

# ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

### 8.2 Προβλήματα

6.  $(k, \pi, 0)$ , όπου  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$       9.  $(-2, 0), (0, 0), (1, 0)$   
11.  $(0, 0), (1, 0), (0, 2), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$       13.  $(0, 0), (0, 1), (1, 0), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$   
14.  $(0, 0, 0), \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}, -\frac{c^2}{d^2} - \frac{a^2}{b^2}\right)$       15.  $(0, -2, k\pi), k = 0, 1, 2, \dots$   
17.  $y = \cos(x - 1)^2$       19.  $y = \tan x$

21. Τα σημεία  $x = x_0, y = -1 - x_0$  και οι κύκλοι  $x^2 + y^2 = c^2$ , εξαιρουμένων των παραπάνω σημείων.

$$23. y = \frac{c}{x^2} - x$$

26.  $(x_0, 0), (0, y_0)$ , όπου  $x_0, y_0$  αυθαίρετα και οι καμπύλες

$$y = c \exp\left\{-\frac{2}{3} e^{3x}\right\}, x \neq 0$$

Με τη χρήση της *ανάλυσης προσήμου*, να περιγραφεί η συμπεριφορά των μη-στάσιμων λύσεων των ακόλουθων εξισώσεων:

27. -1 ασταθές, 0 ασ. ευσταθές, 2 ασταθές      28. 0 ασταθές  
30. -2, 0, 2 ασταθής, -1, 1 ασ. ευσταθής      32. 0 ασ. ευσταθές, 2 ασταθές  
34. 2 ασ. ευσταθές, 3 ασταθές

### 8.3 Προβλήματα

9.  $(1, 1)$ , εστία, ΑΕ      10.  $(-2, -6)$ , νόθος κόμβος, Α  
11.  $(-1, 1)$ , κόμβος, Α      12.  $(31, -22)$ , κέντρο, Ε  
13. όλα τα σημεία της ευθείας  $y=x/2$ ,  $(\lambda_1=0, \lambda_2=-3)$ , ΑΕ  
14.  $(2, -1)$ , κόμβος, Α      15.  $(0, 0)$ , σάγμα, Α  
17.  $(0, 0)$ , κέντρο, Ε      19.  $(0, 0)$ , κέντρο, Ε  
21.  $(-1, 1)$ , σάγμα, Α      22.  $(2, 1)$ , κόμβος, ΑΕ  
23.  $(2, 2)$ , σάγμα, Α      24.  $(3, 2)$ , εστία, ΑΕ  
25.  $(-2, -1)$ , κέντρο, Ε

**8.4 Προβλήματα**

1. (0, 0) εστία A, (1, 1) σάγμα A
2. (-1, 0) σάγμα A, (1, 0) κέντρο E
3. (-1, 0) κόμβος AE, (1, 1) εστία A, (0, 0) σάγμα A
4. (-1, -1) εστία AE, (4, 4) εστία A
5. (0, 2), (0, -2) κέντρα E, (2, 0), (-2, 0) σάγματα A
6. (0, 0) κέντρο E,  $x = \pm 1$  ευθείες κρίσιμων σημείων
7. (nπ, mπ) κρίσιμα σημεία, (i)  $n+m$ =άρτιος: σάγμα A, (ii)  $n+m$ =περιττός: κέντρο E.
8.  $(m\pi, 0) : \begin{cases} m = 2k, & \text{νόθος κόμβος A} \\ m = 2k + 1, & \text{σάγμα A} \end{cases}$
9. (0, 0) μη-απλό κρίσιμο σημείο, (2, -2) σάγμα A
10. (0, 0) εστία AE
11. (1, 1) σάγμα A, (-1, -1) εστία AE
12. (2, 1) σάγμα A, (-2 -1) εστία AE
13. (0, 0) σάγμα A, (4, 0) κόμβος A, (0, 2/3) κόμβος AE, (1, 1) σάγμα A
14. (0, 0) κέντρο E, (1, -1) σάγμα A
15. (0, 0) κέντρο E, (1, 1) σάγμα A, (-1, -1) σάγμα A.
16. (0, 0) ασταθές για  $\mu > 0$  και ασυμπτωτικά ευσταθές για  $\mu < 0$ .
18. (0, 0) κέντρο E (του γραμμικοποιημένου)
19. (0, 0) κόμβος A, κόμβοι AE,  $(\pm 1, 0)$  κόμβοι AE, σάγματα A.
20. Έστω  $\Delta = a_1 b_2 - b_1 a_2$ . (i) Αν  $\Delta > 0$ : (0, 0) σάγμα A,  $(a_1/a_2, 0)$  σάγμα A,  $(b_1/b_2, \Delta/a_3 b_2)$  AE κόμβος, αν  $\Delta > b_1 a_2 / 4b_2$  και AE εστία, αν  $\Delta < b_1 a_2 / 4b_2$ . (ii) Αν  $\Delta < 0$ : (0, 0) σάγμα A,  $(a_1/a_2, 0)$  κόμβος AE. (iii) Αν  $\Delta < 0$ , τότε  $Y(t) \rightarrow 0$ , ενώ, αν  $\Delta > 0$ ,  $Y(t) \rightarrow \Delta/a_3 b_2$ .

**8.5 Προβλήματα**

1.  $V = xy$ , ασταθής
2.  $V = 15x^2 + 6xy + 3y^2$ , ασυμπτωτικά ευσταθής
3.  $V = xy$ , ασταθής
4.  $V = 8x^2 + 11xy + 5y^2$ , ασυμπτωτικά ευσταθής
5.  $V = 3x^2 + 14xy + 8y^2$ , ασταθής
6.  $V = x^2 + y^2$ , ασυμπτωτικά ευσταθής
7.  $V = x^2 + y^2$ , ασυμπτωτικά ευσταθής
8.  $V = x^2 + y^2$ , ευσταθής
9.  $V = x^2 + y^2$ , ευσταθής
10.  $V = 3xy^2 - x^3$ , ασταθής
11.  $V = x - y$ , ασταθής
15.  $V = x^2 + y^2$ , ασυμπτωτικά ευσταθής
19.  $a = 2, m = 1, b = 1, n = 2$ , ασυμπτωτικά ευσταθής

20.  $a = b = 1, m = n = 2$ , ασυμπτωτικά ευσταθής

24.  $V = x^2 + y^2, S = \mathbb{R}^2$  25.  $V = x^2 + y^2, S = \mathbb{R}^2$

26.  $V = x^2 + y^2, S = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$

27.  $V = (x/a)^2 + (y/b)^2$

$S = \{(x, y) : (x/a)^2 + (y/b)^2 < 1\}$

### 8.6 Προβλήματα

1.  $\Delta_4 = 0$ , επομένως, ασταθής      2.  $\Delta_2 = 0$ , επομένως, ασταθής

5. ευσταθής      7. όχι ευσταθής

8. ευσταθής      9. ευσταθής

11. Για ασυμπτωματική ευστάθεια θα πρέπει να έχουμε

$$\alpha > 0 \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & b \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & b & \alpha \\ 0 & c & 0 \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & \alpha & 1 \\ 0 & c & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & c \end{vmatrix} > 0 \quad \text{ή}$$

$\alpha > 0, \alpha b > 0, -\alpha^2 c > 0, -a^2 c^2 > 0$ , αδύνατον.

