Θεωρία Γραφημάτων
5η Διάλεξη

Α. Συμβώνης

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
Τομέας Μαθηματικών

Φεβρουάριος 2017

Δένδρα

Δένδρο:

Ένα γράφημα το οποίο είναι συνεκτικό και ακυκλικό ονομάζεται **δένδρο.**

Δάσος:

Ένα μη συνεκτικό γράφημα χωρίς κύκλους ονομάζεται **δάσος.**
Οι συνεκτικές συνιστώσες ενός δάσους είναι δένδρα.

Φύλλο:

Κορυφή δένδρου με βαθμό 1.

Λήμμα 5.1:

Έστω ένα δένδρο T. Τότε, $|E(T)| = |V(T)| - 1$.

Απόδειξη :

- Γνωρίζουμε ότι: Εάν ένα γράφημα G είναι συνεκτικό, τότε $|E(G)| \geq |V(G)| - 1$.

  $$\boxed{\Rightarrow |E(T)| \geq |V(T)| - 1 \qquad (1)}$$ [Γιατί το T είναι συνεκτικό.]

- Έστω $|E(T)| > |V(T)| - 1 \geq |V(T)|$

  $$\Rightarrow e(T) = \frac{|E(T)|}{|V(T)|} \geq \frac{|V(T)|}{|V(T)|} = 1$$ [$e(T)$: πυκνότητα]

- Γνωρίζουμε ότι: Εάν $e(G) \geq q$ τότε το G περιέχει κύκλο(υς).

  $\Rightarrow T$ περιέχει κύκλο(υς). **Άτοπο.**

  $$\boxed{\Rightarrow |E(T)| \leq |V(T)| - 1 \qquad (2)}$$

(1),(2)$\Rightarrow$ $|E(T)| = |V(T)| - 1$ ■

Λήμμα 5.2:

Κάθε δένδρο T με $|V(T)| \geq 2$ έχει τουλάχιστον 2 φύλλα.

Απόδειξη :

- Έστω ότι έχει το πολύ 1 φύλλο x. Ισχύει ότι $d(x) = 1$.
- $\forall v \in V(T) \backslash x \;\; d(v) \geq 2$
- $$2|E(T)| = \sum_{v \in V(T)} d(v) = 1 + \sum_{v \in V(T) \backslash x} d(v) \geq 1 + 2(|V(T)| - 1)$$

  $\Rightarrow 2|E(T)| \geq 2|V(T)| - 1$

  $\Rightarrow |E(T)| \geq |V(T)| - 1/2 \quad [|E(T)|$ ακέραιος$]$

  $\Rightarrow |E(T)| \geq |V(T)|$

Άτοπο, γιατί T δένδρο και $|E(T)| = |V(T)| - 1$. ■

Θεώρημα 5.3 :

Έστω απλό γράφημα T. Το T είναι δένδρο ανν υπάρχει ακριβώς 1 μονοπάτι ανάμεσα σε κάθε ζεύγος κορυφών του T.

Απόδειξη :

“$\Rightarrow$” Έστω $\exists$ κορυφές $u, v \in V(T)$ που συνδέονται με 2 μονοπάτια, έστω $P_1(u, v)$ και $P_2(u, v)$.

- $\exists$ ακμή $e = (x, y) : e \in P_1(u, v), e \notin P_2(u, v)$

.

- Το $G = (P_1 \cup P_2)\backslash e$ είναι συνεκτικό.

$\Rightarrow \exists$ (x, y)-μονοπάτι P στο G

$\Rightarrow$ Το $P \cup \{e\}$ είναι κύκλος. **Άτοπο,** αφού το T είναι δένδρο. ✓

“$\Leftarrow$” Έστω $\exists$ ακριβώς 1 μονοπάτι ανάμεσα σε κάθε ζεύγος κορυφών του T. $\Rightarrow$ Το T είναι συνεκτικό.

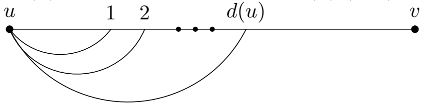
Θα δείξω ότι το T δεν έχει κύκλο. [Με επαγωγή στο $|V(T)|$.]

Βάση: $|V(T)| = 2$  Χωρίς κύκλο. ✓

Ε.Υ. Κάθε γράφημα T με $|V(T)| < k,\ k \geq 3$, για το οποίο $\exists$ ακριβώς 1 μονοπάτι ανάμεσα σε κάθε ζεύγος κορυφών του είναι δένδρο.

E.B. Έστω γράφημα T με $|V(T)| = k$.

- Έστω ένα μεγιστοτικό (u, v)-μονοπάτι $P(u, v)$ του T.
- Κάθε γείτονας του $u \in P(u, v)$, διαφορετικά το $P(u, v)$ δεν είναι μεγιστοτικό.
- Έστω ότι $d(u) \geq 2$. Τότε, $\exists$ τουλάχιστον $d(u)$ (u, v)-μονοπάτια.



Άτοπο γιατί το (u, v)-μονοπάτι είναι μοναδικό.

$\Rightarrow d(u) = 1$. [Όμοια $d(v) = 1$.]

[Μόλις είδαμε μια εναλλακτική απόδειξη για το Λήμμα 5.2]

- Έστω w ο γείτονας της u στο γράφημα T.
- Η διαγραφή του u από το T δεν επηρεάζει τα υπόλοιπα μονοπάτια του T.
- $T \setminus \{u\}$ είναι δένδρο. [Από Ε.Υ.]
- Στο $T \setminus \{u\}$ η προσθήκη της κορυφής u και της ακμής (w, u) δεν δημιουργεί κύκλο, ενώ, το νέο γράφημα είναι το T.
- Το T δεν έχει κύκλο. $\xRightarrow{\text{Το } T \text{ είναι συνεκτικό.}}$ Το T είναι δένδρο. ✓ ■

Θεώρημα 5.4 ***[Χαρακτηρισμός των δένδρων]*:**

Έστω ένα γράφημα T με $|V(T)| \geq 2$. Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

i. Το T είναι συνεκτικό και χωρίς κύκλους.
[Ο ορισμός του δένδρου.]

ii. Το T είναι συνεκτικό και $|E(T)| = |V(T)| - 1$.

iii. Το T δεν έχει κύκλους και $|E(T)| = |V(T)| - 1$.

iv. Για κάθε ζεύγος κορυφών $u, v \in V(T)$ $\exists$ ακριβώς 1 (u, v)-μονοπάτι.

v. Το T είναι συνεκτικό και κάθε ακμή του είναι γέφυρα.

Απόδειξη [Να λυθεί σαν άσκηση]:

Σημείωση: Η ισοδυναμία $i. \Leftrightarrow iv.$ είναι το Θεώρημα 5.3.

Θεώρημα 5.5 :

Έστω γράφημα G με $|V(G)| \geq 1$. Τότε το G περιέχει ως υπογράφημά του κάθε δένδρο T με $k \leq \delta(G)$ ακμές.

Απόδειξη [Με επαγωγή ως προς το k, δηλ., το μέγεθος του δένδρου .]:

Βάση $k = 0$: Το δένδρο αποτελείται από 1 κορυφή.

Το T είναι υπογράφημα του G. ✓

Ε.Υ. Έστω ότι $\forall\, 0 \leq k' < k$ κάθε δένδρο με k' ακμές είναι υπογράφημα κάθε γραφήματος G με $\delta(G) \geq k$ $[> k']$.

Ε.Β. Θα δείξουμε ότι το αυθαίρετο δένδρο με $k' + 1$ ακμές είναι υπογράφημα κάθε γραφήματος G με $\delta(G) \geq k$ $[\geq k' + 1]$.

- Έστω αυθαίρετο δένδρο T με $k' + 1$ ακμές.
- Έστω αυθαίρετο γράφημα G με $\delta(G) \geq k' + 1$.
- $k' \geq 0 \Rightarrow k' + 1 \geq 1 \Rightarrow$ Το T έχει ≥ 1 ακμές. $\Rightarrow$ Το T έχει τουλάχιστον 2 φύλλα.
- Έστω u ένα φύλλο του T και w η γειτονική κορυφή του.
- Έστω το $T' = T \setminus \{u\}$. Το T' είναι δένδρο με k' ακμές και $|V(T')| = k' + 1$.

$$\boxed{d_{T'}(w) \leq k' \qquad (3)}$$

- $\delta(G) \geq k' + 1 > k' \overset{\text{Ε.Υ.}}{\Longrightarrow}$ Το T' είναι υπογράφημα του G.
- Έστω w_G η κορυφή του G στην οποία αντιστοιχεί ο κόμβος w του $T' = T \setminus \{u\}$.
- $\delta(G) \geq k' + 1 \Rightarrow d_G(w_G) \geq k' + 1$.

$\Rightarrow$ Υπάρχει μια κορυφή γειτονική της w_G στο G στην οποία δεν έχει αντιστοιχηθεί καμία γειτονική του w στο T'.

- Έστω u_G η κορυφή αυτή.
- Επεκτείνουμε την αντιστοίχιση του $T \setminus \{u\}$ στο G αντιστοιχίζοντας την κορυφή $u \in V(T)$ στην $u_G \in V(G)$.
- Άρα, το T είναι υπογράφημα του G. ✓ ■

Σκελετικά δένδρα

Σκελετικό δένδρο [Spanning Tree]:

Έστω γράφημα G. Ένα παραγόμενο υπογράφημα T του G το οποίο είναι δένδρο ονομάζεται **σκελετικό δένδρο** του G.

Σημείωση: Ένα παραγόμενο υπογράφημα του G δημιουργείται με την διαγραφή ακμών από το G.

Δένδρο με ετικέτες:

Δένδρο T όπου σε κάθε κορυφή $u \in V(T)$ έχει αντιστοιχηθεί διακριτός ακέραιος από το σύνολο $\{1, 2, \ldots, |V(T)|\}$. Έστω $\ell : v(T) \to \{1, 2, \ldots, |V(T)|\}$ η συνάρτηση που αντιστοιχίζει ετικέτες στις κορυφές του T.

- Η ℓ είναι $1 - 1$ και επί.
- Ένα δένδρο T με συνάρτηση "ετικετών" ℓ συμβολίζεται με $< T, \ell >$.

Ισομορφισμός δένδρου με ετικέτες:

Δύο δένδρα $< T_1, \ell_1 >$ και $< T_2, \ell_2 >$ είναι **ισόμορφα** αν υπάρχει ισομορφισμός $\sigma : T_1 \to T_2$ τέτοιος ώστε:

$$\forall (u, v) \in E(T_1)\ (\sigma(u), \sigma(v)) \in E(T_2) \text{ and } \forall v \in V(T_1)\ \ell_1(v) = \ell_2(\sigma(v))$$

Ακολουθία Prüfer:

Μία ακολουθία $n-2$ όρων από τους φυσικούς αριθμούς $\{1, 2, \ldots, n\}$ ονομάζεται **ακολουθία Prüfer τάξης n.**

Παράδειγμα: Η $< 5, 4, 4, 2, 2, 3, 7 >$ είναι μια ακολουθία Prüfer βαθμού 9.

Θεώρημα 5.6 *[Cayley]*:

Ο αριθμός των διαφορετικών δένδρων με ετικέτες είναι n^{n-2} όπου n ο αριθμός των κορυφών του δένδρου.

Απόδειξη :

- Έστω $\mathcal{T}_n$ το σύνολο των δένδρων με ετικέτες τα οποία έχουν n κορυφές.
- Έστω $\mathcal{W}_n$ το σύνολο των ακολουθιών Prüfer τάξης n.
- Θα κατασκευάσουμε μια αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση $\phi : \mathcal{T}_n \to \mathcal{W}_n$.
- Η ϕ ονομάζεται κώδικας Prüfer.
- Ισχύει ότι: $|\mathcal{W}_n| = n^{n-2}$.

Αναδρομικός ορισμός του κώδικα Prüfer $\phi : \mathcal{T}_n \to \mathcal{W}_n$ [ως προς το n].

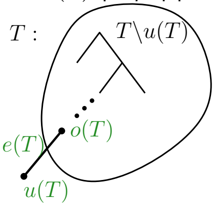
- Υποθέτουμε ότι οι κορυφές του V έχουν ονόματα/ετικέτες στο σύνολο $\{1, \ldots, n\}$.

Βάση: $n = 2$: $\exists$ μοναδικό δένδρο T 

- Ορίζουμε $\phi(T) = \epsilon$. [Η κενή λέξη.]
- $n^{n-2} = 2^0 = 1$, $|\mathcal{W}_2| = |\{\epsilon\}| = 1$. ✓

Αναδρομικός ορισμός:

- Έστω $u(T)$ το φύλλο του T με την μικρότερη ετικέτα.
- Έστω $e(T)$ η ακμή του T που προσπίπτει στη $u(T)$.
- Έστω $o(T)$ η κορυφή στο άλλο άκρο της $e(T)$.

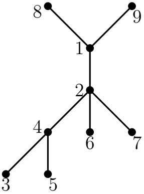


- Το $T \backslash u(T)$ έχει $n - 1$ κορυφές.
- $\phi(T) = < o(T),\ \phi(T \backslash u(T)) >$

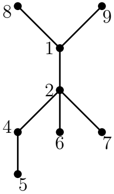
- Πρέπει να δείξουμε ότι όντως έχουμε ορίσει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία.

Παράδειγμα:

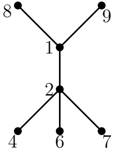
T^0



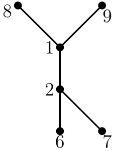
$T^1 = T^0 \setminus \{3\}$



$T^2 = T^1 \setminus \{5\}$



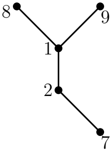
$T^3 = T^2 \setminus \{4\}$



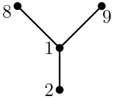
$$< 4, \phi(T^1) > \;\rightarrow\; < 4, \phi(T^2) > \;\rightarrow\; < 2, \phi(T^3) > \;\rightarrow\; < 2, \phi(T^4) > \;\rightarrow \boxed{\mathrm{A}}$$

$$\boxed{< 4, 4, 2, 2, 2, 1, 1 >} \leftarrow < 4, 2, 2, 2, 1, 1 > \leftarrow < 2, 2, 2, 1, 1 > \leftarrow < 2, 2, 1, 1 > \leftarrow \boxed{\mathrm{B}}$$

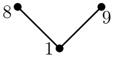
$T^4 = T^3 \setminus \{6\}$



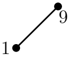
$T^5 = T^4 \setminus \{7\}$



$T^6 = T^5 \setminus \{2\}$



$T^7 = T^6 \setminus \{8\}$



$$\boxed{\mathrm{A}} \rightarrow < 2, \phi(T^5) > \;\rightarrow\; < 1, \phi(T^6) > \;\rightarrow\; < 1, \phi(T^7) > \;\rightarrow\; \epsilon$$

$$\boxed{\mathrm{B}} \leftarrow < 2, 1, 1 > \;\leftarrow\; < 1, 1 > \;\leftarrow\; < 1 > \;\leftarrow$$

Λήμμα 5.7:

Για οποιοδήποτε δένδρο T η κορυφή u είναι φύλλο ανν η u δεν εμφανίζεται στον κωδικό $\phi(T)$.

Απόδειξη :

"$\Rightarrow$" Έστω ότι η u είναι φύλλο και έστω ότι εμφανίζεται στον κωδικό $\phi(T)$.

- Η u προστέθηκε στο $\phi(T)$ κατά την διάρκεια της κατασκευής του.
- $\Rightarrow$Η u ήταν γειτονική προς το ελάχιστο φύλλο $u(H)$ του υποδένδρου H [του βήματος στο οποίο προστέθηκε] το οποίο είχε μέγεθος > 2 [διαφορετικά δεν θα είχε προστεθεί καμία κορυφή].
- $\Rightarrow$Η u δεν είναι φύλλο στο υποδένδρο H.
- Αλλά, η u είναι φύλλο στο T, άρα είναι φύλλο και στο H. **Άτοπο.** ✓

"$\Leftarrow$" Έστω ότι η u δεν εμφανίζεται στο $\phi(T)$ και έστω ότι η u δεν είναι φύλλο του T.

- Η u δεν είναι φύλλο $\Rightarrow d(u) \geq 2 \Rightarrow \exists$ τουλάχιστον 2 προσπίπτουσες στην u ακμές.
- $\Rightarrow \exists$ μια ακμή που προσπίπτει στην u και το άλλο άκρο της αφαιρείται (ως φύλλο) κατά την κατασκευή του $\phi(T)$.
- Τότε από κατασκευή η u εμφανίζεται στο $\phi(T)$. **Άτοπο.** ✓ ■Λήμμα

Λήμμα 5.8:

Ο κώδικας Prüfer $\phi : \mathcal{T}_n \to \mathcal{W}_n$ είναι αμφιμονοσήματνη αντιστοιχία.

Απόδειξη [Με επαγωγή ως προς το πλήθος n των κορυφών του δένδρου.]:

Βάση: $n = 2$: Αντιστοιχίζει το μοναδικό δένδρο T με $|V(T)| = 2$ στην κενή λέξη ϵ. ✓

Ε.Υ. Έστω ότι η ακολουθία Prüfer $\phi : \mathcal{T}_{n'} \to \mathcal{W}_{n'}$ για κάθε $n' < n$, $n \geq 3$, είναι αμφιμονοσήμαντη.

Ε.Β. Θα δείξουμε ότι η $\phi : \mathcal{T}_n \to \mathcal{W}_n$ είναι αμφιμονοσήμαντη.

[Αμφιμονοσήμαντη: $1-1$ και επί.]

$1-1$:

- Έστω δεν είναι $1-1$. $\Rightarrow \exists$ διαφορετικά $T^1, T^2 \in \mathcal{T}_n : \phi(T^1) = \phi(T^2)$.
- Έστω u το ελάχιστο στοιχείο του $\{1, 2, \ldots, n\}$ το οποίο δεν εμφανίζεται στον $\phi(T^1)$.

$\Rightarrow$ Το u είναι το ελάχιστο φύλλο των T^1 και T^2.

- Έστω v είναι το πρώτο στοιχείο της $\phi(T^1)$.

$\Rightarrow$ Η ακμή $e = (u, v)$ ανήκει στο T^1 και το T^2.

- Ορίζουμε τα $T^{1'} = T^1 \setminus \{u\}$, $T^{2'} = T^2 \setminus \{u\}$.
- Από τον ορισμό Prüfer: $\phi(T^{1'}) = \phi(T^{2'})$.
- Από Ε.Υ., $T^{1'} = T^{2'}$.
- Από κατασκευή των $T^{1'}, T^{2'} \Rightarrow T^1 = T^2$. **Άτοπο.** ✓

Επί:

- Έστω μια αυθαίρετη ακολουθία Prüfer $W =< w_1, w_2, \ldots, w_{n-2} > \in \mathcal{W}_n$.
- Έστω u είναι το ελάχιστο στοιχείο που δεν εμφανίζεται στην ακολουθία.
- Από Ε.Υ. $\Rightarrow \exists$ δένδρο T' με σύνολο κορυφών το $V(T) \setminus \{u\}$:
  $\phi(T') =< w_2, w_3, \ldots, w_{n-2} >$.

[Δείτε το σχόλιο που ακολουθεί.]

- Προσθέτοντας την ακμή $e = (u, w_1)$ στο T' σχηματίζουμε το δένδρο T με
  $\phi(T) =< w_1, \phi(T') >=< w_1, w_2, \ldots, w_{n-2} >$. ✓ ■Λήμμα

■Θεώρημα Cayley

Σχόλιο: Η αυστηρή εφαρμογή της Ε.Υ. δίνει μία ακολουθία από τους αριθμούς $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ και, επομένως, εάν ένα από τα στοιχεία $w_2, w_3, \ldots, w_{n-2}$ είναι ίσο με το n, δεν μπορούμε από την Ε.Υ. να υποθέσουμε οτι παίρνουμε το δένδρο δένδρο T' με ακολουθία $\phi(T') =< w_2, w_3, \ldots, w_{n-2} >$. Σε μία λιγότερη αυστηρή εφαρμογή της Ε.Υ., η ακολουθία Prüfer τάξης n μπορεί να θεωρηθεί ως μία ακολουθία από $n-2$ διακριτούς αριθμούς. Στην περίπτωση αυτή, οι αριθμοί μπορεί να τεθούν σε 1-1 αντιστοιχία με τους ακεραίους στο σύνολο $\{1, 2, \ldots, n\}$ με βάση την διάταξή τους.