Θεωρία Γραφημάτων
1η Διάλεξη

Α. Συμβώνης

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
Τομέας Μαθηματικών

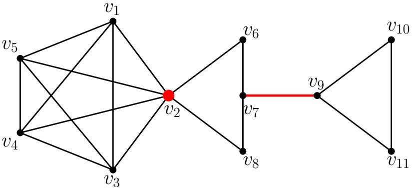
Φεβρουάριος 2017

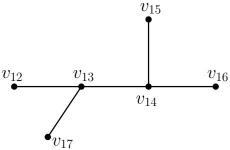
Εισαγωγή

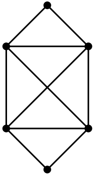
Διδάσκων:	Αντώνιος Συμβώνης			
	ΣΕΜΦΕ, κτίριο Ε, 3.18			
	symvonis@math.ntua.gr			
	www.math.ntua.gr/˜symvonis			
	mycourses …ΗΜΜΥ/ΕΜΦΕ			
Βοηθός Διδασκαλίας:	Χρυσάνθη Ραυτοπούλου			
	Κτίριο Ε, 2.22			
Διαλέξεις:	Τετάρτη	10:45-12:30	}	Αίθουσα 001
	Παρασκευή	9:00-10:30		Νέο κτίριο ΣΕΜΦΕ
Σύγγραμμα:	“Θεωρία Γραφημάτων”			
	Αλέξανδρος Παπαϊωάννου			
	Πανεπιστημιακές εκδόσεις ΕΜΠ			
Αξιολόγηση:	Γραπτές Ασκήσεις:	15%		
	Γραπτό Διαγώνισμα:	85%		

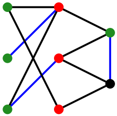
Θεματικές ενότητες

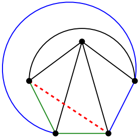
1. Εισαγωγή, βασική ορολογία
2. Βαθμοί κορυφών
3. Μονοπάτια, κύκλοι, αποστάσεις
4. Συνεκτικότητα
5. Δένδρα
6. Eulerian γραφήματα
7. Hamiltonian γραφήματα
8. Χρωματισμός κορυφών
9. Ταιριάσματα (matchings)
10. Χρωματισμός ακμών
11. Επίπεδα γραφήματα



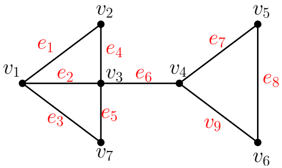








Γράφημα



$G = (V, E)$

$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}_{n \geq 0}$

$E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}_{m \geq 0}$

$e_i = (u, v)_{\substack{i=1\dots m \\ u,v \in V \\ u \neq v}}$

$V = \{v_1, v_2, \dots, v_7\}$

$E = \{e_1, e_2, \dots, e_9\}$

Τάξη: $n = |V| = |V(G)|$

Μέγεθος: $e = |E| = |E(G)|$

Τάξη: 7

Μέγεθος: 9

Γειτονιά κορυφής: $N(u)$

$N(u) = \{v | (u, v) \in E\}$

$\mathrm{N}(W)_{W \subseteq V} = \{v | (u, v) \in E, u \in W, v \in V \setminus W\}$

$N(v_1) = \{v_2, v_3, v_7\}$

$N(v_5) = \{v_4, v_6\}$

$N(\{v_2, v_4\}) = \{v_1, v_3, v_5, v_6\}$

Βαθμός κορυφής: $d_G(u) = |N(u)|$

Ελάχιστος βαθμός: $\delta(G) = \min_{u \in V} d_G(u)$

Μέγιστος βαθμός: $\Delta(G) = \max_{u \in V} d_G(u)$

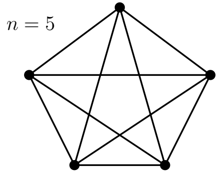
$d(v_1) = 3$, $d(v_3) = 4$

$\delta(G) = 2$

$\Delta(G) = 4$

Ερώτηση 1.1: Ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός ακμών ενός γραφήματος με n κορυφές;

Ερώτηση 1.2: Πόσα γραφήματα υπάρχουν με n κορυφές;



Λήμμα 1.1:

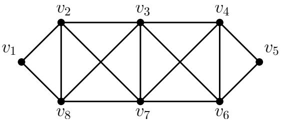
Έστω γράφημα $G = (V, E)$. Τότε, ισχύει:

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E| \qquad (1)$$

Λήμμα 1.2:

Κάθε γράφημα έχει άρτιο αριθμό από κορυφές περιττού βαθμού.

Περίπατοι-περιηγήσεις



Περίπατος:

Ακολουθία κορυφών $\langle u_1 \; u_2 \; \dots \; u_k \rangle$ όπου $(u_i, u_{i+1}) \in E, i = 1, \dots, k-1$

$\langle v_1 \; v_2 \; v_8 \; v_3 \; v_2 \; v_7 \rangle$

Μπορεί να επαναλαμβάνονται κορυφές.

Περιήγηση:

Περίπατος με ταυτόσημη πρώτη και τελευταία κορυφή. $\langle u_1 \; u_2 \; \dots \; u_k = u_1 \rangle$

$\langle v_1 \; v_2 \; v_8 \; v_3 \; v_2 \; v_1 \rangle$

Μονοπάτι:

Περίπατος χωρίς επαναλαμβανόμενες κορυφές.

Κύκλος:

Περιήγηση χωρίς επαναλαμβανόμενες κορυφές (με εξαίρεση την v_1).

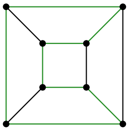
Εναλλακτικά:

Περίπατος	–	Περιήγηση	–	Μονοπάτι	–	Κύκλος
$\updownarrow$		$\updownarrow$		$\updownarrow$		$\updownarrow$
Μονοπάτι		Κύκλος		Απλό Μονοπάτι		Απλός Κύκλος

- Μήκος { περιπάτου / περιήγησης / μονοπατιού / κύκλου } $\langle u_1 \; u_2 \; \ldots \; u_k \rangle = k - 1$
  = ο αριθμός των ακμών που περιλαμβάνει.

Hamiltonian γραφήματα:

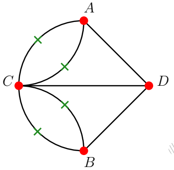
Τα γραφήματα που περιέχουν κύκλο μήκους $|V|$.

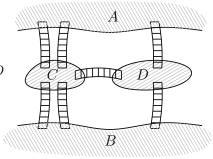


- Κύκλος/μονοπάτι Hamilton

Eulerian γραφήματα:

Τα γραφήματα που περιέχουν περιήγηση μεγέθους $|E|$ η οποία περιλαμβάνει όλες τις ακμές.





- Κύκλος/μονοπάτι Euler

Συνεκτικό γράφημα:

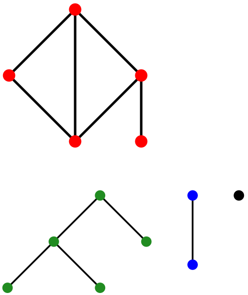
Υπάρχει μονοπάτι ανάμεσα σε κάθε ζεύγος κορυφών του.

Συνεκτική συνιστώσα:

Μεγιστοτικό συνεκτικό υπογράφημα.

Δένδρο:

Συνεκτικό γράφημα χωρίς κύκλους.



Λήμμα 1.3:

Κάθε δένδρο έχει τουλάχιστον μια κορυφή βαθμού 1.

Θεώρημα 1.4 :

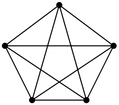
Έστω δένδρο $T(V, E)$. Τοτε, ισχύει:

$$|E| = |V| - 1$$

Ειδικά γραφήματα

- **Πλήρες γράφημα – κλίκα**

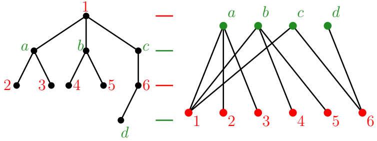
K_5



$$|V(K_n)| = n$$
$$|E(K_n)| = \frac{n(n-1)}{2}$$
$$d_{K_n}(u) = n-1, u \in V(K_n)$$

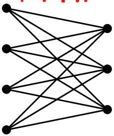
- **Διμερή γραφήματα**

$$G = (A \cup B, E) : \nexists e = (u,v) \in E : (u \in A \ \text{ AND } \ v \in A) \ \text{ OR } \ (u \in B \ \text{ AND } \ v \in B)$$



- **Πλήρη διμερή γραφήματα**

$K_{4,3}$



$$|V(K_{m,n})| = m + n$$
$$|E(K_{m,n})| = mn$$

Ερώτηση 1.3: Να δειχθεί ότι ένα διμερές γράφημα έχει μόνο άρτιου μήκους κύκλους/περιηγήσεις.

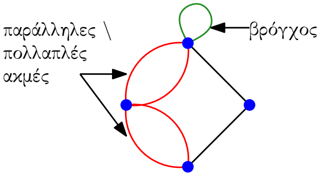
Ερώτηση 1.4: Να δειχθεί (με χρήση γραφημάτων) ότι

$$\binom{m+n}{2} = \binom{m}{2} + \binom{n}{2} + mn$$

Κανονικά γραφήματα:

Γραφήματα με ίδιο βαθμό για όλες τις κορυφές τους.

- k-κανονικό: $d_G(v) = k, \forall v \in V(G)$
- G k-κανονικό $\Rightarrow |E(G)| = \frac{k|V(G)|}{2}$



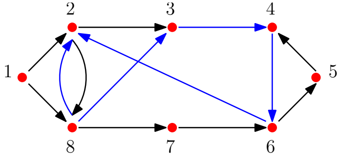
Απλά γραφήματα:

- Χωρίς βρόγχους.
- Χωρίς πολλαπλές ακμές.

Κατευθυνόμενα γραφήματα:

- Κάθε ακμή είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος κορυφών

.



Έσω-βαθμός: $d^-(v) = |\{e : e = (u,v) \in E\}|$

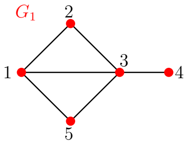
Έξω-βαθμός: $d^+(v) = |\{e : e = (v,u) \in E\}|$

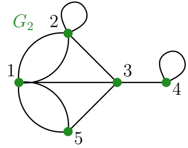
Λήμμα 1.5:

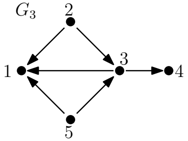
$$\sum_{v \in V} d^-(v) = \sum_{v \in V} d^+(v) = |E|$$

Ερώτηση 1.5: Πόσα κατευθυνόμενα γραφήματα n κορυφών υπάρχουν;

Αναπαράσταση γραφημάτων







Πίνακας γειτνίασης

G_1:

	1	2	3	4	5
1		1	1		1
2	1		1		
3	1	1		1	1
4			1		
5	1		1		

G_2:

	1	2	3	4	5
1		2	1		2
2	2	1	1		
3	1	1		1	1
4			1	1	
5	2		1		

G_3:

	1	2	3	4	5
1					
2	1		1		
3	1			1	
4					
5	1		1		

Λίστα γειτνίασης

G_1

1 → 2 → 3 → 5
2 → 1 → 3
3 → 1 → 2
4 → 3
5 → 3 → 1

G_2

1 → <u>2</u> → <u>2</u> → 3 → <u>5</u> → <u>5</u>
2 → <u>1</u> → <u>1</u> → 2 → 3
3 → 1 → 2 → 4 → 5
4 → 3 → 4
5 → <u>1</u> → <u>1</u> → 3

G_3

1 ⊣
2 → 1 → 3
3 → 1 → 4
4 ⊣
5 → 1 → 3

Ισομορφικά γραφήματα:

Δύο γραφήματα G και H είναι **ισομορφικά** αν υπάρχει $1-1$ και επί απεικόνιση $\sigma : V(G) \to V(H)$ τέτοια ώστε $\forall u, v \in V(G), u \neq v$ να ισχύει $(u, v) \in E(G) \Leftrightarrow (\sigma(u), \sigma(v)) \in E(H)$.

$G \simeq H$: Το G είναι ισομορφικό με το H.

Θεώρημα 1.6 :

Η σχέση $\simeq$ είναι σχέση ισοδυναμίας.

Σχέση ισοδυναμίας:

Αντανακλαστική	$G \simeq G$
Συμμετρική	$G \simeq H \Leftrightarrow H \simeq G$
Μεταβατική	$G \simeq H \wedge H \simeq F \Leftrightarrow G \simeq F$

- Ένα γράφημα είναι ισόμορφο με άπειρο πλήθος γραφημάτων (που ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας).
- Γραφήματα αντιπρόσωποι (χωρίς ονόματα στις κορυφές).

K_n:	Πλήρες γράφημα n κορυφών.
$K_{m,n}$:	Πλήρες διμερές γράφημα $K_{m,n} = (A \cup B, E)$ με $\lvert A\rvert = m$ και $\lvert B\rvert = n$.
P_n:	Μονοπάτι με n κορυφές.
C_n:	Κύκλος με n κορυφές.

Πράξεις και τοπικοί μετασχηματισμοί γραφημάτων

Συμπλήρωμα γραφήματος (ή Συμπληρωματικό γράφημα):

$$\overline{G} = \{V(G), \{(u,v) : u, v \in V(G) \wedge (u,v) \notin E(G)\}\}$$

- $\overline{\overline{G}} = G$

Διαγραφή κορυφής $[G \setminus v]$:

$$G \setminus v = \{V(G) \setminus v, E(G) \setminus \{(u,v) : (u,v) \in E(G)\}\}$$

- $G \setminus S$, όπου $S \subseteq V(G)$

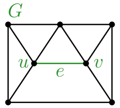
Διαγραφή ακμής $[G \setminus e]$:

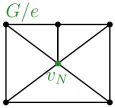
$$G \setminus e = (u,v) = \{V(G), E(G) \setminus (u,v)\}$$

- $G \setminus A$, όπου $A \subseteq E(G)$

Σύμπτυξη ακμής (edge contraction) $G/e = (u, v)$:

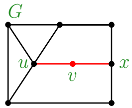
$$G/e = (u, v) = \{V(G) \setminus \{u, v\} \cup \{v_N\}, E(G) \setminus (u, v) \cup \{(v_N, x) : x \in N(u) \cup N(v)\}\}$$

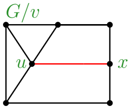




Διάλυση κορυφής v, $d_G(v) = 2$, $[G/v]$:

$$G/v = \{V(G) \setminus \{v\},\ E(G) \setminus \{(u, v), (v, x)\} \cup \{(u, x)\} : (u, v), (v, x) \in E(G)\}$$

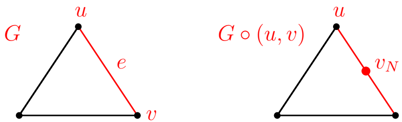




- Έστω $N_G(v) = \{u, x\}$. Τότε
  $G/v = G/(v, u) = G/(v, x)$

Υποδιαίρεση ακμής $[G \circ e]$, $e = (u, v)$:

$$G \circ (u, v) = \{V(G) \cup \{v_N\}\,,\ E(G) \setminus \{(u, v)\} \cup \{(u, v_N), (v, v_N)\}\}$$



- Το γράφημα H είναι υποδιαίρεση του γραφήματος G αν το H προκύπτει από το G με διαδοχικές υποδιαιρέσεις ακμής.

Διακεκριμένα γραφήματα (ξένα μεταξύ τους):

G, H είναι **διακεκριμένα** εάν $V(G) \cap V(H) = \emptyset$

Ένωση:

$$G \cup H = (V(G) \cup V(H), E(G) \cup E(H))$$

Διακεκριμένη ένωση:

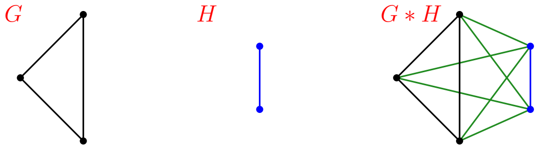
$G + H$ αν G, H διακεκριμένα.

Τομή:

$$G \cap H = (V(G) \cap V(H), E(G) \cap E(H))$$

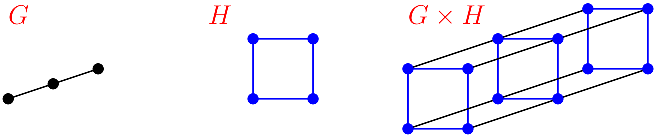
Σύνδεση διακεκριμένων γραφημάτων $[G * H]$:

$$G * H = \{V(G) \cup V(H), E(G) \cup E(H) \cup \{(u,v) : u \in V(G), v \in V(H)\}\}$$



Γινόμενο διακεκριμένων γραφημάτων $[G \times H]$:

$$\begin{aligned} G \times H : \quad V(G \times H) = &\quad \{(u,v) : u \in V(G), v \in V(H)\} \\ E(G \times H) = &\quad \{\{((u,x),(v,x)) : (u,v) \in E(G), x \in V(H)\} \cup \\ &\quad \{((u,x),(u,y)) : u \in V(G), (x,y) \in E(H)\}\} \end{aligned}$$



- Η ένωση, η σύνδεση και το γινόμενο γραφημάτων είναι πράξεις

  προσεταιριστικές και αντιμεταθετικές

  $\downarrow$ $\downarrow$

  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ $\quad a \cdot b = b \cdot a$

  - $kG \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{G \cup G \cup \cdots \cup G}_{k \text{ φορές}}$
  - $G^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{G * G * \cdots * G}_{k \text{ φορές}}$
  - $G^{[k]} \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{G \times G \times \cdots \times G}_{k \text{ φορές}}$

Σημείωση: Για τις πράξεις της ένωσης και της σύνδεσης υποθέτουμε ότι συμμετέχουν k διακεκριμένα ισομορφικά με το G γραφήματα.

Υπογράφημα $[H \subseteq G]$:

$H \subseteq G$ εάν $V(H) \subseteq V(G)$ και $E(H) \subseteq E(G)$

- Το G είναι υπεργράφημα του H.

Επαγόμενο υπογράφημα:

Το γράφημα H είναι **επαγόμενο υπογράφημα** του G εάν $V(H) \subseteq V(G)$ και $\forall u, v \in V(H), (u, v) \in E(H) \Leftrightarrow (u, v) \in E(G)$.

- Κάθε επαγόμενο υπογράφημα προκύπτει από διαγραφές κορυφών.

Παραγόμενο υπογράφημα:

Το γράφημα H είναι **παραγόμενο υπογράφημα** του G εάν $V(H) = V(G)$ και $E(H) \subseteq E(G)$.

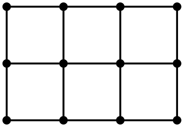
- Κάθε παραγόμενο υπογράφημα προκύπτει από διαγραφές ακμών.

Πλέγμα $R_{p,q}$

$$V(R_{p,q}) = \{\{u_1, u_2 \ldots, u_p\} \times \{v_1, v_2, \ldots, v_q\}\}$$
$$E(R_{p,q}) = \Big\{\Big\{((u_i, v_j), (u_{i'}, v_{j'}))\Big\} : |i - i'| + |j - j'| = 1\Big\}$$

$$|V(R_{p,q})| = pq$$
$$|E(R_{p,q})| = p(q-1) + q(p-1)$$

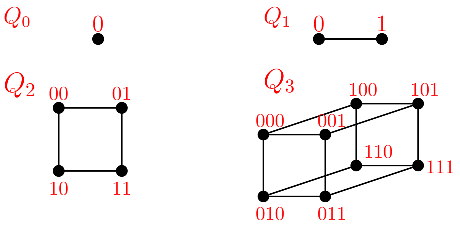
$R_{3,4}$



- $R_{p,q} = P_p \times P_q$
- Torus: $T_{p,q} = C_p \times C_q$

Υπερκύβος Q_n (Hyper-cube)

- $Q_n = P_2 \times Q_{n-1}$
- $|V(Q_n)| = 2^n$
- $|E(Q_n)| = n2^{n-1}$
- διάμετρος$(Q_n) = n$



Ερώτηση 1.6: Είναι ο υπερ-κύβος Q_n Hamiltonian;

Ερώτηση 1.7: Είναι ο υπερ-κύβος Q_n Eulerian;

Ερώτηση 1.8: Σε ένα δένδρο προσθέτουμε k ακμές έτσι ώστε να προκύψει ένα απλό γράφημα. Δείξτε ότι το γράφημα περιέχει k κύκλους.

Ερώτηση 1.9: Έστω G ένα απλό συνεκτικό γράφημα με n κορυφές και $m \geq 2n - 2$ ακμές. Δείξτε ότι το G περιέχει δύο κύκλους ίσου μήκους.