυφές.

Οι δύο κορυφές στα άκρα κάθε ακμής του M λέμε ότι έχουν ταιριαστεί στο M.

Κορεσμένη κορυφή (saturated):

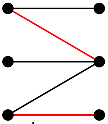
Έστω ένα ταίριασμα M σε ένα γράφημα G. Μία κορυφή u ονομάζεται ***M-κορεσμένη*** εάν μια ακμή του M προσπίπτει στην u. Διαφορετικά ονομάζεται ***M-ακόρεστη***.

Μέγιστο ταίριασμα:

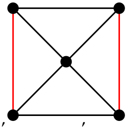
Ένα ταίριασμα M του γραφήματος G ονομάζεται ***μέγιστο ταίριασμα*** εάν δεν υπάρχει ταίριασμα M' του G τέτοιο ώστε $|M'| > |M|$.

Τέλειο ταίριασμα:

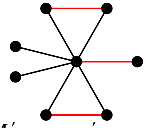
Εάν όλες οι κορυφές ενός γραφήματος G είναι M-κορεσμένες, τότε το M ονομάζεται ***τέλειο ταίριασμα***.



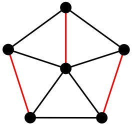
Ταίριασμα



Μέγιστο ταίριασμα



Μέγιστο ταίριασμα



Τέλειο ταίριασμα

$\mu(G)$:

Το πλήθος ακμών κάποιου μέγιστου ταιριάσματος M του γραφήματος G συμβολίζεται με $\mu(G)$.

Λήμμα 9.1:

Έστω γράφημα G. Ισχύει ότι $\chi(\overline{G}) \leq V(G) - \mu(G)$.

Απόδειξη :

- Έστω M ένα μέγιστο ταίριασμα του G (με $\mu(G)$ ακμές). Χρωματίζουμε το $\overline{G}$ ως εξής:
- Τα άκρα κάθε ακμής του M χρωματίζονται με το ίδιο χρώμα. Στο $\overline{G}$ δεν ενώνονται με ακμή.
  $\Rightarrow \mu(G)$ χρώματα.
- Οι υπόλοιπες $V(G) - 2\mu(G)$ χρωματίζονται με διαφορετικά χρώματα.
  $\Rightarrow V(G) - 2\mu(G)$
- Συνολικά: $V(G) - 2\mu(G) + \mu(G)$
  $= V(G) - \mu(G)$ χρώματα.
- $\chi(\overline{G}) \leq V(G) - \mu(G)$ ■

Λήμμα 9.2:

Έστω γράφημα G όπου $|V(G)| = n$ και $|E(G)| = m$. Ισχύει ότι $\mu(G) \leq \frac{2mn}{n+2m}$.

Απόδειξη :

- Γνωρίζουμε ότι για κάθε γράφημα G ισχύει $\chi(G) \geq \frac{n^2}{n^2-2m}$ [Λήμμα 8.4].
- Για το $\overline{G}$, συνεπώς, ισχύει:

$$\boxed{\chi(\overline{G}) \geq \frac{n^2}{n^2 - 2(\frac{n(n-1)}{2} - m)} \qquad (1)}$$

- Από Λήμμα 9.1 ισχύει: $\chi(\overline{G}) \leq n - \mu(G)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mu(G) &\leq n - \chi(\overline{G}) \\ &\overset{(1)}{\leq} n - \frac{n^2}{n^2-2(\frac{n(n-1)}{2}-m)} \\ &= n - \frac{n^2}{n^2-n(n-1)+2m} = n - \frac{n^2}{n^2-n^2+n+2m} \\ &= n - \frac{n^2}{n+2m} = \frac{n(n+2m)-n^2}{n+2m} \\ &= \frac{2mn}{n+2m} \end{aligned}$$

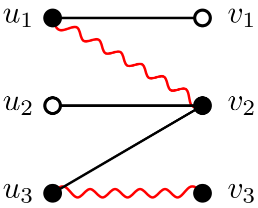
■

M-εναλλασσόμενο μονοπάτι (alternating path):

Έστω M ένα ταίριασμα στο γράφημα G. Ένα μονοπάτι P στο G ονομάζεται ***M-εναλλασσόμενο μονοπάτι*** εάν οι ακμές του εναλλάσσονται μεταξύ των ακμών του $E(G) - M$ και του M.

M-επαυξανόμενο μονοπάτι (augmenting path):

Ένα M-εναλλασσόμενο μονοπάτι του οποίου τα τερματικά σημεία είναι ακόρεστα.



$v_1u_1v_2u_3v_3$: Εναλλασσόμενο μονοπάτι.

$u_2v_2u_1v_1$: Επαυξανόμενο μονοπάτι.

Θεώρημα 9.3 *[Berge,1957]*:

Έστω γράφημα G και ταίριασμα M του G. Το M είναι ένα μέγιστο ταίριασμα στο G ανν το G δεν περιέχει κανένα M-επαυξανόμενο μονοπάτι.

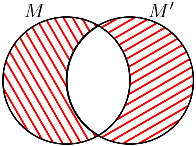
Απόδειξη :

"$\Longrightarrow$" [Με άτοπο.]

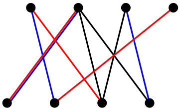
- Έστω το M είναι μέγιστο ταίριασμα και το G περιέχει ένα M-επαυξανόμενο μονοπάτι P με $2\lambda + 1$ ακμές, $\lambda \geq 1$.
- $P : v_0 v_1 v_2 \ldots v_{2\lambda} v_{2\lambda+1}$ και $(v_1, v_2), (v_3, v_4), \ldots, (v_{2\lambda-1}, v_{2\lambda}) \in M$.
- Έστω το ταίριασμα $M' = M - \{(v_i, v_{i+1}), i \text{ περιττό και } 1 \leq i \leq 2\lambda - 1\}$
  $\cup \{(v_i, v_{i+1}), i \text{ άρτιο και } 0 \leq i \leq 2\lambda\}$.
- $|M'| = |M| + 1$. ***Άτοπο,*** γιατί το M είναι μέγιστο. ✓

"$\Longleftarrow$" [Με άτοπο.]

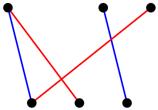
- Έστω ότι το G δεν περιέχει M-επαυξανόμενο μονοπάτι.
- Έστω ότι το M δεν είναι μέγιστο και έστω M' ένα μέγιστο ταίριασμα.
  $\Rightarrow |M'| > |M|$.
- Έστω $H = G[M \triangle M']$ όπου $M \triangle M'$ η συμμετρική διαφορά των M και M'.



$M \triangle M'$



M, M'



$M \triangle M'$

- Κάθε κορυφή του H έχει βαθμό 1 ή 2.
  [Είναι το άκρο το πολύ μιας ακμής του M και το πολύ μιας ακμής του M'.]
- Κάθε συνιστώσα του H είναι:
  - Είτε άρτιος κύκλος με ακμές να εναλλάσσονται μεταξύ των M και M', ή
  - μονοπάτι με ακμές να εναλλάσσονται μεταξύ των M και M'.
- Λόγω του ότι $|M'| > |M|$, το M' περιέχει πιο πολλές ακμές από το M.
  $\Rightarrow$ Υπάρχει ένα μονοπάτι-συνιστώσα P στο $M \triangle M'$ που περιέχει πιο πολλές ακμές του M'.
  $\Rightarrow$ Το μονοπάτι P ξεκινάει και τελειώνει με ακμή του M'.
- Στο H το μονοπάτι P έχει άκρα τα οποία είναι M'-κορεσμένα.
  $\Rightarrow$ Στο G τα άκρα του μονοπατιού P είναι M-ακόρεστα.
- Υπάρχει M-επαυξανόμενο μονοπατι στο G. ***Άτοπο,*** γιατί υποθέσαμε ότι το G δεν περιέχει M-επαυξανόμενο μονοπάτι. ✓ ■

Ταιριάσματα σε διμερή γραφήματα

Θεώρημα 9.4 *[Hall, 1935]*:

Έστω $G = (A, B, E)$ ένα διμερές γράφημα. Το G περιέχει ένα ταίριασμα M τέτοιο ώστε κάθε κορυφή του A να είναι M-κορεσμένη ανν $|N(S)| \geq |S|$ για κάθε $S \subseteq A$. (1)

Απόδειξη :

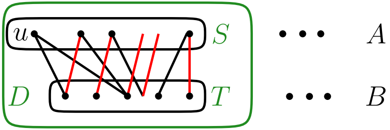
"$\Rightarrow$" [Με άτοπο.]

- Έστω ότι το G περιέχει ένα ταίριασμα M τέτοιο ώστε κάθε κορυφή του A είναι M-κορεσμένη.
- Οι κορυφές του συνόλου S, $S \subseteq A$, ταιριάζονται στο M σε κορυφές του $N(S)$.
- Συνεπώς, $|N(S)| \geq |S|, \forall S \subseteq A$. ✓

"$\Leftarrow$"

- Έστω ότι το G ικανοποιεί την (1) αλλά δεν υπάρχει ταίριασμα M με όλες τις κορυφές του A να είναι M-κορεσμένες.
- Έστω M' ένα μέγιστο ταίριασμα του G.
- Οι κορυφές του A δεν είναι όλες M'-κορεσμένες.
- Έστω u μια M'-ακόρεστη κορυφή του A.
- Έστω D οι κορυφές του G που ενώνονται με την u μέσω M'-εναλλασσόμενων μονοπατιών.

- Η u είναι η μόνη M'-ακόρεστη κορυφή του D.
  [Από Θ. 9.3 και επειδή το M' είναι μέγιστο ταίριασμα.]
- Ορίζουμε το $S = D \cap A$
  και το $T = D \cap B$



- Οι κορυφές του $S - \{u\}$ ταιριάζονται με τις κορυφές του T. Άρα,

$$|T| = |S| - 1 \qquad (2)$$

- Λόγω του ότι κάθε κορυφή του $N(S)$ ενώνεται με την u μέσω ενός M'-εναλλασσόμενου μονοπατιού ισχύει ότι:

$$N(S) = T \qquad (3)$$

- (2),(3)$\Rightarrow$ $|N(S)| = |S| - 1 < |S|$
  Άτοπο, γιατί υποθέσαμε ότι $|N(S)| \geq |S|, \forall S \subseteq A$. ✓ ■

Λήμμα 9.5:

Έστω διμερές r-κανονικό γράφημα $G = (A, B, E)$. Τότε ισχύει ότι $|A| = |B|$.

Απόδειξη :

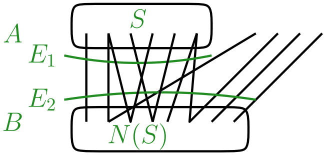
- $|E| = r|A|$ και $|E| = r|B|$.
- Άρα, $r|A| = r|B| \Rightarrow |A| = |B|$. ■

Θεώρημα 9.6 ***(Marriage theorem)*:**

Έστω $G = (A, B, E)$ ένα r-κανονικό διμερές γράφημα, $r \geq 1$. Ισχύει ότι το G έχει ένα τέλειο ταίριασμα.

Απόδειξη :

- Ισχύει ότι $|A| = |B|$ [από Λήμμα 9.5].
- Έστω $S \subseteq A$.
- Ορίζουμε ως E_1 :ακμές που προσπίπτουν στο S.
  E_2 :ακμές που προσπίπτουν στο $N(S)$.
- Εξ ορισμού του $N(\cdot) \Rightarrow$
  $E_1 \subseteq E_2 \Rightarrow$
  $r|N(S)| = |E_2| \geq |E_1| = r|S| \Rightarrow$
  $\Rightarrow |N(S)| \geq |S|$



- Άρα, από το Θεώρημα του Hall $\Rightarrow$ Το G έχει ένα τέλειο ταίριασμα. ■

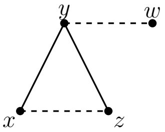
Τέλεια ταιριάσματα

Λήμμα 9.7:

Έστω ένα μεγιστοτικό γράφημα G με άρτιο βαθμό n το οποίο δεν έχει τέλειο ταίριασμα και έστω U το σύνολο κορυφών του με βαθμό $n-1$. Τότε ισχύει ότι το $G-U$ είναι η ένωση ξένων μεταξύ τους πλήρων γραφημάτων.

***Απόδειξη** [Με άτοπο]:*

- Έστω ότι υπάρχει μια συνιστώσα του $G-U$ η οποία δεν είναι πλήρης.
- Στην συνιστώσα υπάρχουν κορυφές x, y, z: $(x,y) \in E(G)$, $(y,z) \in E(G)$, $(x,z) \notin E(G)$.
- Το ότι $y \notin U$ σημαίνει ότι $d(y) \leq n-2$ και άρα υπάρχει κορυφή $w \in G-U : (y,w) \notin E(G)$.

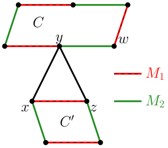


- Το $G+e$ έχει τέλειο ταίριασμα για κάθε $e \notin E(G)$ [γιατί το G είναι μεγιστοτικό].
- Έστω M_1 ένα τέλειο ταίριασμα στο $G+(x,z)$.
- Έστω M_2 ένα τέλειο ταίριασμα στο $G+(y,w)$.
- Έστω H το υπογράφημα του $G \cup \{(x,z),(y,w)\}$ που παράγεται από τις ακμές του $M_1 \triangle M_2$.

- Κάθε κορυφή του H έχει βαθμό 2 [προσπίπτουν σε κάθε κορυφή μια ακμή του M_1 και μια του M_2].
- Το H είναι ένωση ξένων μεταξύ τους κύκλων άρτιου πλήθους κορυφών, με ακμές εναλλασσόμενες μεταξύ των M_1 και M_2.

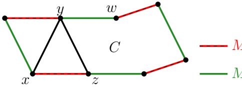
Περίπτωση 1: Οι (x, z) και (y, w) ανήκουν σε διαφορετικές συνιστώσες του H.

- Έστω οι (y, w) και (x, z) ανήκουν στους κύκλους C και C' του H.
- Οι ακμές του M_1 που ανήκουν στο C μαζί με τις ακμές του M_2 που ανήκουν στο C' και όλες τις άλλες ακμές του M_2 στο $H - \{C, C'\}$ είναι ένα τέλειο ταίριασμα του G. ***Άτοπο.*** ✓



Περίπτωση 2: Οι (x, z) και (y, w) ανήκουν στην ίδια συνιστώσα (κύκλο) του H.

- Έστω ότι στον C οι κορυφές εμφανίζονται με την σειρά: $x, \ldots, y, w, \ldots, z$.



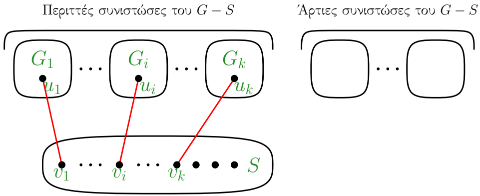
- Οι ακμές του M_1 στο τμήμα $y, w, \ldots, z$ του C μαζί με την ακμή (y, z) και τις ακμές του M_2 στο τμήμα $z, x, \ldots, y$ του C και όλες τις άλλες ακμές του M_2 στο $H - C$ σχηματίζουν ένα τέλειο ταίριασμα στο G. ***Άτοπο.***
- Άρα, το $G - U$ αποτελείται από την ένωση ξένων μεταξύ τους πλήρων γραφημάτων. ✓ ■

Θεώρημα 9.8 ***[Tutte,1947]*:**

Έστω γράφημα G. Το G έχει ένα τέλειο ταίριασμα ανν $o(G - S) \leq |S|$ για κάθε $S \subset V(G)$, όπου με $o(\cdot)$ συμβολίζουμε τον αριθμό των συνιστωσών περιττού βαθμού ενός γραφήματος.

Απόδειξη *[Από τον Lovász-1973]:*
"$\Rightarrow$"

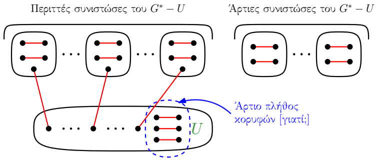
- Έστω ότι το G έχει ένα τέλειο ταίριασμα M.
- Έστω S ένα γνήσιο υπολύνολο του $V(G)$.
- Έστω $G_1, G_2 \ldots, G_k$ οι "περιττές" συνιστώσες του $G - S$.
- Επειδή η συνιστώσα G_i, $1 \leq i \leq k$, έχει περιττό βαθμό, κάποια κορυφή της u_i έχει ταιριαστεί στο M με κάποια κορυφή v_i του S.



- $o(G - S) = k = |\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}| \leq |S|$ λόγω του ότι $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subseteq S$. ✓

“$\Leftarrow$” (Με άτοπο.)

- Έστω ότι $o(G-S) \leq |S|$ για κάθε $S \subset V(G)$, αλλά το G δεν έχει τέλειο ταίριασμα.
- Έστω ένα μεγιστοτικό γράφημα G^* το οποίο δεν έχει τέλειο ταίριασμα και του οποίου παραγόμενο υπογράφημα είναι το G [$V(G^*) = V(G)$].
- $o(G^*-S) \leq o(G-S)$.
- Άρα, $\boxed{o(G^*-S) \leq |S|, \forall S \subset V(G^*) \qquad (1)}$
- Για $S = \emptyset \Rightarrow o(G-S) \leq 0 \Rightarrow$ Το G έχει άρτιο πλήθος κορυφών.
- Έστω U το σύνολο κορυφών του G^* που έχουν βαθμό $n-1$ [$V(G) = n$] στο G^*.
- Το γράφημα G^*-U αποτελείται από ένα σύνολο ξένων μεταξύ τους πλήρων γραφημάτων [Λήμμα 9.7].
- Από την (1) $\Rightarrow o(G^*-U) \leq |U|$, δηλαδή το πολύ $|U|$ από τις συνιστώσες του G^*-U είναι περιττού βαθμού.
- Το G^* έχει ένα τέλειο ταίριασμα!
  - Ταιριάζουμε μια κορυφή από κάθε περιττή συνιστώσα με μια κορυφή του U. Είναι δυνατό γιατί $o(G^*-U) \leq |U|$.
  - Όλες οι υπόλοιπες κορυφές σε κάθε πλήρη συνιστώσα, ταιριάζονται αυθαίρετα.



- ***Άτοπο,*** γιατί υποθέσαμε ότι το G^* είναι μεγιστοτικό χωρίς τέλειο ταίριασμα.
- Άρα το G έχει τέλειο ταίριασμα. ✓

Πόρισμα 9.9:

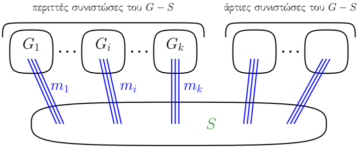
Κάθε 3-κανονικό γράφημα δίχως γέφυρες έχει ένα τέλειο ταίριασμα ***[Petersen,1891]***.

Απόδειξη :

- Έστω G ένα 3-κανονικό γράφημα χωρίς γέφυρες.
- Έστω σύνολο κορυφών $S \subset V(G)$.
- Έστω $G_1, G_2, \ldots, G_k$ οι περιττές συνιστώσες του $G - S$.
- Έστω m_i, $1 \le i \le k$ ο αριθμός των ακμών με το ένα άκρο στο G_i και το άλλο στο S.
- Το γράφημα G είναι 3-κανονικό $\Rightarrow$

$$\sum_{v \in V(G_i)} d(v) = 3V(G_i), i = 1 \ldots k \qquad (1)$$

$$\sum_{v \in S} d(v) = 3|S| \qquad (2)$$



- $m_i = \sum_{v \in V(G_i)} d(v) - 2E(G_i)$

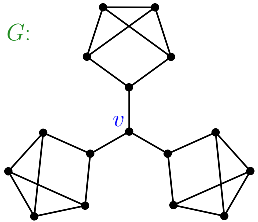
  $\Rightarrow$ Το m_i είναι περιττό [κάθε συνιστώσα G_i είναι περιττού βαθμού].
- $m_i \neq 1$ λόγω του ότι το G δεν έχει γέφυρες.
- $m_i \geq 3$ λόγω του ότι $m_i \neq 1$ και περιττό.

- $o(G-S) = k \leq \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{k} m_i$
  $\leq \frac{1}{3}\sum_{v\in S} d(v) \overset{(2)}{=} |S|$
- Το G έχει ένα τέλειο ταίριασμα [Θεώρημα 9.8(Tutte)]. ■

Σημείωση: Υπάρχουν 3-κανονικά γραφήματα με γέφυρες τα οποία δεν έχουν τέλειο ταίριασμα.

Απόδειξη :

G:



- Το γράφημα G είναι 3-κανονικό με γέφυρες.
- $o(G - \{v\} = 3 > |\{v\}| = 1$ το οποίο παραβιάζει την συνθήκη στο θεώρημα του Tutte [Θ. 9.8]. ■