Θεωρία Γραφημάτων
2η Διάλεξη

Α. Συμβώνης

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
Τομέας Μαθηματικών

Φεβρουάριος 2017

Βαθμοί κορυφών

Βαθμός κορυφής:

$$d_G(v) = |N_G(v)|$$

[Ορισμός μόνο για απλά γραφήματα.]

Ελάχιστος βαθμός γραφήματος:

$$\delta(G) = \min\{d_G(v) : v \in V(G)\}$$

Μέγιστος βαθμός γραφήματος:

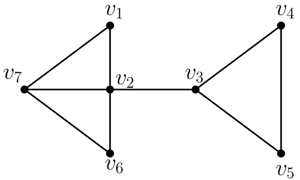
$$\Delta(G) = \max\{d_G(v) : v \in V(G)\}$$

Μέσος βαθμός γραφήματος:

$$d(G) = \frac{\sum\limits_{v \in V(G)} d_G(v)}{|V(G)|}$$

Πυκνότητα γραφήματος:

$$\epsilon(G) = \frac{|E(G)|}{|V(G)|}$$



Απομονωμένη κορυφή:

Κορυφή v με $d_G(v) = 0$.

Εκκρεμής κορυφή:

Κορυφή v με $d_G(v) = 1$.

r-κανονικό (r-regular) γράφημα:

$\forall v \in V(G)$ ισχύει $d_G(v) = r$

Θεώρημα 2.1 :

Για κάθε γράφημα G ισχύει:

i. $\displaystyle\sum_{v\in V(G)} d_G(v) = 2|E(G)|$

ii. $\delta(G) \leq d(G) \leq \Delta(G)$

iii. $\epsilon(G) = d(G)/2$

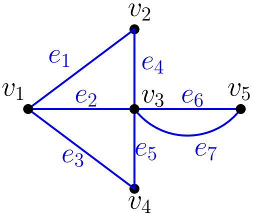
Απόδειξη :

i. Πίνακας πρόσπτωσης

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	$d(v)$
v_1	1	1	1					3
v_2	1			1				2
v_3		1		1	1	1	1	5
v_4			1		1			2
v_5						1	1	2
	2	2	2	2	2	2	2	14

$\sum d(v)$

$2|E(G)|$



ii. Από τον ορισμό των $\delta(G)$, $d(G)$ και $\Delta(G)$.

iii. Από τον ορισμό των $\epsilon(G)$ και $d(G)$.

Πρόταση 2.2 :

Κάθε γράφημα G έχει άρτιο αριθμό κορυφών περιττού βαθμού.

Απόδειξη :

$$\left.\begin{array}{rl} \text{Έστω } V_1 \subseteq V: & \text{Σύνολο κορυφών περιττού βαθμού.} \\ V_2 \subseteq V: & \text{Σύνολο κορυφών άρτιου βαθμού.} \end{array}\right\} \Longrightarrow V_1 \cup V_2 = V$$

Ισχύει ότι $\displaystyle\sum_{v\in V_1} d_G(v) + \sum_{v\in V_2} d_G(v) = 2|E(G)|$

$\Rightarrow \displaystyle\sum_{v\in V_1} d_G(v)$ είναι άρτιος αριθμός.

$\Rightarrow |V_1|$ είναι άρτιο, γιατί $d_G(v), v \in V_1$ είναι περιττός. ■

Πρόταση 2.3 :

Κάθε r-κανονικό γράφημα G έχει $\frac{r|V(G)|}{2}$ ακμές.

Απόδειξη :

$$|E(G)| = \frac{\displaystyle\sum_{v\in V(G)} d_G(v)}{2} = \frac{r|V(G)|}{2}$$ ■

Ερώτηση 2.1: Το γράφημα G έχει ακριβώς δύο κορυφές με περιττό βαθμό, έστω τις u και v. Συνδέονται οι u και v με μονοπάτι;

Ερώτηση 2.2: Υπάρχει 3-κανονικό γράφημα G με 9 κορυφές;

Ερώτηση 2.3: Υπάρχει 9-κανονικό γράφημα G με 13 κορυφές;

Ερώτηση 2.4: Έστω 2 όμιλοι ποδοσφαίρου με 13 ομάδες ο καθένας. Μπορούμε να οργανώσουμε ένα πρωτάθλημα έτσι ώστε κάθε ομάδα να συμμετέχει σε 9 αγώνες με ομάδες του ομίλου της και σε 4 αγώνες με ομάδες του άλλου ομίλου;

Ερώτηση 2.5: Έστω ένα r-κανονικό διμερές γράφημα με διαμερίσεις X και Y. Να δειχθεί ότι $|X| = |Y|$.

Πρόταση 2.4 :

Κάθε απλό γράφημα G έχει δύο κορυφές ίδιου βαθμού.

Απόδειξη :

- G απλό $\Rightarrow \forall v \in V(G) : d_G(v) \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ όπου $n = |V(G)|$.
- Αλλά, το σύνολο των δυνατών βαθμών για τις κορυφές του G δεν μπορεί να περιέχει ταυτόχρονα τους βαθμούς 0 και $n-1$.

  [Η κορυφή με βαθμό $n-1$ είναι ενωμένη με όλες τις άλλες κορυφές, οπότε δεν υπάρχει κορυφή με βαθμό 0.]
- Συνεπώς έχουμε $n-1$ το πολύ δυνατούς βαθμούς για τις n κορυφές.
- Άρα υπάρχουν δύο κορυφές με τον ίδιο βαθμό [αρχή του περιστερεώνα]. ■

Πρόταση 2.5 :

Σε κάθε ομάδα από 2 ή περισσότερους ανθρώπους πάντα υπάρχουν δύο άτομα με τον ίδιο αριθμό φίλων μέσα στην ομάδα.

Πρόταση 2.6 :

Έστω απλό γράφημα G για το οποίο ισχύει ότι $\delta(G) \geq \frac{|V(G)|-1}{2}$. Τότε το G είναι συνδεδεμένο.

Απόδειξη :

- Θα δείξουμε ότι $\forall u, v \in V(G)$ υπάρχει μονοπάτι από την u στην v.

Περίπτωση 1: $e = (u, v) \in E$ Τότε υπάρχει μονοπάτι $u - v$ ✓

Περίπτωση 2: $e = (u, v) \notin E$

$$\delta(G) \geq \frac{|V(G)|-1}{2} \Rightarrow \begin{cases} |N_G(u)| \geq \frac{|V(G)|-1}{2} \\ |N_G(v)| \geq \frac{|V(G)|-1}{2} \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\boxed{N_G(u) \cap N_G(v) \neq \emptyset \qquad (1)}$$

Εάν $N_G(u) \cap N_G(v) = \emptyset \Rightarrow$

$$\boxed{|N_G(u) \cup N_G(v)| = |N_G(u)| + |N_G(v)| \geq |V(G)| - 1 \qquad (2)}$$

Αλλά $\{u, v\} \notin N_G(u) \cup N_G(v)$

$$\boxed{|N_G(u) \cup N_G(v)| \leq |V(G)| - 2 \qquad (3)}$$

Άτοπο λόγω της (2).

$$\begin{aligned} (1) \quad &\Rightarrow \exists w \in N_G(u) \cap N_G(v) \\ &\Rightarrow \exists\, e_1 = (u, w),\ e_2 = (w, v) \\ &\Rightarrow \text{Υπάρχει μονοπάτι } u - v. \quad ✓ \end{aligned}$$

■

Θεώρημα 2.7 :

Κάθε γράφημα G χωρίς βρόγχους έχει διμερές υπογράφημα $H \subseteq G$ με τουλάχιστον $|E(G)|/2$ ακμές.

Απόδειξη [Κατασκευαστική]:

- Θα κατασκευάσουμε διμερές υπογράφημα $H \subseteq G$ με $\geq |E(G)|/2$ ακμές.

1. Έστω αυθαίρετη διαμέριση (X, Y) του $V(G)$ και $H \subseteq G$ το διμερές επαγόμενο από τα X και Y γράφημα.
2. 2.1 Εάν $E(H) \geq |E(G)|/2$ τελειώσαμε. ✓

   2.2 Αλλιώς, $[E(H) < |E(G)|/2]$
   - Έστω $v \in V(G) : d_H(v) < d_G(v)/2$ (πάντα υπάρχει).
   - Μετέθεσε την v στο άλλο μερίδιο.
   - Προσάρμοσε το H ώστε να είναι διμερές: αφαίρεσε τις ακμές από το H που ενώνονταν με την v πριν την μετάθεση [$d_H(v)$ ακμές] και πρόσθεσε τις ακμές που ενώνονται με την v στο G αλλά όχι στο H [$>d_H(v)$ ακμές].
   - Πήγαινε στο 2.

- Ο αριθμός των ακμών του H αυξάνει μετά από κάθε μετακίνηση.
- Ο αλγόριθμος τερματίζει.
- Το γράφημα H είναι διμερές [από κατασκευή]. ✓
- $E(H) \geq |E(G)|/2$

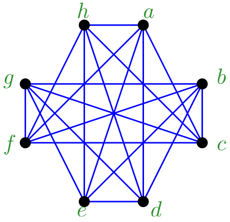
- $E(H) \geq |E(G)|/2$

Απόδειξη :

Στο τέλος του αλγορίθμου ισχύει $\forall v \in V(G) : d_H(v) \geq d_G(v)/2$.

$$
\begin{aligned}
|E(H)| &= \frac{1}{2} \sum_{v \in V(H)} d_H(v) \\
&\geq \frac{1}{2} \sum_{v \in V(G)} d_G(v)/2 \quad [V(H) = V(G)] \\
&= |E(G)|/2 \quad \checkmark
\end{aligned}
$$

Ερώτηση 2.6: Δίνει πάντοτε ο αλγόριθμος το μέγιστο διμερές υπογράφημα;



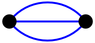
- $H_1 : \{a, b, c, d\}, \{e, f, g, h\}$
  $|E(H_1)| = 12$
- $H_2 : \{g, h, a, b\}, \{c, d, e, f\}$
  $|E(H_1)| = 16$

Θεώρημα 2.8 :

Κάθε μη τετριμμένο γράφημα G χωρίς βρόγχους έχει διμερές υπογράφημα $H \subseteq G$ με $> |E(G)|/2$ ακμές.

[Τετριμμένο γράφημα: γράφημα χωρίς ακμές ή κορυφές]

Απόδειξη [Επαγωγή ως προς το $|V(G)|$.]:

Βάση $|V(G)| = 2$  $G = H$. Ισχύει. ✓

Ε.Υ. Κάθε μη τετριμμένο χωρίς βρόγχους γράφημα G με $|V(G)| \leq k$, $k \geq 2$, έχει διμερές υπογράφημα $H \subseteq G$ με $> |E(G)|/2$ ακμές.

Ε.Β. Έστω αυθαίρετο γράφημα G με $|V(G)| = k + 1$.

- Έστω αυθαίρετη κορυφή $v \in V(G)$.
- Θεωρώ το $G \backslash v$ [έχει k κορυφές].
- $\overset{\text{Ε.Υ.}}{\Longrightarrow} \exists H' \subseteq G \backslash v : |E(H')| > |E(G \backslash v)|/2$.
- Έστω X και Y τα μερίδια του H'.
- Προσθέτω την v στην διαμέριση όπου η v συνδέεται με τις λιγότερες ακμές.

$\Rightarrow$ Γράφημα H

$\Rightarrow$ Προσθέτουμε στο H' τουλάχιστον $d_G(v)/2$ ακμές.

$$
\begin{aligned}
|E(H)| &\geq |E(H')| + d_G(v)/2 \\
&> |E(G\backslash v)|/2 + d_G(v)/2 \\
&= (|E(G\backslash v)| + d_G(v))/2 \\
&= |E(G)|/2 \qquad \checkmark
\end{aligned}
$$

■

Ερώτηση 2.7: Έστω A ο πίνακας γειτνίασης ενός απλού γραφήματος G.
Να δειχθεί ότι η διαγώνιος του A^2 περιέχει τους βαθμούς των κορυφών του G.

Θεώρημα 2.9 *[Köning-1916]*:

Κάθε γράφημα G είναι επαγόμενο υπογράφημα κάποιου $\Delta(G)$-κανονικού γραφήματος.

Απόδειξη :

- Για κάθε γράφημα G ορίζουμε την ποσότητα:

$$z(G) = \frac{\sum_{v \in V(G)} (\Delta(G) - d_G(v))}{|V(G)|}$$

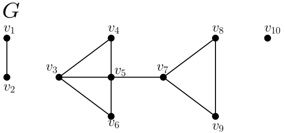
Το $z(G)$ αποτελεί μέτρο του πόσο απέχει το G από το να είναι $\Delta(G)$-κανονικό.

- Εφαρμόζουμε επαναληπτικά την παρακάτω διαδικασία η οποία μειώνει το $z(G)$.

1. $G_1 = G \cup G$.
2. Πρόσθεσε ακμές μεταξύ αντίστοιχων κορυφών (σε διαφορετικά αντίγραφα) που έχουν βαθμό $< \Delta(G)$.
   $\implies G \subset G_1$ και $z(G) > z(G_1)$
3. Εάν G_1 είναι $\Delta(G)$-κανονικό τελειώσαμε.
   Αλλιώς, $G = G_1$ πήγαινε στο 1. ∎

Γραφική ακολουθία

- Έστω η ακολουθία $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ όπου $0 \leq d_i < n$, $d_i \in \mathbb{N}$.
- Με $sorted((d_1, d_2, \dots, d_n))$ συμβολίζουμε την ακολουθία που προκύπτει από την ταξινόμηση σε φθίνουσα διάταξη της $(d_1, d_2, \dots, d_n)$.
- Έστω $G = (V, E)$ και $s' = (d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_n))$, $v_i \in V(G)$, $|V(G)| = n$ η ακολουθία βαθμών του G.
- Η ακολουθία $sorted((d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_n)))$ ονομάζεται γραφική ακολουθία του G.



Γραφική ακολουθία του G

$$\begin{array}{cccccccccccc}
(& 4 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 &) \\
 & | & | & | & | & | & | & | & | & | & | & \\
 & v_5 & v_3 & v_7 & v_4 & v_6 & v_8 & v_9 & v_1 & v_2 & v_{10} &
\end{array}$$

Γραφική ακολουθία:

Μία φθίνουσα ακολουθία $s = (d_1 \geq d_2, \geq \dots \geq d_n)$ ονομάζεται **γραφική** αν υπάρχει γράφημα $G(V, E)$ και μία $1-1$ και επί απεικόνιση $\sigma : V \to \{1, 2, \dots, n\}$: $d(v) = d_{\sigma(v)}$.

- Το γράφημα G υλοποιεί την ακολουθία s.
- Η ακολουθία s είναι η ακολουθία βαθμών του G.

Ερώτηση 2.8: Υπάρχουν διμερή γραφήματα με τις παρακάτω ακολουθίες βαθμών;

i. $(3, 3, 2, 2, 2)$
ii. $(3, 2, 2, 2, 2, 1)$
iii. $(5, 2, 1, 1, 1)$
iv. $(3, 3, 2, 2)$

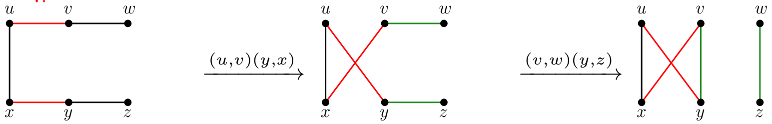
Ερώτηση 2.9: Να δειχθεί ότι για κάθε $n \geq 2$ η ακολουθία $(0, 1, 2, \ldots, n-1)$ δεν είναι γραφική.

Ερώτηση 2.10: Να δειχθεί ότι η ακολουθία $(d_1 \geq d_2, \geq \cdots \geq d_n)$ είναι γραφική ανν η ακολουθία $sorted(n - d_1 - 1, n - d_2 - 1, \ldots, n - d_n - 1)$ είναι γραφική.

Μεταγωγή:

Έστω κορυφές $x, y, z, w \in V(G)$ ενός απλού γραφήματος G και $(x, y), (z, w) \in E(G)$ αλλά $(x, z)(y, w) \notin E(G)$. Ορίζουμε ως **μεταγωγή** πάνω στο σύνολο $\{x, y, z, w\}$ την αντικατάσταση στο G των ακμών $(x, y), (z, w)$ από τις $(x, z)(y, w)$.

Παράδειγμα:



Σημείωση: Μια μεταγωγή σε ένα σύνολο 4 κορυφών ενός γραφήματος G δεν αλλάζει την ακολουθία βαθμών του G.

Ανηγμένη ακολουθία:

Έστω η ακολουθία $s = (d_1 \geq d_2, \geq \cdots \geq d_n)$. Η ακολουθία

$$(d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n)$$

ορίζεται ως η **ανηγμένη ακολουθία** της s.

Παράδειγμα: Έστω $s = (4, 3, 2, 2, 2, 2, 1)$. Η ανηγμένη ακολουθία της s είναι η $s_1 = (2, 1, 1, 1, 2, 1)$.

Θεώρημα 2.10 *[Havel-Hakimi]*:

Μία φθίνουσα ακολουθία $s = (d_1 \geq d_2, \geq \cdots \geq d_n)$ είναι γραφική ανν η ανηγμένη ακολουθία της s είναι γραφική.

Απόδειξη :

"$\Leftarrow$" Έστω $s_1 = (d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n)$ η ανηγμένη ακολουθία της s και έστω ότι η s_1 είναι γραφική.

- s_1 γραφική $\Rightarrow$ $\exists G_1$ με $V(G_1) = \{v_2, v_3, \ldots, v_n\}$

$$d(v_i) = \begin{cases} d_i - 1 & 2 \leq i \leq d_1 + 1 \\ d_i & d_1 + 2 \leq i \leq n \end{cases}$$

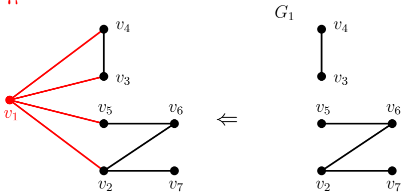
- Κατασκευάζω γράφημα $G(V, E)$: $V(G) = V(G_1) \cup \{v_1\}$

$$E(G) = E(G_1) \cup \{(v_1, v_i) : 2 \leq i \leq d_1 + 1\}$$

$\Rightarrow$ Ο G υλοποιεί την ακολουθία s.

$\Rightarrow$ Η ακολουθία s είναι γραφική. ✓

Παράδειγμα:



"$\Rightarrow$" $s = (d_1 \geq d_2, \geq \cdots \geq d_n)$ είναι γραφική. $\Rightarrow$ $s' = (d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n)$ είναι γραφική.

- s γραφική $\Rightarrow$ $\exists G = (V, E)$ με $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$: $d(v_i) = d_i, i = 1, \ldots, n$

Περίπτωση 1: $\exists u \in V(G) : d(u) = d_1$ και η u είναι γειτονική με κορυφές με βαθμούς $d_2, d_3, \ldots, d_{d_1+1}$.

$\Rightarrow G \backslash u$ έχει ακολουθία βαθμών την s'. ✓

Περίπτωση 2: $\nexists$ κορυφή u όπως στην περίπτωση 1.

- Έστω η κορυφή v_i έχει βαθμό $d(v_i) = d_i, i = 1, \ldots, n$.

Επειδή η v_1 δεν είναι γειτονική με όλες τις $v_2, v_3, \ldots, v_{d_1+1}$ $\Rightarrow$ $\exists v_j$ και v_k με $d_j > d_k$:

Η v_1 δεν είναι γειτονική με v_j.

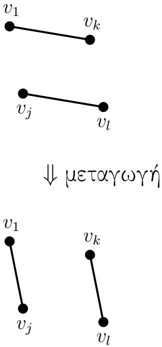
Ηv_1 είναι γειτονική με v_k.

Λόγω του ότι $d(v_j) > d(v_k)$ $\Rightarrow$ $\exists$ κορυφή v_l:

Η v_l είναι γειτονική με v_j.

Η v_l δεν είναι γειτονική με v_k.

- Μία μεταγωγή στις v_1, v_k, v_j, v_l δίνει γράφημα G' με ίδια ακολουθία βαθμών με το G.
- ΑΛΛΑ: το άθροισμα των βαθμών των γειτόνων της v_1 στο G' είναι μεγαλύτερο από το ίδιο άθροισμα στο G.

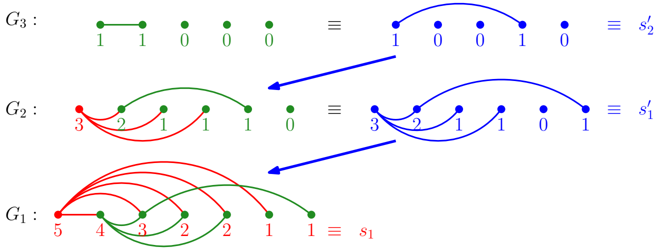


- Συνεχίζοντας, με τον ίδιο τρόπο, θα φτάσουμε στην περίπτωση 1.

$\Rightarrow$ Η s' είναι γραφική. ✓ ■

Παράδειγμα: Είναι η ακολουθία $(5,4,3,2,2,1,1)$ γραφική; Εάν ναι, να δοθεί γράφημα G που την υλοποιεί.

$$
\begin{aligned}
s_1 &= (5,4,3,2,2,1,1) \\
& \qquad\quad \downarrow \\
s_1' &= (\ 3,2,1,1,0,1) \quad \Rightarrow s_2 = sorted(s_1') \Rightarrow \\
s_2 &= (\ 3,2,1,1,1,0) \\
& \qquad\quad \downarrow \\
s_2' &= (\quad 1,0,0,1,0) \quad \Rightarrow s_3 = sorted(s_2') \Rightarrow \\
s_3 &= (\quad 1,1,0,0,0) \quad \text{Γραφική.}
\end{aligned}
$$



Θεώρημα 2.11 *[Erdös-Gallai]*:

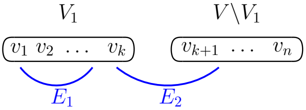
Μία φθίνουσα ακολουθία $s = (d_1 \geq d_2, \geq \cdots \geq d_n)$, $n \geq 2$, $d_1 \geq 1$ είναι γραφική ανν

i. $\sum_{i=1}^{n} d_i$ είναι άρτιο, και ii. $\forall k : 1 \leq k < n,\ \sum_{i=1}^{k} d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, d_i\}$

Απόδειξη :

i. Προφανές. ✓

ii. $\boldsymbol{\sum_{i=1}^{k} d_i}$ **:**



- E_1: $\left(\begin{array}{c}\text{Ακμές ανάμεσα} \\ \text{στις κορυφές του } V_1.\end{array}\right) \times 2$

  $\boldsymbol{\leq k(k-1)}$

- E_2: Ακμές από το V_1 στο $V \backslash V_1$. Κάθε κορυφή u του $V \backslash V_1$ ενώνεται με:

  $\left.\begin{array}{l}-\text{Το πολύ με } d_u \text{ κορυφές του } V_1. \\ -\text{Το πολύ με } k \text{ κορυφές του } V_1.\end{array}\right\}$

  $\Rightarrow$ Το πολύ με $\min\{k, d_u\}$.

  Συνολικά: $\boldsymbol{\leq \sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, d_i\}}$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, d_i\}, \forall 1 \leq k < n \quad ✓$$

■

Ερώτηση 2.11: Να δειχθεί ότι για πολυγραφήματα ισχύει:

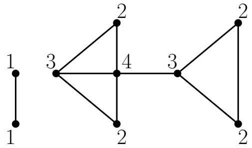
$$\left.\begin{array}{l}\text{Η φθίνουσα ακολουθία}\\ s=(d_1\geq d_2,\geq\cdots\geq d_n), n\geq 2, d_1\geq 1\\ \text{είναι γραφική.}\end{array}\right\}\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} d_i \text{ είναι άρτιο.}$$

Σύνολα βαθμών κορυφών:

Δεδομένου γραφήματος G συμβολίζουμε με D_G το **σύνολο των [διακριτών] βαθμών** των κορυφών του G.

Παράδειγμα:

G :



$$s=(4,3,3,2,2,2,2,1,1)$$
$$D_G=\{4,3,2,1\}$$

Θεώρημα 2.12 *[Kapoor-Polimeni-Wall]*:

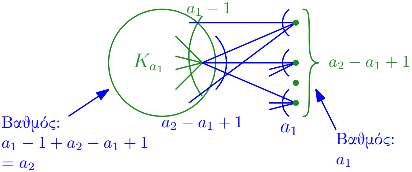
Για κάθε σύνολο θετικών ακεραίων $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $n \geq 1$, με $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, υπάρχει γράφημα G με σύνολο βαθμών $D_G = S$. Επιπλέον υπάρχει τέτοιο γράφημα G με $|V(G)| = a_n + 1$.

Απόδειξη [Κατασκευαστικά, με επαγωγή ως προς το n.]:

- Ο βαθμός του G είναι $\geq a_n + 1$. Άρα, θα δείξουμε ότι υπάρχει G με $|V(G)| = a_n + 1$.

$n = 1$ Το πλήρες γράφημα K_{a_n+1} με $a_n + 1$ κορυφές είναι το ζητούμενο.
Όλες οι κορυφές του έχουν βαθμό a_1. ✓

$n = 2$ Συμβολίζουμε με A_λ το γράφημα με λ κορυφές και χωρίς ακμές.
$A_\lambda = (\{v_1, v_2, \ldots, v_\lambda\}, \emptyset)$
Το γράφημα $K_{a_1} * A_{a_2-a_1+1}$ [$*$: σύνδεση γραφημάτων]:



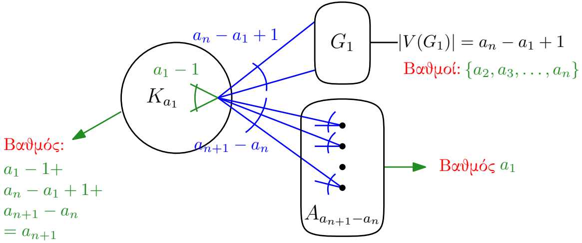
- Έχει σύνολο βαθμών $\{a_1, a_2\}$ ✓
- $|V(G)| = a_2 - a_1 + 1 + a_1 = a_2 + 1$ ✓

Ε.Υ. Για κάθε σύνολο θετικών ακεραίων $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ με $a_1 < a_2 < \cdots < a_m$ και $1 \le m < n$, ισχύει ότι:

i. Υπάρχει γράφημα G με σύνολο βαθμών S. ii. $|V(G)| = a_m + 1$

Ε.Β.

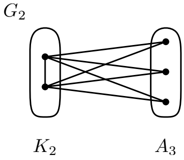
- Έστω σύνολο $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$ με $a_i \in \mathbb{N}^+$, $a_1 < \cdots < a_n < a_{n+1}$
- Από Ε.Υ., $\exists$ γράφημα G_1 με σύνολο βαθμών $\{a_2 - a_1, a_3 - a_1, \ldots, a_n - a_1\}$ και $|V(G_1)| = a_n - a_1 + 1$.
- Θεωρήστε το γράφημα $G = K_{a_1} * (A_{a_{n+1}-a_n} \cup G_1)$.



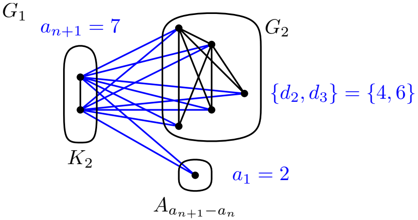
- Έχει σύνολο βαθμών $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$. ✓
- $|V(G)| = \underbrace{a_1}_{K_{a_1}} + \underbrace{a_{n+1} - a_n}_{A_{a_{n+1}-a_n}} + \underbrace{a_n - a_1 + 1}_{G_1} = a_{n+1} + 1$ ✓ ■

Παράδειγμα: Να κατασκευαστεί γράφημα με 8 κορυφές και σύνολο βαθμών $\{2, 4, 6, 7\}$.

- $D_1 = \{2, 4, 6, 7\} \rightarrow D_2 = \{d_2 - d_1, d_3 - d_1\} = \{2, 4\}$



$|V(G_2)| = 5$



- $D_{G_1} = \{2, 4, 6, 7\}$
- $|V(G_1)| = 8$