Πρόλογος

Η εμφάνιση των μαθηματικών στους αρχαίους χρόνους (Βαβυλωνία, Αίγυπτο, Κίνα), συνδέεται με την αντιμετώπιση απλών ανθρωπίνων αναγκών, όπως η κατανομή κοπαδιών μεταξύ φυλών ή οικογενειών (Αριθμητική), η συλλογή εσοδειών ή η είσπραξη φόρων (Λογιστική) και η διανομή γαιών (Γεωμετρία, Γεωδαισία), ή η αναδιανομή αυτών μετά. από πλημμύρες (Νείλος, Μεσοποταμία). Οι διαδικασίες αυτές, μπορούμε να ισχυριστούμε, πως καθορίζουν την εμβρυική μορφή των **Εφαρμοσμένων Μαθηματικών**. Οι αρχαίοι Έλληνες είναι εκείνοι, που διαπίστωσαν πως, η απόδειξη των θεωρημάτων, μπορεί να στηρίζεται σε ένα σύνολο αξιωμάτων και λογικών συλλογισμών, θέτοντας έτσι τις βάσεις των **Θεωρητικών Μαθηματικών**.

Πολλές φορές, στα θεωρητικά μαθηματικά, οι έννοιες είναι τόσο αφηρημένες, ώστε η λογική να αποτελεί το μόνο εργαλείο για την επαλήθευση μιας θεωρίας. Αντίθετα, στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, η εμπειρική επαλήθευση αποτελεί ένα απαραίτητο και αναγκαίο στοιχείο. Εν τούτοις, η σχέση μεταξύ θεωρητικών και εφαρμοσμένων μαθηματικών, είναι ιδιαίτερα στενή και συμπληρωματική. Συχνά, αυστηρά θεωρητικά αποτελέσματα αποτελούν πολύτιμα εργαλεία ερμηνείας φυσικών φαινομένων. Επίσης, αρκετές από τις καθαρά μαθηματικές θεωρίες και έννοιες, οφείλουν την εμφάνισή τους στις απαιτήσεις, που προκύπτουν κατά την προσπάθεια ερμηνείας σύνθετων φυσικών ή βιολογικών ή κοινωνικών φαινομένων και προβλημάτων.

Η σχέση των μαθηματικών με τη φύση και τη ζωή, είναι τόσο στενή, ώστε να οδηγήσει μεγάλους διανοητές σε μεταφυσικές απαντήσεις.[1] Υπάρχει δηλαδή μια βαθειά πίστη ότι, στη φύση κυριαρχεί η λογική, η αρμονία και η τάξη. Αντίθετα, στις κοινωνικές και οικονομικές επιστήμες, ίσως είναι η λογική, που έχει χρησιμοποιηθεί από τον άνθρωπο για βελτίωση και η οποία προσδίδει ένα ευρύτατο ρόλο στα μαθηματικά, καθ' όσον αυτά αποτελούν την επιστήμη των αυστηρά δομημένων συλλογισμών. Κλασικά παραδείγματα, μπορούν να βρεθούν στο έργο μεγάλων μαθηματικών, όπως οι I. Newton, G. Leibniz, L. Euler, J. Lagrange, J. Fourier, K. Gauss, A. Cauchy, B. Riemann, H. Poincaré, V. Volterra, κ.α.

[1] "Ο Θεός είναι Αριθμός" Πυθαγόρας, "Ο Θεός αεί γεωμετρεί" Πλάτων, "Ο Θεός πάντα αριθμίζει" Jacobi.

«Οι Διαφορικές Εξισώσεις αποτελούν τον ακρογωνιαίο λίθο των εφαρμοσμένων μαθηματικών», όπως έλεγε ο Solomon Lefschetz. Από την εποχή της διαμόρφωσης και αναλυτικής μελέτης των πρώτων διαφορικών εξισώσεων, πριν 300 χρόνια από τους Newton και Leibniz, μέχρι τις αρχές του 1800, που ο Cauchy απέδειξε ότι, οι διαφορικές εξισώσεις πράγματι ορίζουν συναρτήσεις, οι ερευνητές ασχολούντο με την εύρεση συγκεκριμένων λύσεων αυτών. Όμως, ακόμα και αυτές οι ελάχιστες συγκεκριμένες λύσεις που δόθηκαν, είχαν σημαντική συνεισφορά στην ανάπτυξη της Μηχανικής, γενικότερα της Φυσικής και κατ' επέκταση της βιομηχανικής επανάστασης, που ακολούθησε κατά το δέκατο ένατο αιώνα.

Στις μέρες μας, η ολοένα αυξανόμενη πολυπλοκότητα των βιομηχανικών διαδικασιών και δραστηριοτήτων, ιδιαίτερα κατά το δεύτερο ήμισυ του εικοστού αιώνα, απαιτεί την ουσιαστικότερη συνεισφορά των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, κατά κύριο λόγο με τη μορφή της μαθηματικής προτυποποίησης και των υπολογιστικών μαθηματικών. Οι σύγχρονα οργανωμένες βιομηχανίες και επιχειρήσεις διαπιστώνουν ότι, η μαθηματική ανάλυση και η αριθμητική προσομοίωση, μπορούν να αντικαταστήσουν μακροχρόνια πειράματα για το σχεδιασμό νέων προϊόντων, με σκοπό τη σημαντική ελάττωση κόστους και τη δυνατότητα μεγαλύτερης ευελιξίας επιλογών. Οι απαιτήσεις αυτές στο αντικείμενο των διαφορικών εξισώσεων, καλύπτονται σε σημαντικό βαθμό από τις σύγχρονες θεωρίες των Μη Γραμμικών Εξισώσεων και των Δυναμικών Συστημάτων, των οποίων οι ρίζες βρίσκονται πίσω, στις εργασίες των **Aleksandr Mikhailovich Lyapunov** και **Jules Henri Poincaré**, κατά το τέλος του 19ου αιώνα.

Η μελέτη των γεωμετρικών ιδιοτήτων των λύσεων, της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς τους και της ευστάθειας αυτών, αποτελούν μερικά από τα βασικά χαρακτηριστικά της ποιοτικής θεωρίας των διαφορικών εξισώσεων. Μάλιστα, η μελέτη αυτή μπορεί να γίνει χωρίς τη γνώση των ίδιων των λύσεων ή τη δυνατότητα επίλυσης της αντίστοιχης εξίσωσης. Η ανάπτυξη των μη γραμμικών θεωριών, παράλληλα με την με ταχύτατους ρυθμούς αύξηση της υπολογιστικής ικανότητας των σύγχρονων υπολογιστών, βοήθησαν καθοριστικά. στην έκρηξη της Επιστημονικό-Τεχνολογικής Επανάστασης των τελευταίων δεκαετιών, πράγμα που οδήγησε στην Κοινωνία και την Οικονομία της γνώσης του σήμερα.

Θα μπορούσε βέβαια, να ισχυρισθεί κάποιος ότι, η ύπαρξη τέτοιων μεγάλων υπολογιστών, έχει εκμηδενίσει όλα τα προβλήματα. Μερικές παρατηρήσεις, ίσως διαφωτίσουν το θέμα αυτό. Εάν επιθυμούμε να βρούμε μια συγκεκριμένη λύση, τότε πράγματι η ύπαρξη ενός ισχυρού υπολογιστή, ίσως αποδειχθεί ιδιαίτερα χρήσιμη. Όμως, συχνά αναζητούμε ποιοτικές πληροφορίες, όπως ασυμπτωτική συμπεριφορά και ευστάθεια, όσον αφορά το σύνολο όλων των λύσεων μιας εξίσωσης ή τις αναλλοίωτες ιδιότητες των λύσεων ενός συνόλου «μικρών» διαταραχών μιας συγκεκριμένης εξίσωσης. Επίσης, συχνά χρειάζεται να μελετήσουμε ένα σύστημα με άπειρες εξισώσεις, όπως για παράδειγμα πρότυπα προερχόμενα από προβλήματα βιομηχανικού σχεδίου, από το οποίο εμείς θέλουμε να επιλέξουμε εκείνες τις εξισώσεις, που ικανοποιούν συγκεκριμένες συνθήκες, όπως σύγκλιση των λύσεων σε δοσμένο σημείο ή λύσεις με πεπερασμένο φράγμα. Για την επίλυση προβλημάτων του είδους αυτού, κανένας υπολογιστής, οποιασδήποτε δυναμικότητας, δεν μπορεί να βοηθήσει. Εντούτοις, πολλά από αυτά έχουν διερευνηθεί και απαντηθεί ικανοποιητικά, με την εφαρμογή των αποτελεσμάτων της ποιοτικής θεωρίας.

Όμως, όσα αναφέρθηκαν, δεν θα πρέπει να δημιουργήσουν την εντύπωση ότι, όλα τα προβλήματα θα μπορούν πλέον να βρίσκουν τη λύση τους ή ότι οι διαφορικές εξισώσεις θα μπορούν να ικανοποιούν όλες τις απαιτήσεις της Τεχνολογίας και των Επιστημών. Αυτό γιατί, αφ' ενός μεν, τα διαμορφωμένα προβλήματα αποτελούν μια απλοποιημένη προσέγγιση της πραγματικότητας, αφ' ετέρου δε, είναι αδύνατο γενικά να γίνει πρόβλεψη των πιθανών διαταραχών, που μπορεί να υποστεί ένα συγκεκριμένο σύστημα.

ΜΕΡΟΣ Α. ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Έτσι, στηριζόμενοι στους παραπάνω συλλογισμούς, μπορούμε να χωρίσουμε την ύλη του Μέρους Α του συγγράμματος αυτού, σε δύο βασικές ενότητες. Η πρώτη ενότητα, περιλαμβάνει τη θεωρία, που βρίσκει εφαρμογή στις μη γραμμικές συνήθεις διαφορικές εξισώσεις και συστήματα και αφορά την Ενότητα 1.3, το Κεφάλαιο 2 (εκτός της Ενότητας 2.4), το Κεφάλαιο 3, την Ενότητα 4.1 του Κεφαλαίου 4 και σχεδόν στο σύνολο του το Κεφάλαιο 8, όπου αναπτύσσεται η γεωμετρική ποιοτική θεωρία κατ' αρχήν της Ευστάθειας και στη συνέχεια των Διακλαδώσεων. Στο υπόλοιπο τμήμα του Μέρους Α γίνεται μια συστηματική παρουσίαση της γενικής θεωρίας των γραμμικών συνήθων διαφορικών εξισώσεων και συστημάτων, ανάπτυξη των βασικών τεχνικών εύρεσης των λύσεων και παράθεση σημαντικού αριθμού εφαρμογών, προερχομένων από διάφορες περιοχές των φυσικών διεργασιών και της ανθρώπινης δράσης.

Πιο συγκεκριμένα, στο Κεφάλαιο 1, δίδονται οι βασικές έννοιες των συνήθων διαφορικών εξισώσεων, τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των λύσεων, γίνεται αναφορά στη διαδικασία μαθηματικής προτυποποίησης και μια ιστορική αναδρομή στην εξέλιξη των συνήθων διαφορικών εξισώσεων.

Στο Κεφάλαιο 2, παρουσιάζονται χαρακτηριστικές περιπτώσεις συνήθων διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης. Στο κεφάλαιο αυτό ?σε αντίθεση με τα ειωθότα ? γίνεται παρουσίαση ενός σχετικά μεγάλου αριθμού οικογενειών και μεθόδων επίλυσης εξισώσεων πρώτης τάξης. Αυτό γίνεται για να δοθεί στο φοιτητή και γενικά στο μελετητή που έρχεται για πρώτη φορά σε επαφή με το αντικείμενο των διαφορικών εξισώσεων, να μπορέσει, επιλύοντας διάφορες μη γραμμικές κυρίως εξισώσεις να αποκτήσει την αναγκαία εξοικείωση και αυτοπεποίθηση, ώστε να προχωρήσει με πιο σταθερά βήματα στην περαιτέρω εξερεύνηση ενός όντως πολύ ενδιαφέροντος, σύνθετου και ιδιαίτερα δύσβατου αντικειμένου, ειδικά στις πιο σημαντικές και χρήσιμες μη γραμμικές περιοχές του.

Στο Κεφάλαιο 3, γίνεται εισαγωγή στις βασικές ποιοτικές αναλυτικές μεθόδους μελέτης των συνήθων διαφορικών εξισώσεων και συστημάτων. Μεθόδους που προσπαθούν να απαντήσουν τα βασικά ερωτήματα ύπαρξης, μοναδικότητας και επεκτασιμότητας της λύσης. Ακόμα αναπτύσσονται θέματα εξάρτησης της λύσης από τα αρχικά δεδομένα καθώς και διαφόρους παραμέτρους, που εμφανίζονται στις εξισώσεις. Επίσης παρουσιάζονται απλές μορφές της πολύ σημαντικής ανισότητας Gronwall, η οποία αποτελεί ένα βασικό εργαλείο για την αντιμετώπιση των βασικών ερωτημάτων κατά την αναλυτική μελέτη προβλημάτων τόσο συνήθων όσο και μερικών διαφορικών εξισώσεων.

Στο Κεφάλαιο 4, μετά από μια σύντομη ενασχόληση με ειδικές μορφές μη γραμμικών εξισώσεων 2ης τάξης, αναπτύσσεται συστηματικά η θεωρία των γραμμικών (ομογενών και μη) εξισώσεων 2ης και ανώτερης τάξης. Αφ' ενός παρουσιάζονται τα βασικά χαρακτηριστικά του συνόλου των λύσεων των ομογενών και μη γραμμικών εξισώσεων τυχαίας τάξης, αφ εταίρου δε δίδονται οι βασικές τεχνικές επίλυσης διαφόρων μορφών ομογενών ή μη με σταθερούς ή όχι συντελεστές, οποιαδήποτε τάξης.

Στο Κεφάλαιο 5, μετά από μια σύντομη ενασχόληση με τη θεωρία των ακολουθιών και σειρών συναρτήσεων και την ειδική μορφή αυτών, τις δυναμοσειρές, παρουσιάζονται κατά συστηματικό τρόπο οι μέθοδοι επίλυσης γραμμικών συνήθων διαφορικών εξισώσεων με μη σταθερούς συντελεστές γύρω από ομαλό και κανονικό ανώμαλο σημείο. Στο κεφάλαιο αυτό και πριν την ανάπτυξη της επίλυσης γύρω από κανονικό ανώμαλο σημείο, εισάγεται και μελετάται η εξίσωση Euler. Η μέθοδος μελέτης της εξίσωσης Euler δίδει τις ιδέες για τη μελέτη εξίσωσης γύρω από κανονικό ανώμαλο σημείο. Στο Κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται επίσης τα βασικά χαρακτηριστικά ορισμένων ειδικών συναρτήσεων, όπως Legendre, Bessel, Hermite, Chebyshev, Laguerre, Airy, κλπ. Συναρτήσεις, οι οποίες προκύπτουν ως λύσεις των αντιστοίχων γραμμικών συνήθων διαφορικών εξισώσεων με μη σταθερούς συντελεστές.

Στο Κεφάλαιο 6, παρουσιάζεται η γενική θεωρία και οι τεχνικές επίλυσης των γραμμικών (ομογενών και μη) συστημάτων 1ης τάξης οσωνδήποτε εξισώσεων. Σε αυτό το κεφάλαιο ουσιαστικά επαναδιατυπώνουμε τα θέματα που αναπτύχθηκαν στο Κεφάλαιο 4 σε περιβάλλον πινάκων και διανυσμάτων, με τις όποιες βέβαια επιμέρους ιδιαιτερότητες. Εδώ επίσης εισάγεται και μελετάται η έννοια του εκθετικού πίνακα, που αποδεικνύεται ιδιαίτερα χρήσιμος στην επίλυση συστημάτων με πολλαπλές ιδιοτιμές.

Στο Κεφάλαιο 7, εισάγουμε μια εντελώς διαφορετική τεχνική αυτή του Μετασχηματισμού Laplace. Η μέθοδος του Μετασχηματισμού Laplace, μέρος του ευρύτερου συνόλου των Ολοκληρωτικών Μετασχηματισμών, όπως Fourier, Hankel, Mellin, Hilbert, Weierstrass, Stieltjes, Radon, Wavelet, Hartley, κλπ, βοηθά καθοριστικά στην επίλυση γραμμικών προβλημάτων αρχικών και συνοριακών συνθηκών, που δεν μπορούν να επιλυθούν με τις τεχνικές που αναπτύχθηκαν στα προηγούμενα Κεφάλαια 4 -6. Η παρουσία ασυνεχών ή γενικευμένων συναρτήσεων στο μη ομογενή όρο του προβλήματος, επιβάλει την προσφυγή σε ολοκληρωτικό μετασχηματισμό, πράγμα που επιτρέπει την απορρόφηση και εν γένει παραγωγική διαχείριση αυτών των ιδιαιτεροτήτων. Η μέθοδος αυτή βρίσκει εφαρμογή και σε σειρά ολοκληρωτικών εξισώσεων αρκετές από τις οποίες είναι συνδεδεμένες και με σημαντικές εφαρμογές.

Στο Κεφάλαιο 8, το οποίο μπορεί να θεωρηθεί ως άμεση συνέχεια του Κεφαλαίου 3, επανερχόμαστε στην ποιοτική μελέτη γραμμικών και κυρίως μη γραμμικών εξισώσεων και συστημάτων από γεωμετρική σκοπιά. Εδώ αναπτύσσεται κυρίως η βασική θεωρία Ευστάθειας για γραμμικές και μη γραμμικές εξισώσεις, δηλαδή η θεωρία Γραμμικοποίησης, τα Αλγεβρικά Κριτήρια Ευστάθειας και η 2η Μέθοδος Lyapunov. Επίσης παρατίθενται βασικά εισαγωγικά στοιχεία από τη θεωρία Διακλαδώσεων για εξισώσεις με παραμέτρους.

Τα δύο τελευταία Κεφάλαια 9 και 10 του Μέρους Α, περικλείουν τα βασικά εργαλεία για τη μελέτη των Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων, το αντικείμενο δηλαδή του Μέρους Β. Πιο συγκεκριμένα, στο Κεφάλαιο 9 αναπτύσσονται τα βασικά στοιχεία της θεωρίας των (απλών και πολλαπλών) Σειρών Fourier, του Ολοκληρώματος Fourier, των πεπερασμένων Μετασχηματισμών Fourier (ημιτονικού και συνημιτονικού) καθώς και των Μετασχηματισμών Fourier (πλήρους, ημιτονικού και συνημιτονικού). Το Κεφάλαιο 9 κλείνει με μια πολύ σύντομη αναφορά στη θεωρία Κυματιδίων.

Στο Κεφάλαιο 10, αναπτύσσεται διεξοδικά η θεωρία των προβλημάτων συνοριακών συνθηκών. Αφού παρουσιασθούν κάποια ζητήματα μαθηματικής προτυποποίησης συγκεκριμένων φαινομένων, παρουσιάζεται η βασική θεωρία των γραμμικών συνοριακών προβλημάτων. Στη συνέχεια μετά από μια γενική αναφορά στη Φασματική Θεωρία και στα Προβλήματα Ιδιοτιμών, ορίζεται η οικογένεια των προβλημάτων Sturm-Liouville και αναπτύσσεται η σχετική θεωρία και για τις 3 κατηγορίες. Τέλος, αφού διατυπωθεί η βασική θεωρία των γενικευμένων σειρών Fourier χρησιμοποιείται για την επίλυση μη ομογενών συνοριακών προβλημάτων.

ΜΕΡΟΣ Β. ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Το Μέρος Β του βιβλίου αποτελεί μια εισαγωγική προσέγγιση στη θεωρία των μερικών διαφορικών εξισώσεων. Στις μέρες μας οι μερικές διαφορικές εξισώσεις αποτελούν μια από τις σημαντικότερες περιοχές τόσο των θεωρητικών όσον και των εφαρμοσμένων μαθηματικών. Το γεγονός αυτό οφείλεται, αφενός στη συχνότατη χρήση των μερικών διαφορικών εξισώσεων στις φυσικές, τεχνολογικές, οικονομικές και λοιπές εφαρμοσμένες επιστήμες, αφετέρου δε στην πληθώρα των νέων προβλημάτων, ερωτημάτων και θεωριών, που δημιουργούνται και αναπτύσσονται στην περιοχή των θεωρητικών μαθηματικών από την ερευνητική ενασχόληση για την επίλυση και γενικότερη μελέτη αυτών των εξισώσεων.

Στο Κεφάλαιο 11, δίδονται οι βασικές έννοιες και ορισμοί των μερικών διαφορικών εξισώσεων. Σκιαγραφείται η έννοια ενός καλά τοποθετημένου προβλήματος αρχικών και/ή συνοριακών συνθηκών καθώς και η ευστάθεια (συνεχής εξάρτηση από τα δεδομένα) των λύσεων. Γίνεται η ταξινόμηση των μερικών διαφορικών εξισώσεων 2ης τάξης στις δύο και περισσότερες διαστάσεις. Αναπτύσσεται μια γενική μέθοδος επίλυσης μερικών διαφορικών εξισώσεων 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές και ως εφαρμογή αυτής παρουσιάζεται η εύρεση της λύσης D' Alembert της Κυματικής Εξίσωσης σε όλη την πραγματική ευθεία, της πρώτης μερικής διαφορικής εξίσωσης που διαμορφώθηκε και λύθηκε από τον Jean le Rond d'Alembert.

Στο Κεφάλαια 12, 13 και 14 μετά από μια σύντομη ιστορική ανασκόπηση, γίνεται η μελέτη των γραμμικών ομογενών ή μη ελλειπτικών, παραβολικών και υπερβολικών εξισώσεων σε συγκεκριμένα φραγμένα πεδία στη μια ή τις δύο διαστάσεις με διάφορα είδη συνοριακών συνθηκών. Η βασική τεχνική επίλυσης σε όλο το Κεφάλαιο είναι η μέθοδος χωρισμού των μεταβλητών ή μέθοδος Fourier. Στο Κεφάλαιο 15, μελετώνται τα προβλήματα των τριών προηγουμένων Κεφαλαίων 12-14 (Ελλειπτικά, Παραβολικά, Υπερβολικά) σε περισσότερες χωρικές διαστάσεις (δύο και τρεις).

Στο Κεφάλαιο 16, θα μελετηθούν οι τρεις βασικές κατηγορίες μερικών διαφορικών εξισώσεων 2ης τάξης σε μη φραγμένο πεδίο (κυρίως στη μια χωρική διάσταση). Η μελέτη τέτοιων προβλημάτων θα βασισθεί σε δύο κατηγορίες τεχνικών. Η πρώτη μέθοδος βασίζεται στο χωρισμό μεταβλητών σε άπειρο πεδίο, ο οποίος οδηγεί στην ολοκληρωτική αναπαράσταση της λύσης ονομαζόμενη ολοκλήρωμα Fourier. Η δε δεύτερη κατηγορία τεχνικών είναι αυτή των ολοκληρωτικών μετασχηματισμών, όπως οι μετασχηματισμοί Laplace και Fourier.

Τέλος, στο Κεφάλαιο 17, ορίζεται η συνάρτηση Green για προβλήματα συνοριακών συνθηκών ή αρχικών και συνοριακών συνθηκών μερικών διαφορικών εξισώσεων και μελετώνται οι ιδιότητες αυτών. Στη συνέχεια γίνεται χρήση της συνάρτησης Green για την επίλυση χαρακτηριστικών περιπτώσεων των τριών βασικών κατηγοριών μερικών διαφορικών εξισώσεων 2ης τάξης κυρίως στη μια χωρική (αλλά και στις δύο και τρεις) διάσταση, όπου εμφανίζεται η σύνδεση της λύσης με τα δεδομένα (αρχικά και / ή συνοριακά) καθώς και με τους τυχόν μη ομογενείς όρους.

Ο σκοπός της συγγραφής του βιβλίου αυτού, είναι τριπλός. Κατ' αρχάς, γίνεται μία προσπάθεια, ώστε να δοθεί μια πλήρης και σε εισαγωγικό πάντα επίπεδο, θεωρητική θεμελίωση των Συνήθων και Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων, έτσι ώστε, ο μελετητής να είναι σε θέση να ακολουθήσει με ευχέρεια την αναζήτησή του στον ευρύτερο χώρο των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών. Παρατίθεται ένας μεγάλος αριθμός παραδειγματικά λυμένων προβλημάτων, ο οποίος, συνοδευόμενος από εξίσου σημαντικό αριθμό άλυτων προβλημάτων (με τις απαντήσεις τους), παρέχει τη δυνατότητα εξάσκησης, τόσο σε υπολογιστικό, όσο και σε θεωρητικό επίπεδο, γεγονός που προσφέρει στο σπουδαστή, βαθύτερη γνώση και αυτοπεποίθηση. Τέλος, αναφέρεται ένας σημαντικός αριθμός εφαρμογών των Συνήθων και Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων και Συστημάτων σε διάφορα πεδία της ανθρώπινης και φυσικής δράσης, ώστε, σε συνδυασμό με τις σύντομες ιστορικές και βιογραφικές αναφορές, ο μελετητής να κατορθώσει να διαμορφώσει μια πληρέστερη αντίληψη της παράλληλης εξέλιξης των Διαφορικών Εξισώσεων, με τις Επιστήμες και την Τεχνολογία.

Ακόμα θα πρέπει να αναφερθεί ότι έχει καταβληθεί συστηματική προσπάθεια να χρησιμοποιηθούν υπολογιστικά προγράμματα, όπως Mathematica, MatLab, Maple, COMSOL, κ.α., σε όλα σχεδόν τα παραδείγματα για τη γεωμετρική προσέγγιση και αναπαράσταση των αντιστοίχων προβλημάτων.

Το ανά χείρας βιβλίο περιέχει

- 455 Παραδειγματικά λυμένα προβλήματα, σε πολλά από τα οποία έχει γίνει και γεωμετρική αναπαράσταση με τη χρήση προγραμμάτων, όπως Mathematica, MatLab, κλπ.
- 2220 προβλήματα προς επίλυση, συνοδευόμενα από απαντήσεις και όπου αυτό απαιτείται υποδείξεις
- 420 και πλέον Βιβλιογραφικές αναφορές
- 300 παραστατικά σχήματα και εικόνες
- 65 σύντομες βιογραφικές και ιστορικές αναφορές μαθηματικών προσωπικοτήτων σημαντικών στο πεδίο των διαφορικών εξισώσεων μαζί με τις φωτογραφίες τους
- 20 αναλυτικούς πίνακες.

Προαπαιτούμενες γνώσεις: για τον μελετητή αυτού του βιβλίου θεωρούνται τα θέματα, που αναπτύσσονται στα προπτυχιακά μαθήματα Λογισμού Μιας και Πολλών Μεταβλητών, Διανυσματικής Ανάλυσης, Γραμμικής Άλγεβρας και Αναλυτικής Γεωμετρίας.

Ευχαριστίες: Το περιεχόμενο του συγγράμματος αυτού, στηρίζεται κατά σημαντικό μέρος, στις διαλέξεις των μαθημάτων «Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις», «Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις» και «Εφαρμοσμένων Μαθηματικών», που δόθηκαν από τον συγγραφέα κυρίως στα Τμήματα Πολιτικών Μηχανικών, Μηχανολόγων Μηχανικών και Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών στο Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο καθώς και στο Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης, κατά περιόδους από το Ακαδημαϊκό Έτος 1987-1988 και έκτοτε. Ο ενθουσιασμός των φοιτητών, οι ποικίλες απορίες και υποδείξεις τους, καθώς και οι συνεχείς αναζητήσεις τους για νέες γνώσεις, διαφαίνονται εύκολα κατά τη μελέτη του παρόντος συγγράμματος. Αισθάνομαι την ανάγκη να ευχαριστήσω για την πολύχρονη συνεργασία μας, τους συναδέλφους μου στον Τομέα Μαθηματικών της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών & Φυσικών Επιστημών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου, καθώς και τους μεταπτυχιακούς μου φοιτητές, για την ποικιλόμορφη βοήθειά τους. Ειδικά για την νέα αυτή έκδοση θεωρώ ότι θα πρέπει να ευχαριστήσω τα μέγιστα τον υποψήφιο διδάκτορα κύριο Στυλιανό Σταυρουλάκη για την πολύπλευρη συνεισφορά του σε όλα τα στάδια έκδοσης αυτού του συγγράμματος.

Τέλος, προς όλους αυτούς που θα επιθυμούσαν να συμβάλλουν σε μια πληρέστερη και αρτιότερη εμφάνιση μιας μελλοντικής έκδοσης αυτού του συγγράμματος, αφού τους ευχαριστήσω προκαταβολικά, θα ήθελα να τους γνωρίσω ότι, μπορούν να στείλουν την όποια συμβολή τους στην ηλεκτρονική μου διεύθυνση: nikolas@central.ntua.gr Η συμβολή τους, θα είναι σημαντική.

Εκ των προτέρων, τους ευχαριστώ.

Νικόλαος Μ. Σταυρακάκης

Αθήνα, 1 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2015

Απαντήσεις των ασκήσεων και άλλα σχόλια στην ιστοσελίδα του βιβλίου:
http://www.math.ntua.gr/∼stavraka/

Περιεχόμενα

ΜΕΡΟΣ Β: ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Σχήματα