Θεωρία Γραφημάτων
4η Διάλεξη

Α. Συμβώνης

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
Τομέας Μαθηματικών

Φεβρουάριος 2022

Συνεκτικότητα

Συνεκτικό γράφημα:

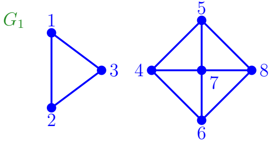
Ένα γράφημα G ονομάζεται ***συνεκτικό*** αν κάθε ζεύγος κορυφών του $u, v \in V(G)$ ενώνεται με ένα μονοπάτι.

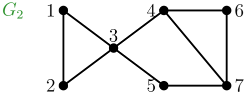
Συνεκτική συνιστώσα:

Μια ***συνεκτική συνιστώσα*** ενός γραφήματος G είναι ένα μεγιστοτικό επαγόμενο υπογράφημα του G το οποίο είναι συνεκτικό.

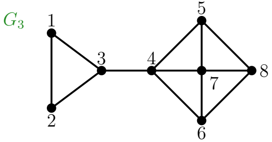
Διαχωριστής (Separator, cut-set):

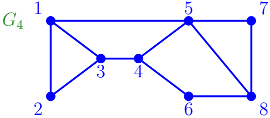
Έστω ένα συνεκτικό γράφημα G και έστω σύνολο $S \subset V(G)$. Το σύνολο S είναι ένας ***διαχωριστής*** του G αν το γράφημα $G \backslash S$ δεν είναι συνεκτικό.





$S_1 = \{3\}$ $S_2 = \{4, 7\}$ $S_3 = \{4, 5\}$





$S_1 = \{3\}$ $S_2 = \{4\}$
$S_3 = \{4, 5, 6, 8\}$

$S_1 = \{4, 5\}$ $S_2 = \{1, 3\}$ $S_3 = \{5, 8\}$
$S_4 = \{5, 6\}$ $S_5 = \{4, 8\}$

Ελαχιστοτικός διαχωριστής [minimal separator]:

Ένας διαχωριστής S του G ονομάζεται ***ελαχιστοτικός*** αν κανένα υποσύνολό του δεν είναι επίσης διαχωριστής του G.

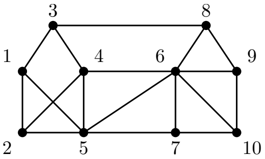
Ελάχιστος διαχωριστής [minimum separator]:

Ένας διαχωριστής S του G ονομάζεται ***ελάχιστος*** αν δεν υπάρχει άλλος διαχωριστής του G με μικρότερο μέγεθος.

(u, v)-διαχωριστής:

Ένας διαχωριστής S του G τέτοιος ώστε οι κορυφές $u, v \in V(G) \setminus S$ να ανήκουν σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του $G \setminus S$.

- Ελαχιστοτικός (u, v)-διαχωριστής.
- Ελάχιστος (u, v)-διαχωριστής.



Ελαχιστοτικοί διαχωριστές:

$\underbrace{S_1 = \{1,4,5\}}$ $\underbrace{S_2 = \{6,7,8\}}$ $S_3 = \{1,4,6,9\}$

↑ ↑

Ελάχιστοι διαχωριστές

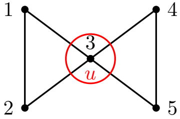
$(1,9)$-διαχωριστές: $\{3,4,5\}$, $\{3,4,6,7\}$, $\{4,5,8\}$, $\{3,4,6,10\}$

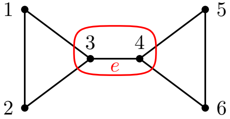
Κορυφή τομής:

Κορυφή $u \in V(G)$: $G \backslash u$ έχει περισσότερες συνεκτικές συνιστώσες από το G.

Γέφυρα:

Ακμή $e \in E(G)$: $G \backslash e$ έχει περισσότερες συνεκτικές συνιστώσες από το G.





Συνεκτικότητα:

Η ***συνεκτικότητα*** $k(G)$ ενός γραφήματος G ορίζεται ως το μέγεθος ενός ελάχιστου διαχωριστή του.

- Απαιτείται η αφαίρεση $k(G)$ κορυφών από το G ώστε να καταστεί μη-συνεκτικό.

k-συνεκτικό γράφημα:

Ένα γράφημα G ονομάζεται ***k-συνεκτικό*** ($k \in \mathbb{N}$) εάν $|V(G)| \geq k+1$ και για κάθε $X \subset V(G)$ με $|X| < k$ ισχύει ότι το $G \setminus X$ είναι συνεκτικό.

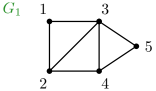
- Η αφαίρεση $k-1$ κορυφών δεν αρκούν για να το διαχωρήσουν.
- Ένα k-συνεκτικό γραφημα G έχει συνεκτικότητα $k(G) \geq k$, δηλαδή, ο ελάχιστος διαχωριστής του έχει μέγεθος τουλάχιστον k.

Πόρισμα 4.1:

Το γράφημα G είναι k-συνεκτικό $\implies$ Το G είναι $(k-1)$-συνεκτικό.

2-συνεκτικό γράφημα:

Γράφημα με ελάχιστο διαχωριστή μεγέθους τουλάχιστον 2.

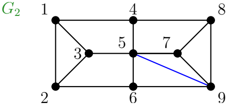


$S_1 = \{2, 3\}$
$S_2 = \{3, 4\}$

Ιδιότητα: Δεν έχει κορυφές-τομής.

3-συνεκτικό γράφημα:

Γράφημα με ελάχιστο διαχωριστή μεγέθους τουλάχιστον 3.



$S_1 = \{4, 5, 6\}$
$S_2 = \{2, 3, 4\}$
$S_3 = \dots$

κρίσιμη ακμή:

Μια ακμή $e \in E(G)$ ονομάζεται ***κρίσιμη*** αν $k(G \backslash e) = k(G) - 1$.

- Κρίσιμες ακμές του G_2: όλες εκτός της $(5, 9)$.

Θεώρημα 4.2 :

Ένα γράφημα G είναι συνεκτικό ανν περιέχει περίπατο που περνάει από όλες τις κορυφές του.

Απόδειξη :

``$\Leftarrow$''

- Προφανές από τον ορισμό του συνεκτικού γραφήματος και το γεγονός ότι ``αν υπάρχει ένας (u, v)-περίπατος τότε υπάρχει και ένα (u, v)- μονοπάτι". ✓

``$\Rightarrow$''

- Έστω μια αυθαίρετη διάταξη $[u_1, u_2, \ldots, u_n]$ των κορυφών του G.
- Το G είναι συνεκτικό $\xRightarrow{\text{ορισμός}}$ $\forall u_i, u_{i+1} \exists$ μονοπάτι P_i από την u_i στην u_{i+1}, $1 \leq i < n$.
- Η παράθεση των μονοπατιών $P_1 P_2 \ldots P_{n-1}$ ορίζει περίπατο που περνά από όλες τις κορυφές του G. ✓ ■

Θεώρημα 4.3 :

Για κάθε γράφημα G ισχύει ότι είτε το G είναι συνεκτικό ή το $\overline{G}$ είναι συνεκτικό.

Απόδειξη *[Με επαγωγή στον αριθμό κορυφών του G.] :*

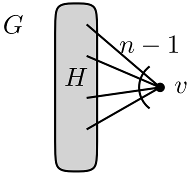
Βάση: $|V(G)| = 2$ Το K_2 [•——•] είναι συνεκτικό ενώ
το $\overline{K_2}$ [•   •] δεν είναι.
Αυτά είναι τα μόνα γραφήματα 2 κορυφών. ✓

Ε.Υ. Έστω ότι για όλα τα γραφήματα H με $|V(H)| < n$ ισχύει ότι είτε το H είναι συνεκτικό ή το $\overline{H}$ είναι συνεκτικό.

Ε.Β. Έστω γράφημα G με $|V(G)| = n$ και κορυφή $v \in V(G)$.

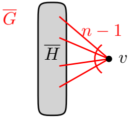
- $H = G \backslash v$: H συνεκτικό ή $\overline{H}$ συνεκτικό.

Περίπτωση 1: Η v είναι καθολική κορυφή.
$\Rightarrow$ G συνεκτικό. ✓



Περίπτωση 2: Η v είναι απομονωμένη κορυφή.

$\Rightarrow$ στο $\overline{G}$ η v είναι καθολική κορυφή.
$\Rightarrow$ $\overline{G}$ συνεκτικό. ✓

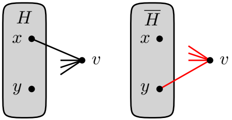


Περίπτωση 3: Η v δεν είναι ούτε καθολική ούτε απομονωμένη κορυφή.

- $\exists x, y \in V(G) : (v, x) \in E(G), (v, y) \notin E(G)$

$$\left.\begin{array}{l} H \text{ συνεκτικό} \\ (v, x) \in E(G) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad G \text{ συνεκτικό.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{H} \text{ συνεκτικό} \\ (v, y) \in E(\overline{G}) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \overline{G} \text{ συνεκτικό.} \quad ✓$$



∎

Θεώρημα 4.4 :

Έστω H μια συνεκτική συνιστώσα του γραφήματος G. Τότε ισχύει ότι:

i. $\delta(H) \geq \delta(G)$

ii. $\Delta(H) \leq \Delta(G)$

Απόδειξη :

i. $\delta(H) \geq \delta(G)$
- Έστω $\delta(H) < \delta(G)$.
- $\exists v \in V(G) : d_G(v) = \delta(G)$ και για κάθε άλλη κορυφή

$$\boxed{w \in V(G) : d_G(v) \leq d_G(w) \qquad (1)}$$

- $\exists x \in V(H) : d_H(x) = \delta(H)$ και για κάθε άλλη κορυφή $y \in V(H) : d_H(x) \leq d_H(y) \Rightarrow$

[Ο βαθμός κάθε κορυφής στο H είναι ίσος με τον βαθμό της στο G.]

$$\boxed{y \in V(H) : d_G(x) \leq d_G(y) \qquad (2)}$$

(1),(2) $\Rightarrow d_G(v) \leq d_G(x)$
$\Leftrightarrow \delta(G) \leq \delta(H)$ ***Άτοπο.*** ✓

ii. Όμοια. ✓

Θεώρημα 4.5 :

Κάθε απλό γράφημα G με $\delta(G) \geq \frac{|V(G)|}{2}$ είναι συνεκτικό.

Απόδειξη :

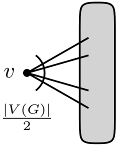
- Έστω ότι δεν είναι συνεκτικό.
- Έστω H η μικρότερη συνιστώσα του G.

$$\boxed{|V(H)| \leq \frac{|V(G)|}{2} \qquad (3)}$$

[Αλλιώς, το G θα είχε $> |V(G)|$ κορυφές.]

- $\delta(G) \geq \frac{|V(G)|}{2} \Rightarrow$ Κάθε συνιστώσα έχει μέγεθος $\geq \frac{|V(G)|}{2} + 1$

$$\boxed{\Rightarrow |V(H)| \geq \frac{|V(G)|}{2} + 1 \qquad (4)}$$



(3),(4) $\Rightarrow$ ***Άτοπο.*** ■

Ερώτηση 4.1: Ποια η διάμετρος του γραφήματος G με $\delta(G) \geq \frac{|V(G)|}{2}$;

Θεώρημα 4.6 :

Έστω απλό συνεκτικό γράφημα G. Τότε $|E(G)| \geq |V(G)| - 1$.

Απόδειξη *[Με επαγωγή ως προς το μέγεθος του $|V(G)|$.] :*

Βάση: $|V(G)| = 2$  $|E(G)| = |V(G)| - 1$ ✓

Ε.Υ. Για κάθε απλό συνεκτικό γράφημα G με $|V(G)| < n$ ισχύει: $|E(G)| \geq |V(G)| - 1$

Ε.Β. Έστω G με $|V(G)| = n$.

Περίπτωση 1: $\delta(G) \geq 2$

$$2|E(G)| = \sum_{u \in V(G)} d(u) \geq \sum_{u \in V(G)} \delta(G) \geq 2|V(G)| \Leftrightarrow$$

$$2|E(G)| \geq 2|V(G)| \Leftrightarrow |E(G)| \geq |V(G)| \quad ✓$$

Περίπτωση 2: $\delta(G) = 1$ [$\delta(G) \neq 0$ γιατί το G είναι συνεκτικό.]

- Έστω $v \in V(G)$ κορυφή με βαθμό $d(v) = 1$.
- $G \backslash v$ συνεκτικό γιατί η v δεν είναι κορυφή τομής.
- $|E(G \backslash v)| \geq |V(G \backslash v)| - 1$ [από Ε.Υ.]

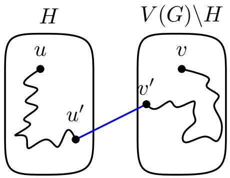
$|E(G)| - 1 \geq |V(G)| - 1 - 1 \Rightarrow |E(G)| \geq |V(G)| - 1$ ✓ ∎

Θεώρημα 4.7 :

Ένα γράφημα G είναι συνεκτικό ανν για κάθε σύνολο $H \subset V(G)$ υπάρχει τουλάχιστον μια ακμή $e \in E(G)$ με το ένα άκρο της στο H και το άλλο στο $V(G) \setminus H$.

Απόδειξη :

"$\Rightarrow$"



- Έστω $u \in H$ και $v \in V(G) \setminus H$.
- G συνεκτικό $\Rightarrow \exists$ μονοπάτι από $u \to v$.
- u' η τελευταία κορυφή του μονοπατιού στο H.
  v' η πρώτη κορυφή του μονοπατιού στο $V(G) \setminus H$.
- Η ακμή $(u'v')$ ικανοποιεί το θεώρημα. ✓

"$\Leftarrow$" [Με άτοπο.]

Έστω το G δεν είναι συνεκτικό.

- Έστω H μια συνεκτική συνιστώσα.
- Δεν υπάρχουν ακμές του G με το ένα μόνο άκρο τους στην H.

[Η συνεκτική συνιστώσα είναι μεγιστοτικό συνεκτικό υπογράφημα του G.]

Άτοπο. ✓

Θεώρημα 4.8 :

Μια ακμή e είναι γέφυρα ενός γραφήματος G ανν δεν ανήκει σε κάποιο κύκλο του G.

Απόδειξη :

• Έστω H η συνεκτική συνιστώσα του G στην οποία ανήκει η e. Αρκεί να δείξουμε ότι το θεώρημα ισχύει για την H.

``$\Leftarrow$'' Έστω η $e = (u, v)$ δεν είναι γέφυρα.

$\Rightarrow$ Το $H \backslash e$ είναι συνεκτικό.
$\Rightarrow$ Στο $H \backslash e$ υπάρχει (u, v)-μονοπάτι P.
$\Rightarrow$ Η παράθεση του P με την $e = (u, v)$ δημιουργεί κύκλο.
$\Rightarrow$ Η e ανήκει σε κύκλο του H. ***Άτοπο.*** ✓

``$\Rightarrow$'' Έστω η $e = (u, v)$ ανήκει σε κάποιο κύκλο του H.

$\Rightarrow$ Στο H υπάρχει (u, v)-μονοπάτι P^H_{uv}.
• Θα δείξουμε ότι το $H \backslash e$ είναι συνεκτικό. [Δηλ., η e δεν είναι γέφυρα.].
Αυτό οδηγεί σε άτοπο.
• Έστω $x, y \in V(H)$. Στο H υπάρχει (x, y)-μονοπάτι P^H_{xy} γιατί το H είναι συνεκτικό.

Περίπτωση 1: $e \notin P^H_{xy}$

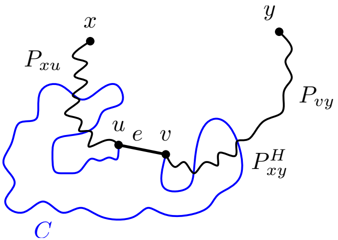
- Τότε, το P^H_{xy} είναι επίσης μονοπάτι του $H \backslash e$.

$\Rightarrow$ $H \backslash e$ συνεκτικό $\Rightarrow$ Η e δεν είναι γέφυρα. ***Άτοπο.*** ✓

Περίπτωση 2: $e \in P^H_{xy}$

Τότε, ορίζονται τα:

- (x, u)-μονοπάτι P^H_{xu}
- (v, y)-μονοπάτι P^H_{vy}



- Το ότι η $e = (u, v)$ ανήκει σε κάποιο κύκλο του H σημαίνει ότι υπάρχει (u, v)-μονοπάτι P^H_{uv} στο H.
- Η παράθεση των μονοπατιών $P^H_{xu}P^H_{uv}P^H_{vy}$ σημαίνει ότι υπάρχει (x, y)-περίπατος και, συνεπώς, (x, y)-μονοπάτι P^H_{xy} στο H το οποίο δεν περιέχει την e.
- Το P^H_{xy} είναι μονοπάτι και του $H \backslash e$.

$\Rightarrow$ Η e δεν είναι γέφυρα. ***Άτοπο.*** ✓ ■

Θεώρημα 4.9 :

Ένα συνεκτικό γράφημα G περιέχει τουλάχιστον 2 κορυφές οι οποίες δεν είναι κορυφές-τομής.

Απόδειξη :

- Έστω ένα αυθαίρετο μεγιστοτικό (u, v)-μονοπάτι P_{uv}.
- Το P_{uv} δεν μπορεί να επεκταθεί.

$\Rightarrow$ Οι γείτονες των u, v ανήκουν στο P_{uv}.

- Όλοι οι γείτονες των u, v ανήκουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα.
- $G \setminus \{u, v\}$ συνεκτικό.

$\Rightarrow$ Οι u, v δεν είναι κορυφές-τομής. ✓ ■

Ερώτηση 4.2: Να δειχθεί ότι εάν το γράφημα G έχει k συνεκτικές συνιστώσες τότε $K_k \subseteq \overline{G}$.

Ερώτηση 4.3: Να δειχθεί ότι κάθε 2 μέγιστα μονοπάτια ενός συνεκτικού γραφήματος έχουν κάποια κοινή κορυφή.

Ερώτηση 4.4: Να δειχθεί ότι για κάθε συνεκτικό γράφημα G με n κορυφές, υπάρχει μια απαρίθμηση $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ των κορυφών του τέτοια ώστε το επαγόμενο υπογράφημα G_i από τις κορυφές $\{v_1, \ldots, v_i\}$ $1 \leq i \leq n$ να είναι συνεκτικό.

Ερώτηση 4.5: Να δειχθεί ότι για κάθε γράφημα G με k συνεκτικές συνιστώσες ισχύει $|E(G)| \geq |V(G)| - k$.

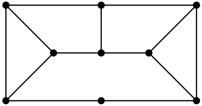
Δισυνεκτικότητα

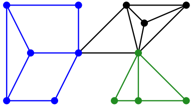
Δισυνεκτικό (2-συνεκτικό) γράφημα:

Ένα γράφημα G με $|V(G)| \geq 3$ ονομάζεται ***δισυνεκτικό*** αν όλοι οι διαχωριστές του έχουν μέγεθος ≥ 2.

Δισυνεκτική συνιστώσα (biconnected component - block):

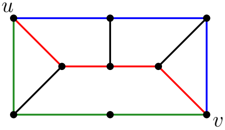
Ένα μεγιστοτικό δισυνεκτικό υπογράφημα ενός γραφήματος G ονομάζεται ***δισυνεκτική συνιστώσα*** του G.





Εσωτερικώς διακεκριμένα μονοπάτια:

Έστω $k \geq 2$ μονοπάτια ενός γραφήματος G. Τα μονοτάτια αυτά ονομάζονται ***εσωτερικώς διακεκριμένα*** εάν τα σύνολα των εσωτερικών κορυφών τους είναι διακεκριμένα, δηλαδή, ανά δύο ξένα μεταξύ τους.



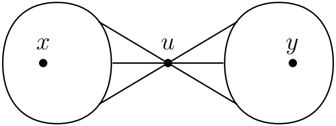
3 εσωτερικώς διακεκριμένα (u, v)-μονοπάτια.

Θεώρημα 4.10 :

Έστω ένα απλό συνδεδεμένο γράφημα G με $|V(G)| \geq 3$. Το G είναι δισυνεκτικό ανν κάθε ζεύγος κορυφών του συνδέεται με 2 εσωτερικώς διακεκριμένα μονοπάτια.

Απόδειξη :
``$\Leftarrow$'' [Με άτοπο.]

- Έστω το G δεν είναι δισυνεκτικό, δηλαδή έχει κορυφή τομής u και έστω x, y δύο κορυφές σε δύο διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του $G \setminus u$.



- Όλα τα μονοπάτια από την x προς την y περνούν από την u.
- Το G δεν περιέχει 2 εσωτερικώς διακεκριμένα (x, y)-μονοπάτια. ***Άτοπο.***

Άρα, το G είναι δισυνεκτικό. ✓

"$\Rightarrow$"

- Έστω G δισυνεκτικό γράφημα και $x, y \in V(G)$.
- Θα δείξουμε, με επαγωγή ως προς την ποσότητα $\text{dist}(x, y)$, ότι $\exists$ 2 εσωτερικώς διακεκριμένα (x, y)-μονοπάτια.

Βάση: $\text{dist}(x, y) = 1$

- $e = (x, y) \in E(G)$
- $G \backslash e$ είναι συνεκτικό

Απόδειξη:
- $d_G(x) > 1, d_G(y) > 1$

[Αν $d_G(x) = 1$ τότε το y είναι διαχωριστής τους G.
$\Rightarrow$ G δεν είναι δισυνεκτικό. Άτοπο.]
- $G \backslash \{x\}$ είναι συνεκτικό.

[Διαφορετικά το $\{x\}$ θα ήταν διαχωριστής του G.
$\Rightarrow$ G δεν είναι δισυνεκτικό. Άτοπο.]
- $G \backslash e$ είναι συνεκτικό.

[Γιατί $G \backslash \{x\} \subset G \backslash e$.]

- $\exists$ (x, y)-μονοπάτι P στο $G \backslash e$.
- $\exists$ 2 εσωτερικώς διακειριμένα μονοπάτια στο G [το P και η e]. ✓

E.Y. Έστω ότι για κάθε $x, y \in V(G) : \mathrm{dist}(x, y) < k$ ισχύει ότι $\exists$ 2 εσωτερικώς διακεκριμένα (x, y)-μονοπάτια.

E.B. Έστω $x, y \in V(G) : \mathrm{dist}(x, y) = k \geq 2$.

- G συνεκτικό $\Rightarrow \exists$ (x, y)-μονοπάτι στο G. Έστω w προτελευταία κορυφή του.
- Από E.Y. $\Rightarrow \exists$ 2 εσωτερικώς διακεκριμένα (x, w)-μονοπάτια $P_1(x, w)$ και $P_2(x, w)$.

Περίπτωση 1: $y \in P_1(x, w)$ [ή $y \in P_2(x, w)$]

$\Rightarrow$ Τα μονοπάτια $P_1(x, y)$ και $P_2(x, w) \cdot (w, y)$ είναι τα ζητούμενα. ✓

Περίπτωση 2: $y \notin P_1(x, w)$ και $y \notin P_2(x, w)$

- Έστω $R(x, y)$ ένα (x, y)-μονοπάτι που δεν περιέχει την w.

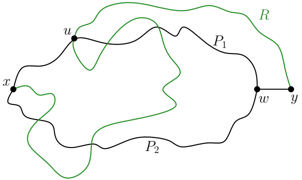
[Υπάρχει γιατί $G \backslash w$ είναι συνεκτικό.]

Περίπτωση 2α: Το $R(x, y)$ δεν έχει κοινές κορυφές με τα $P_1(x, w)$, $P_2(x, w)$.

- Τα $R(x, y)$ και $P_1(x, w) \cdot (w, y)$ είναι τα ζητούμενα 2 εσωτερικώς διακεκριμένα (x, y)-μονοπάτια. ✓

Περίπτωση 2β: Το $R(x, y)$ έχει κοινές κορυφές με τα $P_1(x, w)$, $P_2(x, w)$

- Έστω $u \in R(x, y)$ η τελευταία (πηγαίνοντας από το $x \to y$) κοινή κορυφή και έστω $u \in P_1(x, w)$.



- Τα μονοπάτια $P_1(x, u) \cdot R(u, y)$ και $P_2(x, w) \cdot (w, y)$ είναι τα ζητούμενα 2 εσωτερικώς διακεκριμένα (x, y)-μονοπάτια. ✓

Πόρισμα 4.11:

Έστω G ένα δισυνεκτικό γράφημα. Οι παρακάτω πράξεις δεν επηρεάζουν την δισυνεκτικότητα του G:

i. Προσθήκη ακμής.

ii. Διάλυση κορυφής βαθμού 2. [Πρέπει να ισχύει: $|V(G)| \geq 3$.]

iii. Υποδιαίρεση ακμής. [Η ακμή δεν πρέπει να είναι βρόχος.]

Θεώρημα 4.12 :

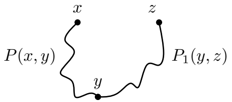
Έστω ένα δισυνεκτικό γράφημα G με $|V(G)| \geq 3$. Τότε, για κάθε $x, y, z \in V(G)$ υπάρχει ένα μονοπάτι από την x προς την z το οποίο διέρχεται από την y.

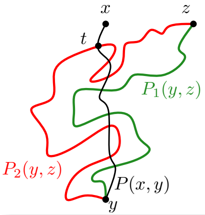
***Απόδειξη** [1ος τρόπος] :*

- G δισυνεκτικό $\Rightarrow$ $\exists$ 2 εσωτερικώς διακεκριμένα μονοπάτια ανάμεσα στην y και την z καθώς και ανάμεσα στην x και την y.
- Έστω $P_1(y, z)$ και $P_2(y, z)$ τα (y, z)-μονοπάτια.
- Έστω $P(x, y)$ ένα (x, y)-μονοπάτι.

Περίπτωση 1: Το $P(x, y)$ και ένα από τα $P_1(y, z)$, $P_2(y, z)$ είναι εσωτερικώς διακεκριμένα.

- Το μονοπάτι $P(x, y) \cdot P_1(y, z)$ είναι το ζητούμενο. ✓





Περίπτωση 2: Το $P(x, y)$ έχει κοινές κορυφές και με τα 2 μονοπάτια.

- Έστω t η τελευταία κοινή κορυφή των $P_1(y, z)$, $P_2(y, z)$ με το $P(x, y)$ και έστω ότι ανήκει στο $P_2(y, z)$.
- Το μονοπάτι $P(x, t) \cdot P_2(t, y) \cdot P_1(y, z)$ είναι το ζητούμενο. ✓ ∎

Απόδειξη *[2ος τρόπος] :*

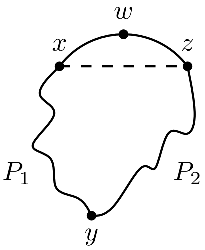
- Έστω το γράφημα G' που προκύπτει από τις πράξεις:

  i. Πρόσθεση της ακμής $e = (x, z)$.

  ii. Υποδιαίρεση της e. Έστω w η νέα κορυφή.

[Εάν $\exists e' = (x, z) \in E(G)$ τότε το G' είναι πολυγράφημα.]

- Από το Πόρισμα 4.11 G' είναι δισυνεκτικό.
- Από το Θεώρημα 4.10 $\exists$ 2 εσωτερικώς διακεκριμένα (y, w)-μονοπάτια $P_1(y, w)$ και $P_2(y, w)$.
- Έστω το $P_1(y, w)$ περνάει από το x και το $P_2(y, w)$ από το z.
- Το μονοπάτι $P_1(x, y) \cdot P_2(y, z)$ είναι το ζητούμενο. ✓ ■



Θεώρημα 4.13 :

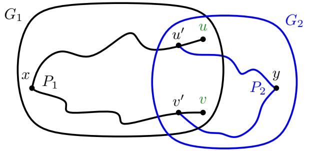
Έστω δισυνεκτικά γραφήματα G_1, G_2 τέτοια ώστε $|V(G_1) \cap V(G_2)| \geq 2$. Τότε το γράφημα $G_1 \cup G_2$ είναι δισυνεκτικό.

Απόδειξη :

- Έστω $u, v \in V(G_1) \cap V(G_2)$.
- Έστω $x, y \in V(G_1 \cup G_2)$.

Αρκεί να δείξω ότι $\exists$ 2 εσωτερικώς διακεκριμένα μονοπάτια ανάμεσα στις κορυφές x, y.

- Εξετάζουμε μόνο την περίπτωση όπου μια κορυφή (έστω η x) ανήκει στο ένα γράφημα (έστω το G_1) και η άλλη (y) στο άλλο (G_2).



- G_1 δισυνεκτικό $\xRightarrow{\Theta.\ 4.12}$ $\exists P_1(u, x, v)$ στο G_1.

Έστω u' [v'] η πρώτη κορυφή του $P_1(x, u)$ [$P_1(x, v)$] που ανήκει στο $V(G_1) \cap V(G_2)$.

- G_2 δισυνεκτικό $\xRightarrow{\Theta.\ 4.12}$ $\exists P_2(u', y, v')$ στο G_2.
- Τα μονοπάτια $P_1(x, u') \cdot P_2(u', y)$ και $P_1(x, v') \cdot P_2(v', y)$ είναι εσωτερικώς διακεκριμένα.

$\Rightarrow$ Το $G_1 \cup G_2$ είναι δισυνεκτικό. $\blacksquare$

Θεώρημα 4.14 :

Έστω 2 δισυνεκτικές συνιστώσες H_1 και H_2 ενός γραφήματος G. Τότε οι H_1 και H_2 έχουν το πολύ μια κοινή κορυφή η οποία πρέπει να είναι κορυφή-τομής.

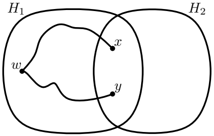
Απόδειξη :

Έστω $V(H_1) \cap V(H_2) \neq \emptyset$. [Διαφορετικά, ισχύει το θεώρημα.]

i. Θα δείξω ότι $|V(H_1) \cap V(H_2)| = 1$.

- Έστω $x, y \in V(H_1) \cap V(H_2)$.
- Έστω $w \in V(H_1) \setminus V(H_2)$.
- H_1 δισυνεκτικό $\Rightarrow \exists P_1(x, w, y)$ στο H_1.
- $H_2 \cup P_1(x, w, y)$ δισυνεκτικό.

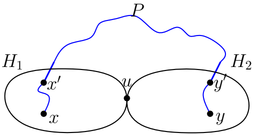
[Μπορεί να δημιουργηθεί από το H_2 με την προσθήκη της ακμής (x, y) και διαδοχικές διαιρέσεις της [Πόρισμα 4.11].]



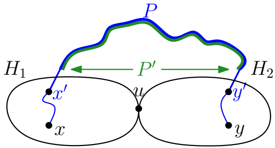
- $H_2 \subset H_2 \cup P_1(x, w, y)$. Άτοπο, γιατί H_2 είναι μεγιστοτικό ως συνεκτική συνιστώσα. ✓

ii. Έστω u η κοινή κορυφή των H_1, H_2. $\Rightarrow$ Η u είναι κορυφή τομής.

- Έστω το $G \setminus u$ είναι συνεκτικό.
- Έστω $x \in H_1$, $y \in H_2$ κορυφές διαφορετικές από την u.
- $\exists$ μονοπάτι P από την x προς την y στο $G \setminus u$.
- $H = H_1 \cup H_2$, $H \setminus u$ ένωση 2 ``ξένων" μεταξύ τους γραφημάτων εκ των οποίων το ένα περιέχει το x και το άλλο το y.



- Το P δεν ανήκει αποκλειστικά στο $H \backslash u$.
- Το P περιέχει ακμές του $E(G) \backslash E(H)$.



- Έστω το γράφημα $H' = H \cup P$.
- Έστω P' ένα μεγιστοτικό υπομονοπάτι του P το οποίο αποτελείται από ακμές που δεν ανήκουν στα H_1, H_2.
- Έστω $x' \in V(H_1)$ και $y' \in V(H_2)$ τα άκρα του P'

- H_1 δισυνεκτικό $\Rightarrow \exists P_1(x', u)$ στο H_1.
- H_2 δισυνεκτικό $\Rightarrow \exists P_2(y', u)$ στο H_2.
- $C = P'(x', y') \cdot P_2(y', u) \cdot P_1(u, x')$ κύκλος. $\Rightarrow$ Το C είναι δισυνεκτικό.
- Το $H_1 \cup H_2 \cup C$ είναι δισυνεκτικό.

[Γιατί, H_1, C δισυνεκτικό και $|V(H_1) \cap V(C)| \geq 2 \xRightarrow{\text{Θ. 4.13}}$ $H_1 \cup C$ δισυνεκτικό $\xRightarrow[\text{όμοια}]{\text{Θ. 4.13}}$ $(H_1 \cup C) \cup H_2$ δισυνεκτικό.]

- Το $H' = H \cup P = H_1 \cup H_2 \cup C$ είναι δισυνεκτικό.
- Αλλά, $H_1 \subset H' = H \cup P$. ***Άτοπο,*** γιατί H_1 είναι μεγιστοτικό συνεκτικό υπογράφημα του G.

$\Rightarrow$ Το $G \backslash u$ δεν είναι συνεκτικό.

$\Rightarrow$ Η u είναι κορυφή-τομής. ✓ ■

Θεώρημα 4.15 :

Ένα γράφημα είναι δισυνεκτικό ανν μπορεί να κατασκευαστει ξεκινώντας από το K_3 και εφαρμόζοντας μια ακολουθία από:

i. υποδιαιρέσεις ακμής,

ii. προσθέσεις ακμής.

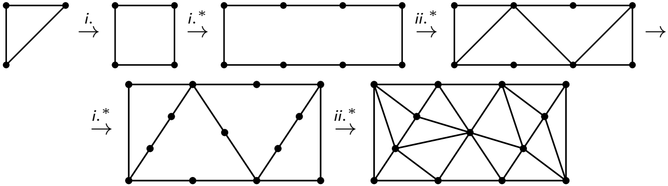
Απόδειξη *:*

``⇐"

- Το K_3 είναι δισυνεκτικό.
- Από Πόρισμα 4.11, η υποδιαίρεση ακμής και η πρόσθεση ακμής διατηρούν την δισυνεκτικότητα. ✓

``⇒" Θα ακολουθήσει… ■

Παράδειγμα:

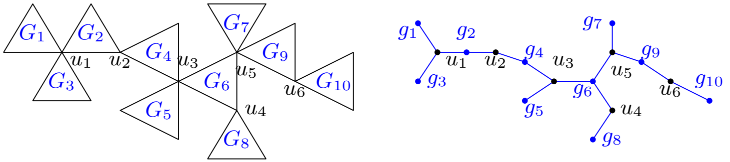


Δένδρο δισυνεκτικών συνιστωσών:

Έστω συνεκτικό γράφημα G και $G_1, G_2, \ldots, G_k$ οι δισυνεκτικές του συνιστώσες. Έστω $CC = \{g_i : G_i$ συνεκτική συνιστώσα του $G\}$, και $CV = \{u : u$ κορυφή τομής του $G\}$. Το γράφημα $T = (CC \cup CV, E)$ όπου

$$E = \{(g_i, u) : g_i \in CC, \{u\} \in CV, \{u\} \in V(G_i)\}$$

ονομάζεται ***δένδρο δισυνεκτικών συνιστωσών*** του G.



Ερώτηση 4.6: Να δειχθεί ότι:

i. Το T είναι διμερές.
ii. Το T είναι όντως δένδρο.

k-συνεκτικότητα

Συνεκτικότητα:

Η ***συνεκτικότητα*** $k(G)$ ενός γραφήματος G ορίζεται ως το μέγεθος ενός ελαχίστου διαχωριστή του.

k-συνεκτικό:

Ένα γράφημα G με $|V(G)| \geq k+1$ το οποίο έχει ελάχιστο διαχωριστή μεγέθους τουλάχιστον k ονομάζεται ***k-συνεκτικό γράφημα***.

Λήμμα 4.16:

Για κάθε απλό γραφημα G ισχύει ότι $k(G) \leq \delta(G)$

Απόδειξη :

- Έστω απλό γράφημα G και έστω $u \in V(G) : d(u) = \delta(G)$.
- Έστω $N_G(u)$ η γειτονιά της u.
- Στο γράφημα $G \backslash N_G(u)$ η κορυφή u είναι απομονωμένη.

$\Rightarrow N_G(u)$ είναι διαχωριστής του G.

$\Rightarrow k(G) \leq |N_G(u)| = \delta(G)$ ■

Θεώρημα 4.17 *[Menger-1927]*:

Για κάθε γράφημα G και για κάθε ζεύγος s, t μη γειτονικών κορυφών του G ισχύει ότι το μέγεθος ενός ελαχίστου (s, t)-διαχωριστή του G είναι ίσο με τον μέγιστο αριθμό εσωτερικώς διακεκριμένων (s, t)-μονοπατιών στο G.

Θεώρημα 4.18 *[Whitney-1932]*:

Ένα γράφημα G είναι k-συνεκτικό ανν για κάθε ζεύγος u, v διαφορετικών κορυφών του G υπάρχουν τουλάχιστον k εσωτερικώς διακεκριμένα (u, v)-μονοπάτια.

Θεώρημα 4.19 *[Halin-1968]*:

Για κάθε γράφημα G με $\delta(G) > k(G)$ υπάρχει ακμή $e \in E(G)$ τέτοια ώστε $k(G \backslash e) = k(G)$
[δηλαδή η e δεν είναι κρίσιμη ακμή].

Ερώτηση 4.7: Να αποδειχθεί το "$\Rightarrow$" τμήμα του Θεωρήματος 4.15 κάνοντας χρήση του Θεωρήματος του Halin.

Θεώρημα 4.20 :

Έστω ένα k-συνεκτικό γράφημα G, $k \geq 2$. Τότε κάθε k κορυφές του G ανήκουν σε ένα κύκλο του G.

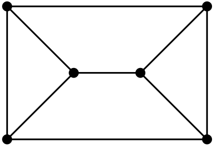
Σημείωση: Το έχουμε δείξει για $k = 2$.

Συνεκτικότητα ακμών/Πλευρική συνεκτικότητα

Συνεκτικότητα ακμών:

Έστω ένα γράφημα G. Ο ελάχιστος αριθμός ακμών που πρέπει να αφαιρεθεί από το G ώστε να δημιουργηθεί ένα μη-συνεκτικό γράφημα ονομάζεται ***συνεκτικότητα ακμών*** του G και συμβολίζεται με $\lambda(G)$.

$$\lambda(G) = \min\{|F| : F \subseteq E(G) \text{ και } G \backslash F \text{ μη συνεκτικό}\}$$



$\lambda(G) = 3$

Θεώρημα 4.21 :

Για κάθε γράφημα G ισχύει ότι $k(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$.

Απόδειξη :

- Έστω v κορυφή του G με $d(v) = \delta(G)$.
- Έστω $E_G(v)$ οι προσκείμενες στην v ακμές.
- $G \backslash E_G(v)$ είναι μη συνεκτικό γιατί η v είναι απομονωμένη.

$$\boxed{\lambda(G) \leq \delta(G) \qquad (5)}$$

- Η ανισότητα $k(G) \leq \lambda(G)$ ισχύει όταν:

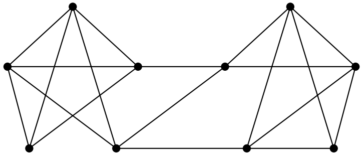
$\lambda(G) = 0$: Το G είναι μη συνεκτικό. $\Rightarrow k(G) = 0$

$\lambda(G) = 1$ Το G περιέχει γέφυρα $e = (u, v)$.

$\Rightarrow$ Οι $\{u\}$ και $\{v\}$ είναι διαχωριστές.

$\Rightarrow k(G) = 1$

- Έστω $\lambda(G) \geq 2$.
- Έστω $e_i = (u_i, v_i)$, $i = 1, \ldots, \lambda(G)$, οι ακμές ενός ``διαχωριστή ακμών".
- Αφαιρώντας όλες εκτός από την e_1, παίρνω συνεκτικό γράφημα με γέφυρα.
- Έστω το σύνολο $S = \{w : w \in \{u_i, v_i\}, i = 2, \ldots, \lambda(G),$ και $w \neq u_1, v_1\}$.
- Αν το S είναι διαχωριστής του $G \Rightarrow k(G) < \lambda(G)$.
- Αν όχι, $S \cup \{u_1\}$ είναι διαχωριστής του $G \Rightarrow k(G) \leq \lambda(G)$. ∎



$$\left.\begin{array}{l}\delta(G)=3\\ k(G)=2\\ \lambda(G)=3\end{array}\right\}$$

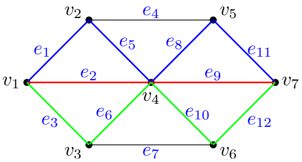
Θεώρημα 4.22 *[Πλευρικό Θεώρημα Menger]*:

Έστω γράφημα G και u, v δυο κορυφές του. Τότε, το μέγιστο πλήθος των πλευρικά ανεξάρτητων (u, v)-μονοπατιών του ισούται με το ελάχιστο πλήθος ακμών που χωρίζουν τις u και v.

Σημείωση: Αποδείχθηκε από τους Ford-Fulkerson το 1955.

Πλευρικά ανεξάρτητα μονοπάτια:

Μονοπάτια που δεν περιέχουν κοινές ακμές [μπορεί να έχουν κοινές κορυφές].



$v_1\, e_1\, v_2\, e_5\, v_4\, e_8\, v_5\, e_{11}\, v_7$

$v_1\, e_2\, v_4\, e_9\, v_7$

$v_1\, e_3\, v_3\, e_6\, v_4\, e_{10}\, v_6\, e_{12}\, v_7$

Θεώρημα 4.23 *[Whitney]*:

Έστω γράφημα G για το οποίο ισχύει ότι για όλες τις διακεκριμένες κορυφές του u, v υπάρχουν k πλευρικά ανεξάρτητα (u, v)-μονοπάτια. Τότε $\lambda(G) = k$.