Θεωρία Γραφημάτων
6η Διάλεξη

Α. Συμβώνης

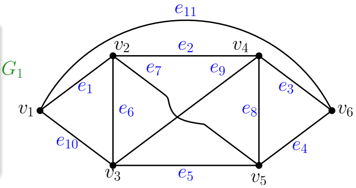
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
Τομέας Μαθηματικών

Φεβρουάριος 2017

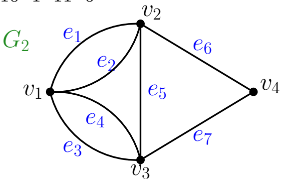
Eulerian γραφήματα

Περίπατος:

Ένας περίπατος μήκους k είναι μια ακολουθία $\pi = < v_0 e_1 v_1 \ldots v_{k-1} e_k v_k >$ από εναλλασσόμενες κορυφές και ακμές του γραφήματος G έτσι ώστε $e_i = (v_{i-1}, v_i), \forall i = 1, \ldots, k$.



(v_1, v_6)-περίπατος: $v_1 e_1 v_2 e_2 v_4 e_5 v_6 e_4 v_5 e_5 v_3 e_6 v_2 e_7 v_5 e_8 v_4 e_3 v_3 e_{10} v_1 e_{11} v_6$



Περιήγηση:

Ένας περίπατος με ταυτόσημες τερματικές κορυφές.

Μονοκονδυλιά:

Ένας περίπατος χωρίς επαναλαμβανόμενες ακμές.

$G_1: \quad v_1 e_1 v_2 e_6 v_3 e_9 v_4 e_8 v_5$

$G_2: \quad v_1 e_1 v_2 e_2 v_1 e_3 v_3 e_4 v_1$

Περιήγηση Euler:

Έστω γράφημα G. Μια κλειστή μονοκονδυλιά του G η οποία περιλαμβάνει όλες τις ακμές του ονομάζεται **περιήγηση Euler** του G.

Περίπατος Euler:

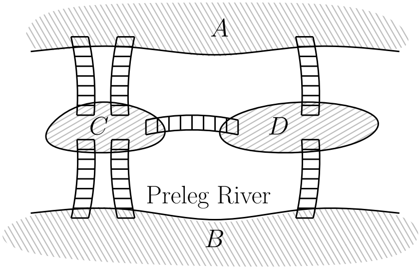
Έστω γράφημα G. Μια μονοκονδυλιά του G η οποία περιλαμβάνει όλες τις ακμές του και έχει διαφορετικές "τερματικές" κορυφές ονομάζεται **περίπατος Euler** του G.

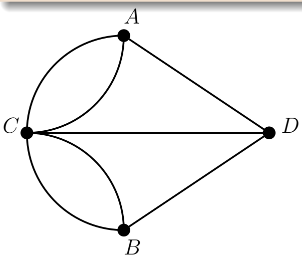
Eulerian γράφημα:

Ένα γράφημα το οποίο έχει μια περιήγηση Euler.

Semi-Eulerian γράφημα:

Ένα γράφημα το οποίο έχει έναν περίπατο Euler.





Μοντελοποίηση από Euler [1735]

Θεώρημα 6.1 *[Euler]*:

Έστω συνεκτικό γράφημα G. Το G είναι Eulerian γράφημα ανν κάθε κορυφή του G έχει άρτιο βαθμό.

Απόδειξη :
"$\Longrightarrow$"

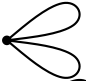
- Έστω G ένα συνεκτικό Eulerian γράφημα.
- Έστω P μια περιήγηση Euler του G.
- Ο βαθμός κάθε κορυφής μπορεί να υπολογιστεί προσθέτοντας 2 μονάδες σε κάθε κορυφή που συναντάμε κατά την περιήγηση του P.
  [Μία μονάδα για την εισερχόμενη ακμή και μία για την εξερχόμενη.]
- Στα αθροίσματα λαμβάνονται υπόψιν όλες οι ακμές γιατί η περιήγηση P είναι Eulerian.
- Κάθε κορυφή έχει άρτιο βαθμό. ✓

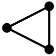
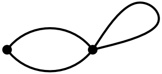
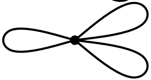
"$\Longleftarrow$" [Με επαγωγή στον αριθμό των ακμών του G.]

- Το G είναι συνεκτικό και ο βαθμός κάθε κορυφής είναι άρτιος.

$\Rightarrow$ Ο βαθμός κάθε κορυφής ≥ 2.

$\Rightarrow \delta(G) \geq 2$

Βάση: $|E(G)| = 1$  $|E(G)| = 2$  ή 

$|E(G)| = 3$  ή  ή  $\checkmark$

Ε.Υ. Κάθε συνεκτικό γράφημα G με $|E(G)| < k$ και με κορυφές άρτιου βαθμού είναι Eulerian γράφημα.

Ε.Β. Θα δείξουμε ότι κάθε συνεκτικό γράφημα με k ακμές και κορυφές άρτιου βαθμού είναι Eulerian.

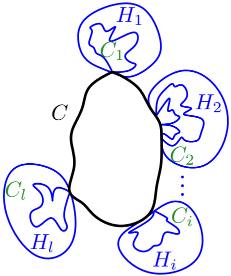
- Έστω G συνεκτικό γράφημα με k ακμές και με κορυφές άρτιου βαθμού.
- $\delta(G) \geq 2 \Rightarrow$ Ο G έχει κύκλο, έστω C.

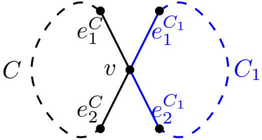
Περίπτωση 1: Ο C περιέχει k ακμές, δηλαδή όλες τις ακμές του G.
$\Rightarrow$ Ο G είναι Eulerian. $\checkmark$

Περίπτωση 2: Ο C περιέχει $< k$ ακμές

- Έστω το γράφημα G' που προκύπτει από την αφαίρεση των ακμών του κύκλου C από το G.
- Έστω $H_1, H_2, \ldots, H_\ell$ οι συνεκτικές συνιστώσες του G'.

- Κάθε συνιστώσα $H_i, 1 \leq i \leq \ell$ του G' έχει τουλάχιστον μια κορυφή κοινή με τον C.
- $|E(H_i)| < k, 1 \leq i \leq \ell$
- Έστω C_i η περιήγηση Euler του H_i [από Ε.Υ.].
- Έστω v μια κορυφή που ανήκει στον C και την συνιστώσα H_1.
- Έστω e_1^C (e_2^C) η ακμή του C που προηγείται της (ακολουθεί την) κορυφής v στον C.
- Έστω $e_1^{C_1}$ και $e_2^{C_1}$ η ακμή που προηγείται και ακολουθεί μια εμφάνιση της v στην C_1.
- Ο C μπορεί να επεκταθεί ακολουθώντας, μετά την e_1^C, την $e_1^{C_1}$ …την περιήγηση C_1 έως την $e_2^{C_1}$, μετά την e_2^C, ….
- Ο C επεκτείνεται ώστε να περιλάβει την H_1.





- Με όμοιο τρόπο περιλαμβάνει διαδοχικά όλες τις συνιστώσες $H_i, 1 \leq i \leq \ell$ του G'.
- Ο C επεκτείνεται ώστε να γίνει περιήγηση που περιλαμβάνει όλες τις ακμές του G.

  $\Rightarrow$ Ο G είναι Eulerian γράφημα. ✓

Πόρισμα 6.2:

Έστω συνεκτικό γράφημα G. Το G είναι semi-Eulerian γράφημα ανν έχει ακριβώς 2 κορυφές με περιττό βαθμό.

Απόδειξη :

"$\Rightarrow$" Έστω u, v οι τερματικές κορυφές του περιπάτου που περιέχει όλες τις ακμές του G.

- Με την ίδια διαδικασία της απόδειξης του Θεωρήματος Euler προκύπτει ότι οι κορυφές u, v έχουν περιττό βαθμό ενώ όλες οι εσωτερικές κορυφές του περιπάτου έχουν άρτιο βαθμό. ✓

"$\Leftarrow$"

- Έστω το $G' = (V(G), E(G) \cup \{e = (u, v)\})$.
- Όλες οι κορυφές του G' έχουν άρτιο βαθμό.

$\Rightarrow$ Το G' είναι Eulerian.

$\Rightarrow$ Το G' έχει περιήγηση Euler P.

- $P \backslash e = (u, v)$ είναι περίπατος Euler από την u στην v. ✓ ■

Μη αναδρομική κατασκευή περιήγησης Euler. [Αλγόριθμος Fleury - 1921]

- Σχηματίζουμε περιήγηση Euler ξεκινώντας από αυθαίρετη κορυφή u και συνεχίζοντας με βάση τους κανόνες:

  i. Διαγράφουμε από το G την ακμή που μόλις διασχίσαμε. Διαγράφουμε τις μεμονωμένες κορυφές [χωρίς βρόγχους].

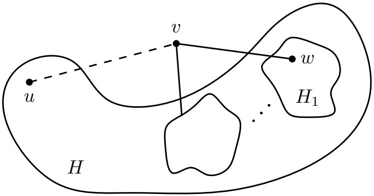
  ii. Χρησιμοποιούμε μια γέφυρα μόνο όταν ο βαθμός της τρέχουσας κορυφής [στο γράφημα H που έχει προκύψει] είναι ίσος με 1.

Απόδειξη ορθότητας:

- Έστω ότι έχουμε φτάσει σε μια κορυφή v.

Περίπτωση 1: $u \neq v$.

- Στο τρέχων γράφημα H ο βαθμός των u, v είναι περιττός. Όλοι οι άλλοι βαθμοί είναι άρτιοι.
- Το H είναι συνεκτικό.
- Θα δείξουμε ότι: Η διαγραφή της επόμενης ακμής (και κορυφής, εάν χρειαστεί) δεν μετατρέπει το H σε μη συνεκτικό γράφημα.



- Έστω ότι όλες οι προσπίπτουσες στην v ακμές είναι γέφυρες, δηλαδή ο αλγόριθμος δεν μπορεί να συνεχίσει με βάση τον κανόνα ii.
- Διαγράφοντας μια γέφυρα προκύπτει γράφημα H με δύο συνιστώσες, μια εκ των οποίων δεν περιέχει την u. Έστω ότι αυτή είναι η συνιστώσα H_1.
- Έστω (v, w) η γέφυρα που ενώνει την v με την H_1.
- Στην H_1 ο βαθμός της w είναι περιττός.
  $\Rightarrow$ Υπάρχει περιττός αριθμός κορυφών στην H_1 με περιττό βαθμό.
- Πριν τη διαγραφή της (v, w) οι κορυφές περιττού βαθμού στο H είναι άρτιες στο πλήθος
  [η u, η v και οι περιττού βαθμού κορυφές του H_1].
- **Άτοπο.** $\Rightarrow$ Όταν εκτελώντας το βήμα ii. διαγράφουμε μια γέφυρα, αυτή είναι η μοναδική που προσπίπτει στην κορυφή v, και άρα η κορυφή v έχει βαθμό 1. ✓

Περίπτωση 2: $u = v$.

Περίπτωση 2α: Υπάρχουν ακόμα ακμές που προσπίπτουν στην u.

- Συνεχίζουμε όπως στην περίπτωση 1.

Ο βαθμός της u είναι άρτιος. Διαγράφοντας μια προσπίπτουσα στη u ακμή δημιουργώ 2 κορυφές περιττού βαθμού. ✓

Περίπτωση 2β: Η u έγινε απομονωμένη κορυφή [πιθανώς με βρόγχους].

- Το H είναι κενό. Δηλαδή έχουμε κατασκευάσει μια περιήγηση Euler.

Απόδειξη :

Έστω ότι δεν είναι κενό, τότε αποτελείται από μία τουλάχιστον συνεκτική συνιστώσα.
Αυτή αποκόπηκε όταν ακολουθήσαμε, έστω, την ακμή $e = (x, y)$ η οποία ήταν γέφυρα, και έστω η κορυφή x ανήκει στην συνιστώσα αυτή.
Τότε, ή στην x προσπίπτουν ≥ 2 γέφυρες (αδύνατο) ή δεν εφαρμόσαμε σωστά το βήμα ii. **Άτοπο.** ✓ ■

Θεώρημα Euler για κατευθυνόμενα γραφήματα.

- Κάθε ακμή $e = (u, v)$ είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος κορυφών.
- Η u είναι η αφετηρία και η v είναι η κατάληξη της e.

Συνεκτικό κατευθυνόμενο γράφημα:

Ένα κατευθυνόμενο γράφημα ονομάζεται **συνεκτικό** όταν το γράφημα που προκύπτει από την αντικατάσταση κάθε κατευθυνόμενης ακμής $e = (u, v)$ από την αντίστοιχη μη-κατευθυνόμενη (u, v) είναι συνεκτικό.

Ισχυρά-συνεκτικό κατευθυνόμενο γράφημα:

Κάθε κατευθυνόμενο γράφημα στο οποίο κάθε ζεύγος κορυφών u, v ενώνεται με ένα κατευθυνόμενο (u, v)-μονοπάτι ονομάζεται **ισχυρά-συνεκτικό γράφημα.**

- $d^+(u)$: Έξω-βαθμός κορυφής u.
- $d^-(u)$: Έσω-βαθμός κορυφή u.
- $\displaystyle\sum_{u \in V(G)} d^+(u) = \sum_{u \in V(G)} d^-(u) = |E(G)|$

Θεώρημα 6.3 *[Euler]*:

Ένα συνεκτικό κατευθυνόμενο γράφημα G είναι Eulerian ανν $d^+(u) = d^-(u)$ για κάθε κορυφή u του G.

Πόρισμα 6.4:

Κάθε κατευθυνόμενο Eulerian γράφημα είναι ισχυρά συνεκτικό.

Ερώτηση 6.1: Για ποιες τιμές των παραμέτρων τους είναι τα παρακάτω γραφήματα Eulerian?

i. K_n
ii. $K_{m,n}$
iii. $R_{m,n}$ [Πλέγμα]
iv. H_r
v. Πλήρες m-αδικό δένδρο ύψους h.

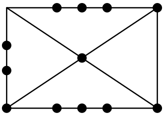
Ερώτηση 6.2: Έστω το γράφημα $G \times H$ [γινόμενο διακεκριμένων γραφημάτων]. Είναι το $G \times H$ Eulerian αν τα G, H είναι Eulerian?

Το πρόβλημα του Κινέζου ταχυδρόμου. [Kwan - 1962]

Πρόβλημα Κινέζου ταχυδρόμου:

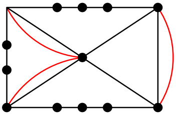
Έστω γράφημα G. Να βρεθεί περιήγηση W η οποία διέρχεται από κάθε ακμή του G και έχει το μικρότερο δυνατό μήκος.

G



Μη-Eulerian

G'



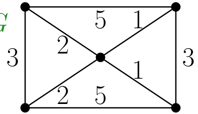
Eulerian

Εκδοχή με βάρη:

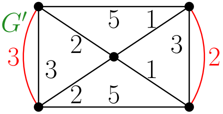
Έστω γράφημα G με βάρη. Να βρεθεί περιήγηση W η οποία διέρχεται από κάθε ακμή του G και το βάρος $w(W)$ της περιήγησης είναι το μικρότερο δυνατό.

$w(G)$: $w(G) = \sum_{e \in E(G)} w(e)$ [ανάλογα με τον αριθμό των εμφανίσεων της ακμής]

G



G'

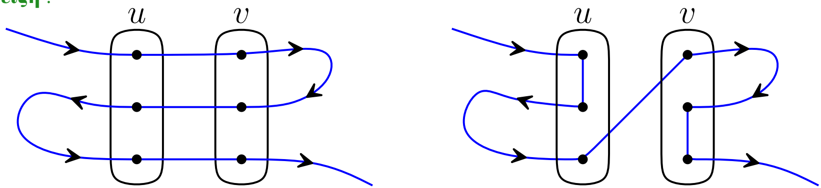


- G Eulerian $\Rightarrow$ Μια περιήγηση Euler είναι η βέλτιστη λύση.

Λήμμα 6.5:

Έστω μη-Eulerian γράφημα G. Εάν μια ακμή του G εμφανίζεται > 1 φορές στην περιήγηση που επιλύει το πρόβλημα του κινέζου ταχυδρόμου τότε εμφανίζεται ακριβώς 2 φορές.

Απόδειξη :



- Πάντα μπορώ, εάν έχω 3 τουλάχιστον εμφανίσεις της ίδιας ακμής σε μια περιήγηση, να απαλείψω τις δύο πρώτες, τροποποιώντας την περιήγηση.
- Μη-βέλτιστη περιήγηση. **Άτοπο.** ∎

“Πράσινες ακμές / μονοπάτια”: Έστω μια βέλτιστη περιήγηση W ενός μη-Eulerian γραφήματος G. Χρωματίζουμε τις ακμές που εμφανίζονται για 2η φορά **πράσινες**.

- Το υπογράφημα με τις πράσινες ακμές είναι άκυκλικό.

  [Διαγράφοντας τις ακμές ενός πράσινου κύκλου παίρνω Eulerian γράφημα με περιήγηση μικρότερου κόστους.]

- Οι πράσινες ακμές ορίζουν ένα σύνολο από ξένα ως προς τις ακμές μονοπάτια που αρχίζουν και τελειώνουν σε κορυφές περιττού βαθμού.

  [Έστω u και v δύο φύλλα ενός πράσινου δένδρου. Αφαίρεσε το (u, v) μονοπάτι του πράσινου δένδρου. Συνέχισε το σχηματισμό των μονοπατιών αναδρομικά.]

- Έστω $2k$ οι κορυφές περιττού βαθμού. Τότε ορίζονται ακριβώς k πράσινα (ξένα ως προς τις ακμές) μονοπάτια με τερματικά σημεία τις κορυφές περιττού βαθμού.

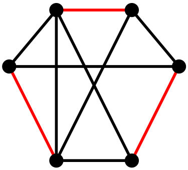
  [Κάθε φύλλο του “εναπομείναντος” πράσινου δένδρου έχει περιττό βαθμό στο G.]

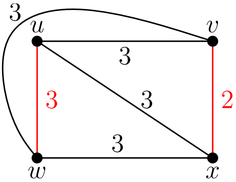
Τέλειο ταίριασμα:

Έστω γράφημα $G = (V, E)$ όπου $V = 2k$, $k \geq 1$. Ένα υποσύνολο ακμών $M \subseteq E : |M| = k$ ονομάζεται **τέλειο ταίριασμα** εάν τα άκρα των ακμών του M "καλύπτουν" όλες τις κορυφές του V.

Τέλειο ταίριασμα ελάχιστου κόστους:

Για γραφήματα με βάρη.

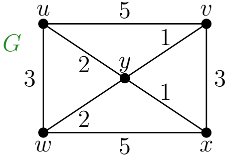


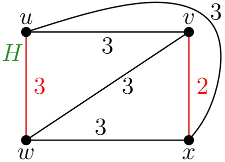


- Έστω γράφημα με βάρη G.

Έστω το πλήρες γράφημα με βάρη H όπου:

  - Κορυφές του H είναι οι κορυφές περιττού βαθμού του G.
  - Το βάρος κάθε ακμής (u, v) του H ισούται με το βάρος του ελάχιστου (u, v)-μονοπατιού του G.





Λήμμα 6.6:

Το κόστος των πράσινων μονοπατιών μιας βέλτιστης περιήγησης που επιλύει το πρόβλημα του Κινέζου ταχυδρόμου είναι ίσο με το κόστος ενός τέλειου ταιριάσματος ελαχίστου κόστους του πλήρους γραφήματος H που αντιστοιχεί στο G.

Απόδειξη :

- Τα πράσινα μονοπάτια αντιστοιχούν σε ένα τέλειο ταίριασμα.
- Τα ελάχιστα μονοπάτια που αντιστοιχούν σε ένα τέλειο ταίριασμα είναι ξένα ως προς τις ακμές μεταξύ τους. [Δες Λήμμα 6.7.]
- Εάν τα μονοπάτια του τέλειου ταιριάσματος έχουν μικρότερο βάρος από τα πράσινα μονοπάτια τότε η περιήγηση ελαχίστου κόστους δεν είναι ελάχιστη. **Άτοπο.** ■

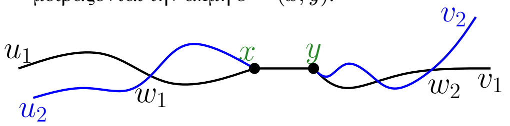
Λήμμα 6.7:

Σε ένα ελαχίστου κόστους τέλειο ταίριασμα των κορυφών περιττού βαθμού του G όπου τα βάρη αντιστοιχούν στο κόστος των ελαχίστων μονοπατιών μεταξύ των κορυφών αυτών, δεν υπάρχουν 2 ελάχιστα μονοπάτια στο ταίριασμα με κοινή ακμή.

Σημείωση: Ισχύει μόνο για θετικά βάρη ακμών.

Απόδειξη :

- Έστω ότι υπάρχουν 2 τέτοια ελάχιστα μονοπάτια $P_1(u_1, v_1)$ και $P_2(u_2, v_2)$ τα οποία μοιράζονται την ακμή $e = (x, y)$.



- Έστω w_1 η πρώτη κοινή κορυφή των δύο μονοπατιών.
- Έστω w_2 η τελευταία κοινή κορυφή των δύο μονοπατιών.
- $w_1 \neq w_2$ λόγω της ύπαρξης της $e = (x, y)$.
- Τα μονοπάτια $P_1(u_1, w_1) \cdot P_2(w_1, u_2)$ και $P_1(v_1, w_2) \cdot P_2(w_2, v_2)$ **έχουν μικρότερο συνολικό μήκος** από τα $P_1(u_1, v_1)$ και $P_2(u_2, v_2)$, **και** αποτελούν ένα ταίριασμα των u_1 u_2 v_1 v_2 **και** είναι ξένα μεταξύ τους (ως προς τις ακμές). **Άτοπο.** ■

Λήμμα 6.8:

Έστω $2k$ οι κορυφές περιττού βαθμού ενός γραφήματος G. Τότε υπάρχουν
$\prod_{i=1}^{k}(2i-1) = \frac{(2k)!}{2^k k!}$ διακριτά τέλεια ταιριάσματα.

Απόδειξη :

- Το 1ο ταίριασμα φτιάχνεται με $2k-1$ τρόπους.
- Το 2ο ταίριασμα φτιάχνεται με $2k-(2\cdot 2-1)$ τρόπους.
- Το i-οστό ταίριασμα φτιάχνεται με $2k-(2i-1)$ τρόπους.
- Συνολικά: $\prod_{i=1}^{k} 2k-(2i-1) = (2k-1)(2k-3)\ldots 3\cdot 1 = \prod_{i=1}^{k}(2i-1)$
  $= \frac{2k(2k-1)2(k-1)(2k-3)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}{2^k(k(k-1)(k-2)\ldots 1)} = \frac{(2k)!}{2^k k!}$
- Αλλά, $\prod_{i=1}^{k}(2i-1) = \frac{2k(2k-1)2(k-1)(2k-3)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}{2^k(k(k-1)(k-2)\ldots 1)} = \frac{(2k)!}{2^k k!}$

Αλγόριθμός εύρεσης περιήγησης Κινέζου ταχυδρόμου

Είσοδος: Γράφημα G με βάρη.

Έξοδος: Περιήγηση W ελαχίστου κόστους που περιλαμβάνει όλες τις ακμές του $E(G)$.

Βήμα-1:
- V_{odd}: Κορυφές περιττού βαθμού του $V(G)$.
- Κατασκεύασε πλήρες γράφημα με σύνολο κορυφών του V_{odd} όπου το βάρος $w(u,v)$ κάθε ακμής (u,v), $u,v \in V_{odd}$, είναι ίσο με το βάρος ενός ελαχίστου (u,v)-μονοπατιού $P(u,v)$ του G.

Βήμα-2:
- Έστω $M = \{e_i = (u_i, v_i) : i = 1, \ldots, k, 2k = |V_{odd}|\}$ ένα ελάχιστο τέλειο ταίριασμα του πλήρους γραφήματος και $P_i(u_i, v_i)$ το μονοπάτι ελαχίστου μήκους του G που αντιστοιχεί στην ακμή $e_i = (u_i, v_i)$ του ταιριάσματος.

Βήμα-3: $G' = (V(G), E')$ όπου $E' = E \bigcup_{i=1}^{k} E(P_i(u_i, v_i))$.

Βήμα-4: Υπολόγισε περιήγηση W στο Eulerian γράφημα G'. Η W επιλύει το πρόβλημα του κινέζου ταχυδρόμου.

Ορθότητα: Βάσει των προηγουμένων λημμάτων. ■