

Θεωρία Γραφημάτων

7η Διάλεξη

A. Συμβόνης

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
Τομέας Μαθηματικών

Φεβρουάριος 2017

Hamiltonian γραφήματα

Κύκλος Hamilton:

Έστω γράφημα G . Ένας κύκλος του G ο οποίος διέρχεται από όλες τις κορυφές του G ονομάζεται **κύκλος Hamilton**.

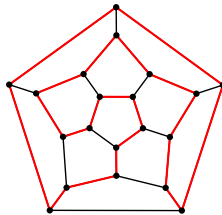
Hamiltonian γράφημα:

Ένα γράφημα το οποίο περιέχει κύκλο Hamilton ονομάζεται **Hamiltonian γράφημα**.

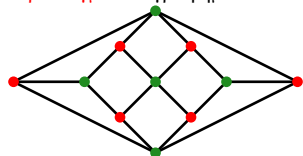
Μονοπάτι Hamilton:

Έστω γράφημα G . Ένα μονοπάτι του G το οποίο διέρχεται από όλες τις κορυφές του G ονομάζεται **μονοπάτι Hamilton**.

- Sir William Rowan Hamilton[1857].
 - Δωδεκάεδρο.
 - 20 κορυφές.
 - 3-κανονικό.



Παράδειγμα: Το γράφημα Herschel.



- 11 κορυφές.
- Διμερές.

• Το γράφημα Herschel δεν είναι Hamiltonian.

Απόδειξη :

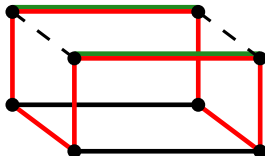
Εάν ήταν Hamiltonian, ο κύκλος Hamilton θα είχε 11 ακμές. Αυτό όμως είναι αδύνατο γιατί οι κύκλοι σε κάθε διμερές γράφημα έχουν άρτιο αριθμό ακμών. ■

Παράδειγμα: Ο υπερκύβος r -διαστάσεων H_r , $r \geq 2$ είναι Hamiltonian.

• H_2



• H_3



• H_r Αναδρομική κατασκευή ...

Θεώρημα 7.1 :

Έστω συνεκτικό γράφημα G . Εάν το G είναι Hamiltonian, τότε για κάθε μη-κενό υποσύνολο S του $V(G)$ ισχύει ότι $cc(G - S) \leq |S|$, όπου $cc()$ συμβολίζει τον αριθμό των συνεκτικών συνιστωσών ενός γραφήματος.

Απόδειξη :

• Έστω C ένας Hamiltonian κύκλος του G .

• Για κάθε μη-κενό $S \subset V(G)$ ισχύει ότι:

$$cc(C - S) \leq |S| \quad (1)$$

• Η ισότητα ισχύει για κάποιο σύνολο S , στην παρακάτω περίπτωση:

- Έστω $S = \{v_0, v_1, \dots, v_k\}$ όπου οι κορυφές του S δεν είναι διαδοχικές στον κύκλο C .
- Έστω C_i , $0 \leq i \leq k$, το τμήμα του κύκλου C ανάμεσα στις κορυφές v_i και $v_{(i+1) \bmod (k+1)}$.
- Δεν υπάρχει ακμή του G η οποία ενώνει δύο διαφορετικά τμήματα C_i και C_j του κύκλου C .

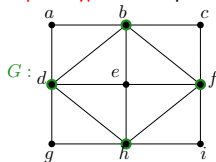
• Το $C - S$ είναι παραγόμενο υπογράφημα του $G - S$.

$$\Rightarrow cc(G - S) \leq cc(C - S)$$

• Από (1) $\Rightarrow cc(G - S) \leq |S|$.

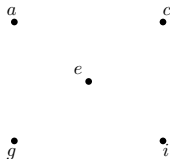
• Το Θεώρημα 7.1 περιγράφει μια ΑΝΑΓΚΑΙΑ συνθήκη για να είναι ένα γράφημα Hamiltonian.

Παράδειγμα: Το παρακάτω γράφημα δεν είναι Hamiltonian



$$S = \{b, c, f, h\}$$

$$\xrightarrow{G-S}$$



- Σύμφωνα με το Θεώρημα 7.1, για $S = \{b, c, f, h\}$ πρέπει να ισχύει ότι $cc(G - S) \leq |S| = 4$.
- Αλλά, $cc(G - S) = 5$. \Rightarrow Το γράφημα G δεν είναι Hamiltonian.

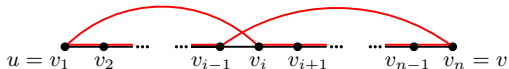
Θεώρημα 7.2 [Dirac-1952]:

Έστω G ένα απλό γράφημα με $|V(G)| \geq 3$ και $\delta(G) \geq \frac{|V(G)|}{2}$. Τότε το G είναι Hamiltonian.

Απόδειξη [Με απαγωγή σε άτοπο.]:

- Έστω G ένα μεγιστοτικό (maximal) μη-Hamiltonian απλό γράφημα με $|V(G)| \geq 3$ και $\delta(G) \geq \frac{|V(G)|}{2}$.
- Το G δεν είναι πλήρες [γιατί $|V(G)| \geq 3$].

- Έστω u, v δύο μη γειτονικές κορυφές του G .
- $G \cup (u, v)$ είναι Hamiltonian γιατί το G είναι μεγιστοτικό μη-Hamiltonian γράφημα.
- Λόγω του ότι το G είναι μη-Hamiltonian, κάθε Hamiltonian κύκλος του $G \cup (u, v)$ περιέχει την ακμή (u, v) .
- Έστω $u = v_1, v_2, \dots, v_n = v$, $n = |V(G)|$, ένας Hamiltonian κύκλος του $G \cup (u, v)$.
- Ο G έχει Hamiltonian μονοπάτι $P : u = v_1, v_2, \dots, v_n = v$ με άκρα τις κορυφές u και v .
- Όλοι οι γείτονες των u και v ανήκουν στο P .



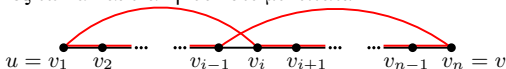
- Υπάρχει κορυφή v_i , $i \geq 3$: $(u, v_i) \in E(G)$ και $(v_{i-1}, v) \in E(G)$.
 [Εάν δεν υπήρχε, τότε για κάθε γείτονα του u θα υπήρχε μια διακριτή κορυφή με την οποία ο v δεν είναι ενωμένος. Λόγω του ότι $d(u) \geq \frac{n}{2}$, ο v θα είχε βαθμό $d(v) \leq (n-1) - d(u) \leq (n-1) - \frac{n}{2} = \frac{n}{2} - 1$. **Άτοπο**, γιατί $d(v) \geq \frac{n}{2}$.]
- Ο κύκλος $v_1 v_2 \dots v_{i-1} v_n v_{n-1} \dots v_{i+1} v_i v_1$ είναι Hamiltonian κύκλος του G .
- **Άτοπο**, γιατί ο G είναι μη Hamiltonian από την υπόθεση. ■

Θεώρημα 7.3 [Ore-1960]:

Έστω G ένα απλό γράφημα με $|V(G)| \geq 3$ και για κάθε ζεύγος $u, v \in V(G)$ μη γειτονικών κορυφών ισχύει ότι $d(u) + d(v) \geq |V(G)|$. Τότε το G είναι Hamiltonian.

Απόδειξη [Όμοια με αυτή του Θεωρήματος του Dirac.]:

- Το G είναι συνεκτικό.
[Εάν δεν ήταν, έστω v_1 και v_2 δύο κορυφές σε διαφορετικές συνιστώσες του. Τότε $d(v_1) + d(v_2) \leq |V(G)| - 2$. **Άτοπο.**]
- Έστω G ένα μεγιστοτικό μη-Hamiltonian γράφημα για το οποίο ισχύει ότι $|V(G)| \geq 3$ και $\forall u, v : (u, v) \notin E(G), d(u) + d(v) \geq |V(G)|$.
- $|V(G)| \geq 3 \Rightarrow$ Το G δεν είναι πλήρες γράφημα.
 \Rightarrow Υπάρχουν $u, v \in V(G) : (u, v) \notin E(G)$
- $G \cup \{u, v\}$ είναι Hamiltonian.
 \Rightarrow Υπάρχει Hamiltonian μονοπάτι $u = v_1, v_2, \dots, v_n = v, n = |V(G)|$, στον G .
- $d(u) + d(v) \geq |V(G)| \Rightarrow \max \{d(u), d(v)\} \geq \frac{|V(G)|}{2}$. Έστω $d(u) \geq \frac{|V(G)|}{2}$.
- Όλοι οι γείτονες των u και v ανήκουν στο μονοπάτι.



- Υπάρχει κορυφή $v_i, i \geq 3$: $(u, v_i) \in E(G)$ και $(v_{i-1}, v) \in E(G)$.
[Εάν δεν υπήρχε, τότε για κάθε γείτονα του u θα υπήρχε μια κορυφή με την οποία δεν γειτονεύει ο v . Τότε $d(v) \leq (n - 1) - d(u) \Rightarrow d(v) + d(u) \leq n - 1$. **Άτοπο.**]

- Ο κύκλος $v_1 v_2 \dots v_{i-1} v_n v_{n-1} \dots v_{i+1} v_i v_1$ είναι hamiltonian κύκλος στο G .
Άτοπο, γιατί υποθέσαμε ότι ο G είναι μη-Hamiltonian. ■

Σημείωση: Το Θεώρημα του Dirac μπορεί να εξαχθεί ως άμεση συνέπεια του Θεωρήματος του Ore.

Θεώρημα 7.4 [Bondy, Chvatal-1974]:

Έστω απλό γράφημα G με $|V(G)| \geq 3$ και έστω u, v μη γειτονικές κορυφές του με $d(u) + d(v) \geq |V(G)|$. Τότε, το G είναι Hamiltonian αν το $G \cup (u, v)$ είναι Hamiltonian.

Απόδειξη :

“ \Rightarrow ” Προφανές ✓
 “ \Leftarrow ”

Έστω ότι το $G \cup (u, v)$ είναι Hamiltonian αλλά το G όχι. Τότε η ίδια απόδειξη με το θεώρημα του Dirac [ή του Ore] κατασκευάζει Hamiltonian κύκλο για το G και οδηγεί σε **άτοπο**. ✓ ■

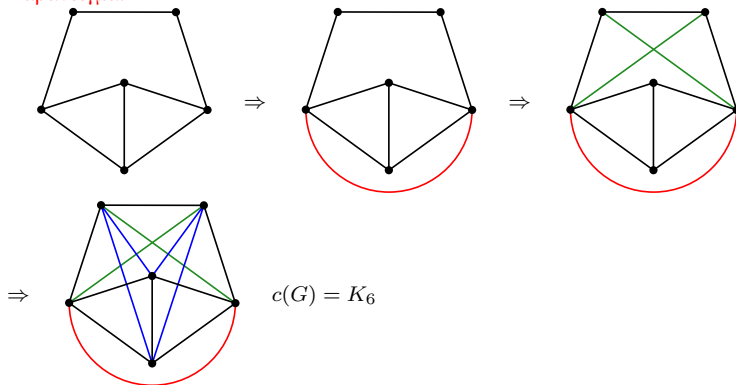
Σημείωση: Το Θεώρημα του Ore μπορεί να εξαχθεί ως συνέπεια του Θεωρήματος των Bondy-Chvatal.

- Εάν όλες οι μη γειτονικές κορυφές έχουν άθροισμα βαθμών $\geq |V(G)|$ θα καταλήξουμε στο ότι G είναι Hamiltonian $\Leftrightarrow K_{|V(G)|}$ είναι Hamiltonian το οποίο ισχύει.

Επέκταση (closure) ως προς το άθροισμα βαθμών:

Έστω το γράφημα G . Το γράφημα $c(G)$ που σχηματίζεται όταν ενώσουμε αναδρομικά ζεύγη μη γειτονικών κορυφών που έχουν άθροισμα βαθμών $\geq |V(G)|$ έως ότου δεν υπάρχουν τέτοια ζεύγη κορυφών, ονομάζεται **επέκταση του ως προς το άθροισμα βαθμών**.

Παράδειγμα:



Θεώρημα 7.5 :

Έστω γράφημα G . Η επέκταση $c(G)$ (ως προς το άθροισμα βαθμών) του G είναι καλώς ορισμένη.

Απόδειξη :

- Έστω G_1 και G_2 δύο γραφήματα που προκύπτουν προσθέτοντας αναδρομικά ακμές μεταξύ μη γειτονικών κορυφών με άθροισμα βαθμών $\geq |V(G)|$.
- Θα δείξουμε ότι $G_1 = G_2$.
- Έστω $S_1 = e_1^1 e_2^1 \dots e_k^1$ η ακολουθία ακμών που παράγει από το G το G_1 .
Έστω $S_2 = e_1^2 e_2^2 \dots e_\ell^2$ η ακολουθία ακμών που παράγει από το G το G_2
- Θα δείξουμε ότι $\{e_1^1, e_2^1, \dots, e_k^1\} \subseteq E(G_2)$ και $\{e_1^2, e_2^2, \dots, e_\ell^2\} \subseteq E(G_1)$.
- Έστω $e_i^1 = (u, v)$ η πρώτη ακμή της S_1 που δεν ανήκει στο $E(G_2)$.
- Σχηματίζουμε το γράφημα $H = G \cup \{e_1^1, \dots, e_{i-1}^1\}$.
 - $H \subset G_1$
 - $d_H(u) + d_H(v) \geq |V(G)|$ [Από τον ορισμό του G_1 .]
- $H \subset G_2$ [Γιατί όλες οι ακμές $e_1^1, e_2^1, \dots, e_{i-1}^1$ ανήκουν στο G_2 .]
 - $d_{G_2}(u) + d_{G_2}(v) < n$ [Γιατί $e_i^1 = (u, v) \notin E(G_2)$.]
Άτοπο.
- Άρα, κάθε ακμή της S_1 ανήκει στο G_2 και, όμοια, κάθε ακμή της S_2 ανήκει στο G_1 .
- Άρα $G_1 = G_2$. ■

Θεώρημα 7.6 :

Έστω απλό γράφημα G . Το G είναι Hamiltonian αν η επέκταση $c(G)$ ως προς το άθροισμα βαθμών του G είναι Hamiltonian.

Απόδειξη [Προκύπτει από το Θεώρημα 7.4 [Bondy-Chvatal].]:

- Έστω $S = e_1 e_2 \dots e_k$ η ακολουθία ακμών που δημιουργεί την επέκταση $c(G)$ από το G .
- Στο i -οστό βήμα προσθέτουμε την ακμή e_i έως ότου σχηματιστεί η επέκταση $c(G)$. ■

Πόρισμα 7.7:

Εάν η επέκταση $c(G)$ ως προς το άθροισμα βαθμών ενός γραφήματος G είναι πλήρες γράφημα, τότε το G είναι Hamiltonian.

Απόδειξη :

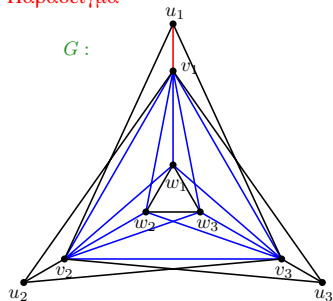
- Προκύπτει από το Θεώρημα 7.6 και το γεγονός ότι το πλήρες γράφημα K_n , $n \geq 3$ είναι Hamiltonian. ■

Θεώρημα 7.8 [Chvatal, 1972]:

Έστω απλό γράφημα G με ακολουθία βαθμών (d_1, d_2, \dots, d_n) όπου $n = |V(G)| \geq 3$ και $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$. Έστω ότι δεν υπάρχει $m \leq \frac{n}{2}$ τέτοιο ώστε $d_m \leq m$ και $d_{n-m} < n - m$. Τότε το G είναι Hamiltonian.

Σημείωση: Η ακολουθία βαθμών στο Θεώρημα 7.8 είναι αύξουσα, σε αντίθεση με τη σύμβαση που ακολουθήσαμε στο Κεφάλαιο “Βαθμοί κορυφών”, δηλαδή φθίνουσες γραφικές ακολουθίες.

Παράδειγμα



$$H = \{v_1, v_2, v_3\}, |H| = 3$$

$$cc(G - H) = 4 > 3 = |H|$$

$\xrightarrow{\text{Θ. 7.1}}$ Ο G δεν είναι Hamiltonian.

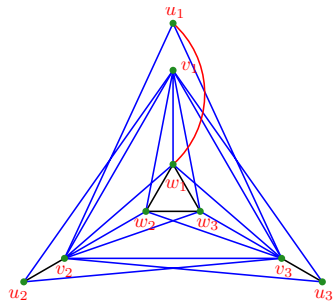
$$(\quad 3 \quad 3 \quad 3 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad 8 \quad 8 \quad 8 \quad) \quad m \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = 4$$

$$d_3 = 3 \leq 3 \quad \quad \quad d_{9-3} = d_6 = 5 < 6$$

✓ ✓

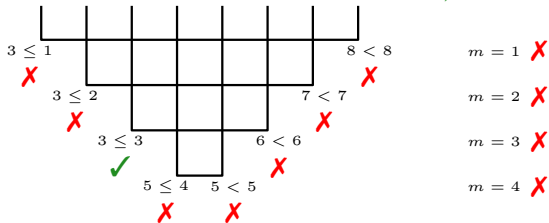
\Rightarrow Δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι είναι Hamiltonian.

Παράδειγμα (Συνέχεια) $G_1 = (G - (u_1, v_1)) \cup (u_1, w_1)$



Ακολουθία βαθμών:

(3 3 3 5 5 6 7 8 8)



\Rightarrow Δεν υπάρχει $m, 1 \leq m \leq \frac{n}{2}: d_m \leq m$ και $d_{n-m} < n - m$.

\Rightarrow Ο G είναι Hamiltonian.

Απόδειξη [Θεώρημα 7.8[Chvatal 1972]]:

- Έστω γράφημα G που ικανοποιεί την υπόθεση. Από Πόρισμα 7.7 αρκεί να δείξω ότι η επέκταση $c(G)$ είναι πλήρες γράφημα.
- Συμβολίζουμε με $d'(v)$, $v \in V(G)$, το βαθμό της v στο $c(G)$.
- Έστω ότι η επέκταση $c(G)$ δεν είναι πλήρες γράφημα.
- Έστω u, v δύο μη γειτονικές στο $c(G)$ κορυφές τέτοιες ώστε:

- $$d'(u) \leq d'(v) \quad (1)$$

- και $d'(u) + d'(v)$ μέγιστο ως προς όλα τα ζεύγη μη γειτονικών κορυφών του $c(G)$.

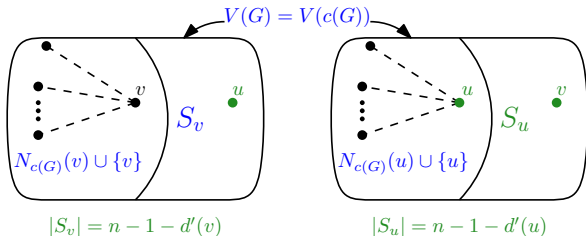
- $$d'(u) + d'(v) < n \quad (2)$$

[Εξ ορισμού της επέκτασης $c(G)$, κάθε ζεύγος μη γειτονικών κορυφών του $c(G)$ έχει άθροισμα βαθμών $< n$.]

- $$(1), (2) \Rightarrow d'(u) < \frac{n}{2} \quad (3)$$

- Έστω S_v το σύνολο των κορυφών του $c(G)$ που δεν είναι γειτονικές με την v (στο $c(G)$).
Τότε,

$$|S_v| = n - 1 - d'(v) \quad (4)$$



- Έστω S_u το σύνολο κορυφών του $c(G)$ που δεν είναι γειτονικές με την u (στο $c(G)$). Τότε,

$$|S_u| = n - 1 - d'(u) \quad (5)$$

- Κάθε κορυφή του S_v έχει βαθμό $\leq d'(u)$.
 [Εάν υπήρχε κορυφή $w \in S_v$ με $d'(w) > d'(u)$, τότε, για το ζεύγος μη γειτονικών v, w θα είχαμε: $d'(v) + d(w) > d'(u) + d(w)$. **Άτοπο**, γιατί διαλέξαμε τα u, v έτσι ώστε το $d'(u) + d'(v)$ να είναι το μεγαλύτερο δυνατό.]
- Κάθε κορυφή του $S_u \cup \{u\}$ έχει βαθμό $\leq d'(v)$.
 [Όμοια αιτιολόγηση με προηγούμενο ισχυρισμό και χρήση της (1).]
- Θέτουμε $d'(u) = m \quad (6) \Rightarrow$
- Οι κορυφές του S_v έχουν βαθμό $\leq m$.

- Πλήθος κορυφών του S_v :

$$\begin{array}{l}
 (4): \quad |S_v| = n - 1 - d'(v) \\
 (2): \quad d'(v) < n - d'(u) \\
 (6): \quad d'(u) = m
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} (4) \\ (2) \\ (6) \end{array}} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} |S_v| > n - 1 - (n - m) \\ = n - 1 - n + m \\ = m - 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow |S_v| > m - 1$$

$$\Rightarrow |S_v| \geq m$$

\Rightarrow Στο $c(G)$ υπάρχουν τουλάχιστον m κορυφές με βαθμό $\leq m$. (7)

- Οι κορυφές του $S_u \cup \{u\}$ έχουν βαθμό

$$\leq d'(v) \stackrel{(2)}{<} n - d'(u) \stackrel{(6)}{=} n - m.$$

\Rightarrow Οι κορυφές του $S_u \cup \{u\}$ έχουν βαθμό $< n - m$.

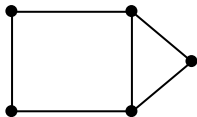
- Πλήθος των κορυφών του $S_u \cup \{u\}$:

$$|S_u \cup \{u\}| = 1 + |S_u| \stackrel{(5)}{=} 1 + n - 1 - d'(u) \stackrel{(6)}{=} n - m$$

\Rightarrow Στο $c(G)$ υπάρχουν τουλάχιστον $n - m$ κορυφές με βαθμό $< n - m$. (8)

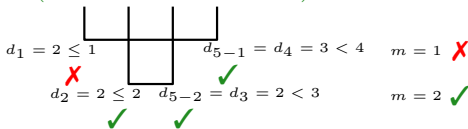
- Το G είναι παραγόμενο υπογράφημα του $c(G)$. $\xrightarrow{(7)(8)}$
- $$\left\{ \begin{array}{l} \text{Στο } G \text{ υπάρχουν } \geq m \text{ κορυφές με βαθμό } \leq m. \\ \text{Στο } G \text{ υπάρχουν } \geq n - m \text{ κορυφές με βαθμό } < n - m. \end{array} \right\} \Rightarrow$$
- $\Rightarrow d_m \leq m$ και $d_{n-m} < n - m$. **Άτοπο**, γιατί από (3)(6) έχουμε ότι $m < \frac{n}{2}$.
- Άρα, το $c(G)$ είναι πλήρες γράφημα.
- Το G είναι Hamiltonian. [Από το Πόρισμα 7.7.] ■

Σημείωση: Η συνθήκη του Θεωρήματος 7.8 δεν είναι αναγκαία συνθήκη για Hamiltonian γραφήματα.



Ακολουθία βαθμών:

(2 2 2 3 3)

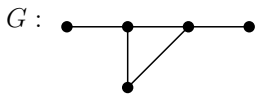


- Το G είναι Hamiltonian.
- Το G δεν ικανοποιεί τη συνθήκη του Θεωρήματος 7.8.
- Η επέκταση $c(G)$ του G είναι πλήρης (το K_5)!

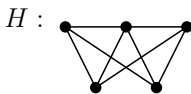
- Έστω δύο ακολουθίες n φυσικών αριθμών $P = (p_1, \dots, p_n)$ και $Q = (q_1, \dots, q_n)$. Λέμε ότι η ακολουθία Q **καλύπτει (ή φράσει από πάνω)** την ακολουθία P αν ισχύει ότι $p_i \leq q_i, 1 \leq i \leq n$.

- Έστω γραφήματα G και H με αύξουσες ακολουθίες βαθμών S_G και S_H , αντίστοιχα. Λέμε ότι **το γράφημα H καλύπτει βαθμιαία το G** αν $|V(G)| = |V(H)|$ και η ακολουθία βαθμών S_H καλύπτει την ακολουθία βαθμών S_G .

Παράδειγμα:



$$S_G : (1, 1, 2, 3, 3)$$



$$S_H = (3, 3, 3, 3, 4)$$

- Το H καλύπτει βαθμιαία το G .

Το γράφημα $C_{m,n}$

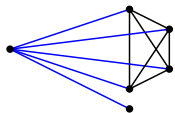
$$C_{m,n} = K_m * (\bar{K}_m + K_{n-2m}) \quad 1 \leq m < \frac{n}{2}$$

“*”: Σύνδεση διακεκριμένων γραφημάτων.

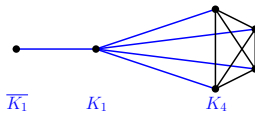
“+”: Ένωση διακεκριμένων γραφημάτων.

Παράδειγμα: $n = 6 \Rightarrow m = 1$ ή $m = 2$.

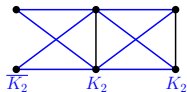
$m = 1$



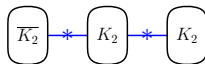
ή



$m = 2$



ή



Λήμμα 7.9:

- i. $|V(C_{m,n})| = n$
- ii. $|E(C_{m,n})| = \binom{n-m}{2} + m^2$

Λήμμα 7.10:

Το γράφημα $C_{m,n}$ είναι μη-Hamiltonian.

Απόδειξη :

- Έστω V_1 το σύνολο κορυφών του πλήρους γραφήματος K_m το οποίο “συνδέεται” με το $(\bar{K}_n + K_{n-2m})$
- $C_{m,n} - V_1 = \bar{K}_m + K_{n-2m}$
- $cc(C_{m,n} - V_1) = m + 1 > |V_1|$
- Το $C_{m,n}$ δεν πληρεί την αναγκαία συνθήκη του Θεωρήματος 7.1 ώστε να είναι Hamiltonian.

Θεώρημα 7.11 [Chvatal-1972]:

Έστω απλό μη-Hamiltonian γράφημα G με $|V(G)| = n \geq 3$. Τότε, το G καλύπτεται βαθμιαία από κάποιο $C_{m,n}$.

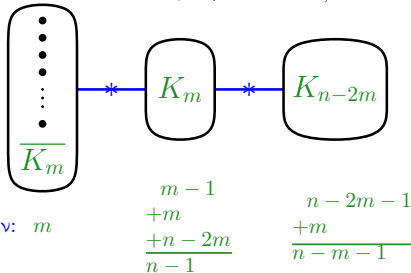
Απόδειξη :

- Έστω G ένα απλό, μη-Hamiltonian γράφημα και έστω $S_G = (d_1, \dots, d_n)$ η αύξουσα ακολουθία βαθμών του.

- G μη-Hamiltonian. $\xrightarrow{\Theta. 7.8} \exists m < \frac{n}{2} : d_m \leq m$ και $d_{n-m} < n - m$
- $S_G = (d_1, \dots, d_m \leq m, \dots, d_{n-m} < n - m, \dots, d_n)$
- Η ακολουθία S_G καλύπτεται βαθμιαία από την ακολουθία

$$S = (\underbrace{m, \dots, m}_{m\text{-όροι}}, \underbrace{n - m - 1, \dots, n - m - 1}_{(n-2m)\text{-όροι}}, \underbrace{n - 1, \dots, n - 1}_{m\text{-όροι})$$
- Η ακολουθία S είναι ακολουθία βαθμών του $C_{m,n}$.

$C_{m,n}$:



Βαθμός κορυφών: m

Σημείωση: Η κλάση γραφημάτων $C_{m,n}$ μπορεί να θεωρηθεί ως η κλάση των μεγιστοτικών (ως προς τη βαθμιαία κάλυψη) μη-Hamiltonian γραφημάτων, δηλαδή, των μη-Hamiltonian γραφημάτων τα οποία δεν καλύπτονται βαθμιαία από κάποιο μη-Hamiltonian γράφημα.

Θεώρημα 7.12 [Ore-1961, Bondy-1972]:

Έστω απλό γράφημα G με $|V(G)| = n \geq 3$ και $|E(G)| > \binom{n-1}{2} + 1$ ακμές. Τότε, το G είναι Hamiltonian. Επιπλέον, τα μόνα μη-Hamiltonian γραφήματα με $\binom{n-1}{2} + 1$ ακμές είναι τα $C_{1,n}$ και το $C_{2,5}$.

Απόδειξη [με άτοπο]:

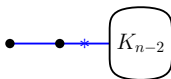
- Έστω G απλό, μη-Hamiltonian γράφημα με $|V(G)| = n \geq 3$.
- Το G καλύπτεται βαθμιαία από το $C_{m,n}$ [Θεώρημα 7.11]. \Rightarrow

$$|E(G)| \leq |E(C_{m,n})| \stackrel{\wedge.7.9}{=} \binom{n-m}{2} + m^2$$
$$\stackrel{\wedge.7.13}{=} \binom{n-1}{2} + 1 - \frac{1}{2}(m-1)(2n-3m-4)$$

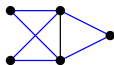
$$|E(G)| \leq |E(C_{m,n})| \leq \binom{n-1}{2} + 1 \quad (1)$$

- **Άτοπο**, γιατί $|E(G)| > \binom{n-1}{2} + 1$. \Rightarrow Το G είναι Hamiltonian.
- Στην (1) η ισότητα ισχύει όταν $(m-1)(2n-3m-4) = 0$.
 $\Rightarrow m = 1$ ή $(n = 5$ και $m = 2)$.
- Τα μόνα μη-Hamiltonian γραφήματα με $\binom{n-1}{2} + 1$ ακμές είναι τα $C_{1,n}$, $C_{2,5}$.

$C_{1,n}$:



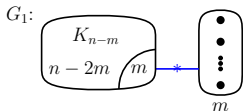
$C_{2,5}$:



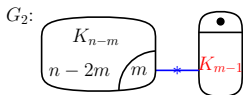
Λήμμα 7.13:

$$\binom{n-m}{2} + m^2 = \binom{n-1}{2} + 1 - \frac{1}{2}(m-1)(2n-3m-4)$$

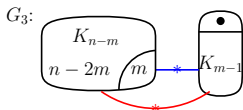
Απόδειξη :



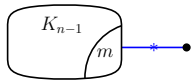
$$E(G_1) = \binom{n-m}{2} + m^2 \quad (1)$$



$$E(G_2) = E(G_1) + \binom{m-1}{2} \quad (2)$$



$$E(G_3) = E(G_2) + (n-2m)(m-1) \quad (3)$$



$$E(G_3) = \binom{n-1}{2} + 1 + (m-1) \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
 (2) \Rightarrow E(G_1) &= E(G_2) - \binom{m-1}{2} \stackrel{(3)}{=} E(G_3) - (n-2m)(m-1) - \binom{m-1}{2} \\
 &\stackrel{(4)}{=} \binom{n-1}{2} + 1 + (m-1) - (m-1)(n-2m) - \frac{(m-1)(m-2)}{2} \\
 &= \binom{n-1}{2} + 1 - (m-1)(-1 + (n-2m) + \frac{(m-2)}{2}) \\
 &= \binom{n-1}{2} + 1 - \frac{1}{2}(m-1)(-2 + 2n - 4m + m - 2)
 \end{aligned}$$

$$E(G_1) = \binom{n-1}{2} + 1 - \frac{1}{2}(m-1)(2n - 3m - 4) \quad (5)$$

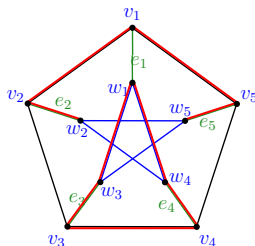
$$(1),(5) \Rightarrow \binom{n-m}{2} + m^2 = \binom{n-1}{2} + 1 - \frac{1}{2}(m-1)(2n - 3m - 4)$$



Λήμμα 7.14:

Το γράφημα Petersen δεν είναι Hamiltonian.

Απόδειξη :



- Έστω ότι υπάρχει Hamiltonian κύκλος.
- Άρτιος αριθμός ακμών από τις e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 πρέπει να χρησιμοποιηθεί (διαφορετικά, ο κύκλος ξεκινά από το $\{v_1, \dots, v_5\}$ και τελειώνει στο $\{w_1, \dots, w_5\}$).

- Εάν επιλεγούν 2 ακμές, τα άκρα τους πρέπει να είναι γειτονικά στον εσωτερικό και τον εξωτερικό κύκλο. **Αδύνατο.**
- Εάν επιλεγούν 4 ακμές: \Rightarrow Έστω ότι δεν επιλέγεται η e_1 .
 \Rightarrow Επιλέγεται η (v_1, v_2) και η (v_1, v_5) .
 \Rightarrow Δεν επιλέγεται η (v_2, v_3) και η (v_4, v_5) .
 \Rightarrow Επιλέγεται η (v_3, v_4) .
- Επίσης επιλέγονται οι (w_1, w_3) και (w_1, w_4) (γιατί δεν επιλέχθηκε η e_1).
- Άρα, οι w_1, w_3, v_3, v_4, w_4 σχηματίζουν κύκλο που δεν καλύπτει όλες τις κορυφές.

Άτοπο.