Θεωρία Γραφημάτων
3η Διάλεξη

Α. Συμβώνης

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
Τομέας Μαθηματικών

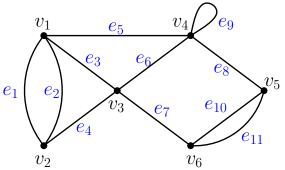
Φεβρουάριος 2017

Μονοπάτια, κύκλοι και αποστάσεις

Έστω ένα γράφημα $G(V, E)$ το οποίο μπορεί να έχει παράλληλες ακμές ή βρόγχους.

Περίπατος:

Ένας **περίπατος μήκους k** είναι μια ακολουθία $\pi =< v_0\ e_1\ v_1 \ldots v_{k-1}\ e_k\ v_k >$ από εναλλασσόμενες κορυφές και ακμές του γραφήματος G έτσι ώστε $e_i = (v_{i-1}, v_i), 1 \leq i \leq k$.



$v_1\ e_1\ v_2\ e_2\ v_1\ e_5\ v_4\ e_9\ v_4\ e_8\ v_5$

(v_0, v_k)-περίπατος, v_0, v_k: τερματικές κορυφές ή άκρα του περιπάτου.

Περιήγηση:

Ένας περίπατος με ταυτόσημες τερματικές κορυφές.

$v_6\ e_{11}\ v_5\ e_{10}\ v_6\ e_7\ v_3\ e_6\ v_4\ e_8\ v_5\ e_{10}\ v_6$

Μονοπάτι:

Ένας περίπατος χωρίς επαναλαμβανόμενες κορυφές.

$v_1\ e_2\ v_2\ e_4\ v_3\ e_7\ v_6$

Μονοκονδυλιά (Trail):

Ένας περίπατος χωρίς επαναλαμβανόμενες ακμές.

$v_1\ e_1\ v_2\ e_2\ v_1\ e_5\ v_4$

Κύκλος:

Ένα μονοπάτι με ταυτόσημες τερματικές κορυφές.

Για απλά γραφήματα

Περίπατος:

Μία ακολουθία κορυφών $\pi =< v_0 \ v_1 \ldots \ v_k >$ τέτοια ώστε $(v_{i-1}, v_i) \in E, 1 \leq i \leq k$.

- P_k: Το γράφημα-μονοπάτι με k κορυφές.
  $P_k = (\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}, \{e_i = (v_i, v_{i+1}) : 1 \leq i < k\})$
- C_k: Το γράφημα-κύκλος με k κορυφές.
  $C_k = (\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}, \{e_i = (v_i, v_{i+1}) : 1 \leq i < k\} \cup (v_k, v_1))$

Χορδή:

Μια ακμή $e = (v_i, v_j)$ που ενώνει δυο κορυφές ενός κύκλου/μονοπατιού $\pi =< v_0 \ v_1 \ v_2 \ldots \ v_i \ldots \ v_j \ldots \ v_k >$, όπου $e \notin \pi$, ή ισοδύναμα $i \notin \{j-1, j+1\}$.

- Άχορδο μονοπάτι, άχορδος κύκλος

Οπή:

Ένα επαγόμενο υπογράφημα ενός γραφήματος το οποίο [επαγόμενο υπογράφημα] είναι άχορδος κύκλος.

Ερώτηση 3.1: Έστω ένα γράφημα G και ένας κύκλος του C μήκους k. Είναι το επαγόμενο υπογράφημα από τις κορυφές του C ισομορφικό με το C_k;

Ερώτηση 3.2: Έστω γράφημα G με $\delta(G) \geq 2$. Να δειχθεί ότι το G περιέχει κύκλο.

Ερώτηση 3.3: Έστω απλό γράφημα G με $\delta(G) \geq 2$. Να δειχθεί ότι το G περιέχει κύκλο μήκους $\geq \delta(G) + 1$. Ισχύει για γραφήματα με βρόγχους/παράλληλες ακμές;
Συμβουλή: Εξετάστε ένα μέγιστο μονοπάτι.

Ερώτηση 3.4: Έστω απλό γράφημα G με $\delta(G) \geq k$. Να δειχθεί ότι το G έχει ένα μονοπάτι μήκους k.

Λήμμα 3.1:

Έστω γράφημα G και $u, v \in V(G)$. Το G περιέχει έναν (u, v)-περίπατο ανν περιέχει ένα (u, v)-μονοπάτι.

Απόδειξη :

"$\Leftarrow$"

Προφανές. Από τον ορισμό του μονοπατιού ✓

"$\Rightarrow$" Θα δείξουμε ότι:"Αν το G περιέχει ένα (u, v)-περίπατο W τότε το G περιέχει ένα (u, v)-μονοπάτι το οποίο αποτελείται από κορυφές του W."

- Έστω ένας περίπατος $W = [u = v_1, \ldots, v_k = v]$ ελάχιστου μήκους στο G για τον οποίο η πρόταση δεν ισχύει.
- Η κορυφή v εμφανίζεται μόνο μία φορά στο W.
- Εξετάζουμε τον περίπατο $W' = [u = v_1, \ldots, v_{k-1}]$ που προκύπτει από την αφαίρεση της κορυφής v_k από το W.
- Το W' έχει μήκος $< k \Rightarrow$ $\exists (u, v_{k-1})$-μονοπάτι P με κορυφές του W και δεν περιλαμβάνει την κορυφή v.
- Το μονοπάτι P ακολουθούμενο από την ακμή (v_{k-1}, v) είναι ένα (u, v)-μονοπάτι αποτελούμενο από κορυφές του W. **Άτοπο** ✓ ■

Θεώρημα 3.2 :

Έστω γράφημα G και έστω A ο πίνακας γειτνίασης του. Τότε η τιμή $A^{\ell}[i,j]$ είναι ο αριθμός των διαφορετικών (v_i, v_j)-περιπάτων μήκους ℓ στο G.

Απόδειξη [Με επαγωγή ως προς το ℓ]:

Βάση: Ισχύει για $\ell = 1$. $A[i,j] = 1 \Leftrightarrow (v_i, v_j) \in E$

$\Leftrightarrow \exists (v_i, v_j)$-μονοπάτι μήκους 1 ✓

Ε.Υ. Έστω ότι ισχύει για $k = \ell - 1$, δηλαδή $A^{\ell-1}[i,j]$ είναι ο αριθμός των διαφορετικών (v_i, v_j)-περιπάτων μήκους $\ell - 1$.

Ε.Β.

$$A^{\ell} = A^{\ell-1} \times A \Rightarrow$$

$$A^{\ell}[i,j] = \sum_{k=1}^{|V(G)|} A^{\ell-1}[i,k]A[k,j]$$

Κάθε ένας από τους $A^{\ell-1}[i,k]$ (v_i, v_k)-περιπάτους ο οποίος συνεχίζεται από την ακμή (v_k, v_j) είναι ένας (v_i, v_j)-περίπατος. ✓ ■

Ερώτηση 3.5: Ισχύει για γραφήματα με βρόγχους και παράλληλες ακμές?

- Για πολυγραφήματα:

  $A[i,j] = |\{e : e = (v_i, v_j) \in E\}|$

Απόσταση:

Έστω γράφημα G και $u, v \in V(G)$. Η **απόσταση dist(u, v)** είναι το μήκος του ελαχίστου (u, v)-μονοπατιού στο G.

- $\text{dist}(u, v) = +\infty$ εάν δεν υπάρχει (u, v)-μονοπάτι.

Πρόταση 3.3 *(Τριγωνική ανισότητα)*:

Έστω γράφημα G και $u, v, w \in V(G)$ τρεις κορυφές του G. Τότε ισχύει:

$$\text{dist}(u, v) + \text{dist}(v, w) \geq \text{dist}(u, w).$$

Απόδειξη :

- Έστω ότι $\text{dist}(u, v) + \text{dist}(v, w) \neq +\infty$, αλλιώς ισχύει τετριμμένα.
- $\text{dist}(u, v)$ το μήκος του ελάχιστου (u, v)-μονοπατιού P_{uv}.
- $\text{dist}(v, w)$ το μήκος του ελάχιστου (v, w)-μονοπατιού P_{vw}.
- Η παράθεση $P_{uw} = P_{uv}P_{vw}$ δημιουργεί (u, w)-περίπατο με μήκος $\geq$ από το ελάχιστο (u, w)-μονοπάτι.

$\Rightarrow \text{dist}(u, v) + \text{dist}(v, w) \geq \text{dist}(u, w)$. ■

Λήμμα 3.4:

Έστω γράφημα G. Κάθε περιήγηση περιττού μήκους στο G περιέχει έναν περιττό κύκλο στο G.

Απόδειξη [Με επαγωγή ως προς το μήκος ℓ της περιήγησης]:

- Έστω W μια περιήγηση περιττού μήκους ℓ.

Βάση: $\ell = 1 \Rightarrow$ Η περιήγηση είναι βρόγχος, δηλαδή κύκλος μήκους 1. ✓

Ε.Υ. Έστω ότι κάθε περιήγηση περιττού μήκους $< \ell$ περιέχει έναν περιττό κύκλο.

Ε.Β. Έστω W μια περιήγηση περιττού μήκους ℓ.

Περίπτωση 1: Η W δεν περιέχει επαναλαμβανόμενες κορυφές.

$\Rightarrow$ Τότε η W είναι εξ' ορισμού [περιττός] κύκλος. ✓

Περίπτωση 2: Η W περιέχει επαναλαμβανόμενη κορυφή, έστω u [εκτός της κοινής τερματικής κορυφής].

- Η W μπορεί να διαμελιστεί σε δύο μικρότερες περιηγήσεις W_1, W_2.
- Μιας και η W είναι περιττού μήκους, μια εκ των W_1, W_2 είναι επίσης περιττού μήκους, έστω η W_1.
- Από Ε.Υ. η W_1 περιέχει περιττό κύκλο, άρα και η W. ✓ ∎

Θεώρημα 3.5 :

Ένα γράφημα είναι διμερές ανν δεν περιέχει κύκλους περιττού μήκους.

Απόδειξη :

"$\Longrightarrow$" Έστω διμερές γράφημα $G = (A, B, E)$.

- Έστω κύκλος $C = [v_1\ v_2 \ldots\ v_k = v_1]$ και έστω $v_1 \in A$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & v_2 \in B,\ v_3 \in A, \\ & v_4 \in B, \ldots \\ \Rightarrow \quad & v_{2i-1} \in A \ \text{ και } \ v_{2i} \in B\ \forall i \geq 1. \\ \Rightarrow \quad & v_k = v_1 \in A \Rightarrow k = 2i - 1 \text{ για } i \geq 1. \\ \Rightarrow \quad & \text{Ο κύκλος } C \text{ έχει άρτιο μήκος.} \quad \checkmark \end{aligned}$$

“$\Leftarrow$” Έστω γράφημα G που δεν περιέχει περιττούς κύκλους. Θα βρούμε διαμέριση A, B του $V(G)$ και θα δείξουμε ότι δεν υπάρχει ακμή $e = (x, y) : x, y \in A$ ή $x, y \in B$.

- Έστω κορυφή u και A, B τα σύνολα κορυφών που βρίσκονται σε άρτια και περιττή απόσταση από την u, αντίστοιχα.

  $A \cap B = \emptyset$ και $u \in A$ [dist$(u, u) = 0$].
- Έστω ακμή $e = (x, y) : x, y \in A$ [όμοια εάν $x, y \in B$].
- Η περιήγηση

  $$W = \{\underbrace{u \ldots\ x}_{\text{άρτιο}}\underbrace{\ }_{1}\underbrace{y \ldots\ u}_{\text{άρτιο}}\}$$

  στο G είναι περιττού μήκους.

$\Rightarrow$ Η W περιέχει έναν περιττό κύκλο [από λήμμα 3.1].

Άτοπο, γιατί το G δεν περιέχει περιττούς κύκλους.

$\Rightarrow$ Κάθε ακμή $e = (x, y)$ έχει $x \in A, y \in B$ ή $x \in B, y \in A$. ✓ ■

Εκκεντρότητα κορυφής του G [eccentricity]:

$$\mathrm{ecc}(v) = \max_{v \in V(G)} \mathrm{dist}(v, u)$$

Διάμετρος του G:

$$\mathrm{diam}(G) = \max_{v \in V(G)} \mathrm{ecc}(v)$$

Ακτίνα του G:

$$\mathrm{rad}(G) = \min_{v \in V(G)} \mathrm{ecc}(v)$$

Αντιδιαμετρικές κορυφές $x, y \in V(G)$:

$$\mathrm{dist}(x, y) = \mathrm{diam}(G)$$

Κεντρική κορυφή:

Κάθε κορυφή $v \in V(G) : \mathrm{ecc}(v) = \mathrm{rad}(G)$.

Κέντρο του G:

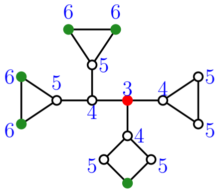
$$\mathrm{center}(G) = \{v : v \in V(G) \text{ και } \mathrm{ecc}(v) = \mathrm{rad}(G)\}$$

Απόκεντρη κορυφή:

Κάθε κορυφή $v \in V(G) : \mathrm{ecc}(v) = \mathrm{diam}(G)$.

Απόκεντρο του G:

$$\mathrm{far}(G) = \{v : v \in V(G) \text{ και } \mathrm{ecc}(v) = \mathrm{diam}(G)\}$$



$\mathrm{diam}(G) = 6$

$\mathrm{rad}(G) = 3$

$\mathrm{center}(G) = \{{\color{red}\bullet}\}$

$\mathrm{far}(G) = \{{\color{green}\bullet}\}$

Θεώρημα 3.6 :

Για κάθε γράφημα G ισχύει ότι:

$$\mathrm{rad}(G) \leq \mathrm{diam}(G) \leq 2\mathrm{rad}(G).$$

Απόδειξη :

i. $\mathrm{rad}(G) \leq \mathrm{diam}(G)$

   Άμεσα, από τους ορισμούς. ✓

ii. $\mathrm{diam}(G) \leq 2\mathrm{rad}(G)$

   - Έστω 2 ”αυθαίρετες” κορυφές $x, y \in V(G)$:

     $\mathrm{dist}(x, y) = \mathrm{diam}(G)$.
   - Έστω $v \in V(G)$ μια κεντρική κορυφή $\Rightarrow$

     $\mathrm{dist}(v, x) \leq \mathrm{ecc}(v) = \mathrm{rad}(G)$, και

     $\mathrm{dist}(v, y) \leq \mathrm{ecc}(v) = \mathrm{rad}(G)$.
   - Από τριγωνική ανισότητα:

     $\mathrm{dist}(x, y) \leq \mathrm{dist}(x, v) + \mathrm{dist}(v, y)$

     $\Rightarrow \mathrm{diam}(G) \leq 2\mathrm{rad}(G)$. ✓ ∎

Θεώρημα 3.7 :

Για κάθε γράφημα G, είτε $\text{center}(G) = \text{far}(G)$

ή $\text{center}(G) \cap \text{far}(G) = \emptyset$.

Απόδειξη :

- Έστω $v \in \text{center}(G) \cap \text{far}(G)$.

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} v \in \text{center}(G) & \Rightarrow \text{ecc}(v) = \text{rad}(G) \\ v \in \text{far}(G) & \Rightarrow \text{ecc}(v) = \text{diam}(G) \end{array} \right\}$$

$$\boxed{\Rightarrow \text{diam}(G) = \text{rad}(G) \qquad (1)}$$

$\forall u \in V(G)$ ισχύει:

$$\boxed{\text{rad}(G) \leq \text{ecc}(u) \leq \text{diam}(G) \qquad (2)}$$

(1),(2)$\Rightarrow$ Όλες οι κορυφές έχουν ίδια εκκεντρότητα.

$\Rightarrow$ $\text{center}(G) = \text{far}(G)$. ∎

Ερώτηση 3.6: Να δειχθεί ότι για κάθε δένδρο T ισχύει ότι $|\text{center}(T)| \in \{1, 2\}$.

Ερώτηση 3.7: Να σχεδιαστεί αλγόριθμός που υπολογίζει το κέντρο $\text{center}(T)$ ενός δένδρου T.

Ερώτηση 3.8: Έστω ένα συνδεδεμένο γράφημα G. Είναι το $\text{center}(G)$ πάντα συνδεδεμένο?

Ερώτηση 3.9: Να υπολογιστούν τα $\text{rad}(G)$, $\text{diam}(G)$, $\text{center}(G)$, $\text{far}(G)$ όπου G το γράφημα:

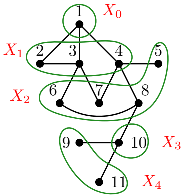
i. $M_{a,b}$: Το πλέγμα διαστάσεων $a \times b$.
ii. Q_r: Ο υπερκύβος διάστασης r.
Πόσα ζεύγη αντιδιαμετρικών κορυφών έχει ο Q_r;

Ερώτηση 3.10: Ισχύει ότι για κάθε γράφημα G, $\text{diam}(G) \geq \delta(G)$;

Αποσυνθέσεις απόστασης

Αποσύνθεση απόστασης:

Έστω γράφημα G και κορυφή $u \in V(G)$. Η **αποσύνθεση απόστασης του G ως προς την u** είναι η ακολουθία συνόλων $A(u) = \left[X_0, X_1, \ldots, X_{\mathrm{ecc}(u)}\right]$ όπου $X_i = \{v : v \in V(G) \text{ και } \mathrm{dist}(u, v) = i\}$.



$A(1) = \{ \quad \{1\},$
$\{2, 3, 4\},$
$\{5, 6, 7, 8\},$
$\{10\},$
$\{9, 11\} \}$

Εναλλακτικός ορισμός:

Έστω γράφημα G και κορυφή $u \in V(G)$. Η **αποσύνθεση απόστασης του G ως προς την u** είναι η ακολουθία συνόλων $A(u) = \left[X_0, X_1, \ldots, X_{\mathrm{ecc}(u)}\right]$ όπου:

$$X_0 = \{u\}$$

$$X_i = N_G(X_{i-1}) \setminus \bigcup_{j=0}^{i-1} X_j, \quad 1 \leq i \leq \mathrm{ecc}(u)$$

Σημείωση: $X_i \cap X_j = \emptyset$ $\forall 0 \leq i < j \leq \mathrm{ecc}(u)$

Λήμμα 3.8:

Έστω $A(u) = \left[X_0, X_1, \ldots, X_{\mathrm{ecc}(u)}\right]$ η αποσύνθεση απόστασης του G ως προς την u. Τότε $\forall 0 \leq i \leq j \leq \mathrm{ecc}(u)$ και $\forall x, y \in V(G) : x \in X_i, y \in X_j$, κάθε μονοπάτι P που συνδέει τις κορυφές x και y τέμνει όλα τα σύνολα $X_i \ldots X_j$.

Απόδειξη :

- Έστω $x = u_0, u_1, \ldots, u_{q-1}, u_q = y$ ένα (x, y)-μονοπάτι.
  Το μονοπάτι αντιστοιχεί στην ακολουθία $a = [a_0, a_1, \ldots, a_q]$ όπου $u_\ell \in X_{a_\ell}$, $0 \leq \ell \leq q$.
- $a_0 = i, a_q = j$
- χρήση εναλλακτικού ορισμού $\left[\begin{array}{l} \forall \text{ κορυφή } v \in X_k, 0 \leq k \leq \mathrm{ecc}(u) \text{ ισχύει:} \\ N_G(v) \subseteq X_{k-1} \cup X_k \cup X_{k+1} \text{ [εφόσον ορίζονται]} \end{array}\right.$
- Στην ακολουθία a ισχύει ότι $|a_{k-1} - a_k| \leq 1, \forall 0 < k < q$.

  [Διαδοχικοί όροι απέχουν το πολύ κατά 1.]

$\Rightarrow$ Η a περιλαμβάνει όλους τους αριθμούς στο διάστημα $i \ldots j$. ■

Λήμμα 3.9:

Έστω γράφημα G και έστω κορυφή $u \in V(G)$. Τότε, ο αριθμός των μονοπατιών μήκους ℓ που έχουν την u ως άκρο τους είναι το πολύ

$$d(u)(\Delta(G)-1)^{\ell-1}$$

Απόδειξη :

- Έστω P_u^i, $1 \le i \le \ell$ το σύνολο των μονοπατιών που έχουν την u ως το ένα άκρο τους και έχουν μήκος i.

$$\boxed{|P_u^1| = d(u) \qquad (3)}$$

- Κάθε μονοπάτι του P_u^{i+1}, $1 \le i < \ell$ αποτελεί επέκταση ενός μονοπατιού του P_u^i
- Έστω $o(P)$ το άλλο άκρο κάθε μονοπατιού που ξεκινάει από την u.

$$|P_u^{i+1}| \le \sum_{P \in P_u^i} (d(o(P))-1) \le \sum_{P \in P_u^i} (\Delta(G)-1) \le |P_u^i|(\Delta(G)-1)$$

$$\boxed{|P_u^{i+1}| \le |P_u^i|(\Delta(G)-1) \qquad (4)}$$

(3),(4)$\Rightarrow$ $|P_u^\ell| \le d(u)(\Delta(G)-1)^{\ell-1}$ ■

Λήμμα 3.10:

Έστω γράφημα G με $\Delta(G) \leq d$. Τότε για κάθε κορυφή $u \in V(G)$ υπάρχουν το πολύ $1 + \frac{d}{d-2}((d-1)^{\ell} - 1)$ κορυφές του G σε απόσταση $\leq \ell$ από την u.

Απόδειξη :

- Έστω $A(u) = [X_0, X_1, \ldots, X_\ell]$ η αποσύνθεση απόστασης του G ως προς την u.
- Εξ' ορισμού, $|X_i|$, $0 \leq i \leq \ell$ είναι το πλήθος των κορυφών σε απόσταση i από την u.

  $\Rightarrow \exists \geq |X_i|$ μονοπάτια από την u προς το X_i μήκους i.

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{\ell} |X_i| &\leq 1 + \sum_{i=1}^{\ell} d(u)(\Delta(G)-1)^{i-1} \leq 1 + \sum_{i=1}^{\ell} d(d-1)^{i-1} \\ &= 1 + d\sum_{i=0}^{\ell-1}(d-1)^i \overset{*}{=} 1 + \tfrac{d}{d-2}((d-1)^{\ell}-1)\end{aligned}$$

[* Άθροισμα S_n n όρων γεωμετρικής προόδου $S_n = 1 + \lambda + \lambda^2 + \cdots + \lambda^{n-1} = \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}$]

Θεώρημα 3.11 :

Έστω γράφημα G με $\mathrm{rad}(G) \leq r$ και $\Delta(G) \leq d$. Τότε $|V(G)| \leq 1 + \frac{d}{d-2}((d-1)^r - 1)$.

Απόδειξη :

Με εφαρμογή του προηγούμενου λήμματος για κάποια κορυφή $u \in \mathrm{center}(G)$.

Πλάτος απόστασης του G ως προς την u:

$$\pi\alpha(u) = \max\{|X_i|\}, X_i \in A(u) = \left[X_0, X_1, \ldots, X_{\mathrm{ecc}(u)}\right]$$

Πλάτος απόστασης γραφήματος:

$$\pi\alpha(G) = \min_{u \in V(G)} \{\pi\alpha(u)\}$$

Θεώρημα 3.12 :

Έστω γράφημα G. Τότε ισχύει ότι $\pi\alpha(G) \geq \frac{|V(G)|-1}{\mathrm{diam}(G)}$.

Απόδειξη :

- Έστω $u \in V(G) : \pi\alpha(u) = \pi\alpha(G)$ και έστω $A(u) = \left[X_0, X_1, \ldots, X_{\mathrm{ecc}(u)}\right]$

$$|V(G)| \leq 1 + \sum_{i=1}^{\mathrm{ecc}(u)} |X_i| \leq 1 + \mathrm{ecc}(u)\pi\alpha(u) \leq 1 + \mathrm{diam}(G)\pi\alpha(G)$$

$$\Rightarrow \pi\alpha(G) \geq \frac{|V(G)|-1}{\mathrm{diam}(G)}$$

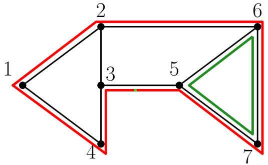
■

Περίμετρος γραφήματος G [που περιέχει κύκλο(υς)]:

crm(G): Μήκος ενός μέγιστου [μήκους] κύκλου του G.

Περιφέρεια γραφήματος G [που περιέχει κύκλο(υς)]:

girth(G): Μήκος ενός ελάχιστου [μήκους] κύκλου του G.



$\text{crm}(G) = 7$ κύκλος: $(1, 4, 3, 5, 7, 6, 2, 1)$

$\text{girth}(G) = 3$ κύκλος: $(5, 6, 7)$

Θεώρημα 3.13 :

Έστω απλό γράφημα G που περιέχει κύκλο(υς). Τότε, $\delta(G) \leq \text{crm}(G) - 1$.

Απόδειξη :

- Έστω $P = (u_0, u_1, \ldots, u_k)$ ένα μέγιστο μονοπάτι του G.
- Όλες οι κορυφές του $N_G(u_0)$ ανήκουν στο μονοπάτι.

  $\Rightarrow |N_G(u_0)| \geq \delta(G)$ γείτονες της u ανήκουν στο μονοπάτι.

  $\Rightarrow \exists$ κύκλος μήκους $\geq \delta(G) + 1$ στο G.

  $\Rightarrow \delta(G) \leq \text{crm}(G) - 1$. ∎

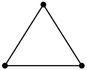
Θεώρημα 3.14 :

Κάθε γράφημα G με πυκνότητα $\epsilon(G) \geq 1$ περιέχει κύκλο.

Απόδειξη [Με επαγωγή ως προς το $|V(G)|$, $\left(\epsilon(G) = \frac{|E(G)|}{|V(G)|}\right)$]:

- Ισχύει εξ' ορισμού για κάθε γράφημα με βρόγχους ή παράλληλες ακμές.
  Άρα, θα το δείξουμε για απλά γραφήματα.

Βάση: $n = 3 \Rightarrow m \geq 3$



Μοναδικό γράφημα. ✓

Ε.Υ. Έστω ότι κάθε γράφημα H με $\epsilon(H) \geq 1$ και $3 \leq |V(H)| < n$ έχει κύκλο

Ε.Β. Έστω γράφημα G με $\epsilon(G) \geq 1$ και $3 < |V(G)| = n$

Περίπτωση 1: $\delta(G) \geq 2$.

Δημιουργούμε τον περίπατο όπου ξεκινώντας από μια κορυφή, βγαίνουμε από αυτή από διαφορετική ακμή από αυτήν που μπήκαμε. Ο περίπατος μπορεί να συνεχίζεται συνέχεια γιατί $\delta(G) \geq 2$. Μετά από $|V(G)|$ βήματα θα επαναληφθεί κάποια κορυφή. $\Rightarrow$ κύκλος ✓

Περίπτωση 2: $\delta(G) = 1$.

- Υπάρχει κορυφή u με $d(u) = 1$. $\Rightarrow G\backslash u$ έχει:

$$\epsilon(G\backslash u) = \frac{|E(G\backslash u)|}{|V(G\backslash u)|} = \frac{|E(G)| - 1}{|V(G)| - 1} \geq \frac{|E(G)|}{|V(G)|} \geq 1$$

$\xRightarrow{\text{Ε.Υ.}} G\backslash u$ έχει κύκλο. $\Rightarrow G$ έχει κύκλο. ✓ ∎

Περίπτωση 3: $\delta(G) = 0$.

- Υπάρχει κορυφή u με $d(u) = 0$, δηλαδή, το G δεν είναι συνεκτικό. $\Rightarrow G\backslash u$ έχει:

$$\epsilon(G\backslash u) = \frac{|E(G\backslash u)|}{|V(G\backslash u)|} = \frac{|E(G)|}{|V(G)| - 1} \geq \frac{|E(G)|}{|V(G)|} \geq 1$$

$\xRightarrow{\text{Ε.Υ.}} G\backslash u$ έχει κύκλο. $\Rightarrow G$ έχει κύκλο. ✓ ∎

Θεώρημα 3.15 :

Έστω γράφημα G με κύκλο(υς) και $\delta(G) \geq d$. Τότε ισχύει:

$$|V(G)| \geq \begin{cases} 1 + d\sum_{i=0}^{r-1}(d-1)^i & \text{girth}(G) = 2r+1 \\ 2\sum_{i=0}^{r-1}(d-1)^i & \text{girth}(G) = 2r \end{cases}$$

Απόδειξη :

Περίπτωση 1: girth$(G) = 2r + 1$.

- Έστω $X_0, X_1, \ldots, X_r$ τα πρώτα $r+1$ σύνολα μιας αποσύνθεσης απόστασης $A(u)$ ως προς κάποια κορυφή $u \in V(G)$ η οποία ανήκει σε έναν κύκλο μήκους girth(G).
- $\forall v \in X_i, 1 \leq i \leq r$, η v έχει ακριβώς 1 γείτονα στο X_{i-1}.

[Διαφορετικά, έστω ότι είχε 2 γείτονες w_1 και $w_2 \in X_{i-1}$.

$\Rightarrow \exists$ μονοπάτια $u \to w_1$ και $u \to w_2$ ίδιου μήκους $(i-1)$.

$\Rightarrow \exists$ κύκλος μήκους το πολύ $2i \leq 2r <$ girth(G). **Άτοπο** (ορισμός του girth(G)).]

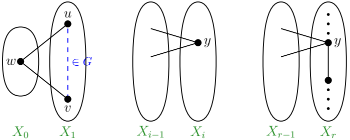
- $|X_i| \geq (d-1)|X_{i-1}|, 2 \leq i \leq r, \quad |X_0| = 1, \quad |X_1| \geq d$
- $$\begin{aligned} |V(G)| &\geq \sum_{i=0}^{r}|X_i| \geq 1 + d + d(d-1) + \cdots + d(d-1)^{r-1} \\ &= 1 + d\sum_{i=0}^{r-1}(d-1)^i \quad \checkmark \end{aligned}$$

Περίπτωση 2: girth$(G) = 2r$.

- Έστω (u, v) μια αυθαίρετη ακμή του G που ανήκει σε κύκλο μήκους girth(G).
- $G' = G \setminus (u, v) \cup \{(u, w), (w, v)\}$
- Έστω $X_0, X_1, \ldots, X_r$ τα πρώτα $r + 1$ σύνολα μιας αποσύνθεσης απόστασης $A(w)$.
- $\forall y \in X_i, 2 \leq i \leq r$, η y έχει ακριβώς 1 γείτονα στο X_{i-1}.

[Εάν $\exists y \in X_i, 2 \leq i \leq r$ με 2 γείτονες στο X_{i-1}
τότε έχω στο G' κύκλο μεγέθους $2i$. $\Rightarrow$
Τότε, έχω στο G κύκλο μεγέθους $2i - 1$.

$2i - 1 \leq 2r - 1 < \text{girth}(G)$. **Άτοπο.**]



- $|X_0| = 1, \quad |X_1| = 2, \quad |X_i| \geq (d-1)|X_{i-1}|, 2 < i \leq r$

$$|V(G')| \geq \sum_{i=0}^{r} |X_i| \geq 1 + 2 + 2(d-1) + \cdots + 2(d-1)^{r-1} = 1 + 2\sum_{i=0}^{r-1} (d-1)^i \tag{5}$$

$$|V(G)| = |V(G')| - 1 \tag{6}$$

(5),(6)$\Rightarrow |V(G)| \geq 2\sum_{i=0}^{r-1} (d-1)^i$ ✓