

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

6.1 Προβλήματα

10. $x > 0$

11. \emptyset

12. $x < 0$

13. $x > 0$

14. $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

15. $-\infty < x < \infty$

6.2 Προβλήματα

1. $x = (-c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t}) / 2$
 $y = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t}$

2. $x = c_1 + c_2 e^{-t} + (1/2) e^t + 5t/3$
 $y = c_1 - 2c_2 e^{-t} + 5t/3$

3. $x = c_1 e^t + (1/4) \cos t - (1/4) \sin t$
 $y = -3c_1 e^t - (3/4) \cos t - (1/4) \sin t$

4. $x = \sin t - \cos t$
 $y = \sin t$

5. $x = c_3 e^{2t} + (1/2) e^t \{ (c_1 - c_2) \cos t + (c_1 + c_2) \sin t \}$
 $y = e^t (c_1 \cos t + c_2 \sin t)$
 $z = (3/2) e^t \{ (c_1 - c_2) \cos t + (c_1 + c_2) \sin t \} + c_3 e^{2t}$

6. $x = c_1 \cos \sqrt{2} t + c_2 \sin \sqrt{2} t + (3/2) t$
 $y = -\sqrt{2} c_1 \sin \sqrt{2} t + \sqrt{2} c_2 \cos \sqrt{2} t + (3\sqrt{2}) t - t^2$

7. $x = c_1 e^{3t} + c_2 \cos 2t + c_3 \sin 2t$
 $y = -5c_1 e^{3t} + c_3 \cos 2t - c_2 \sin 2t - 1$

8. $x = \sin t$
 $y = c_1 t + c_2$

9. $x = \sin t$
 $y = 0$

10. όχι λύση

11. $x = (4c_1 e^{3t} - 3c_2 e^{-4t}) / 6$
 $y = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-4t}$
 $z = (-4c_1 e^{3t} + 3c_2 e^{-4t}) / 6$

12. $x = c_1 + c_2 e^{4t} + c_3 e^{8t}$
 $y = 2c_1 - 2c_3 e^{8t}$
 $z = 2c_1 - 2c_2 e^{4t} + 2c_3 e^{8t}$

13. $x = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t} + (2/3) t e^{-t}$
 $y = c_1 e^{2t} + c_3 e^{-t} - (1/3) t e^{-t}$
 $z = c_1 e^{2t} - (c_2 + c_3 + 1/3) e^{-t} - (1/3) t e^{-t}$

14. $x = 4(e^{3t} - e^{-2t}) / 5$
 $y = 2(6e^{3t} - e^{-2t}) / 5$

15. $x = (3e^{2t} - e^{-2t}) / 2$
 $y = (3e^{2t} - 5e^{-2t}) / 2$

16. $x = e^{-2t} (3 \cos 3t + 9 \sin 3t)$
 $y = e^{-2t} (2 \cos 3t - 4 \sin 3t)$

17. $x = e^t$
 $y = -e^t$ 18. $x = -5e^{2t}\sin t$
 $y = -e^{2t}[3\sin t + \cos t]$ 19. $x = e^t/2 - e^{3t}/4 - e^{-t}/4$
 $y = e^t - e^{3t}/4 - 3e^{-t}/4$

20. $x = c_1 e^{(1+\sqrt{6})t} + c_2 e^{(1-\sqrt{6})t} + (11\sin t - 7\cos t)/20$
 $y = c_1 (1 + \sqrt{6}/3)e^{(1+\sqrt{6})t} + c_2 (1 - \sqrt{6}/3)e^{(1-\sqrt{6})t} + [-\cos t + 3\sin t]/20$
 όπου $c_1 = (33 - 32\sqrt{6}/3)/40$, $c_2 = (33 + 32\sqrt{6}/3)/40$

21. όχι λύση 22. άπειρες λύσεις. Ορίστε αυθαίρετα το $x(t)$ και λύστε ως προς $y(t)$.

23. άπειρες λύσεις: $x(t) = -y(t)$ 24. όχι λύση

25. άπειρες λύσεις 26. όχι λύση

27. άπειρες λύσεις 28. όχι λύση

29. $x = g(t)$, $y = 1/2 t^2 \Gamma g(t) + \int g(t) dt$,
 $g(t)$ αυθαίρετη παραγωγίσιμη συνάρτηση του t

30. όχι λύσεις 31. άπειρες λύσεις, που ικανοποιούν τη σχέση: $x+y=e^t+e^{-t}$.

6.3 Προβλήματα

- | | | | |
|--|--|---------|---------|
| 1. ναι | 2. ναι | 3. ναι | 4. όχι |
| 5. ναι | 6. όχι | 7. ναι | 8. ναι |
| 9. ναι | 10. ναι | 11. ναι | 12. ναι |
| 13. $x(t) = 7x^1(t) + 3x^2(t) + 5x^3(t)$. | 14. $x(t) = 3x^1(t) - 3x^2(t) - 5x^3(t)$ | | |
| 15. $x(t) = 3x^1(t) - 2x^2(t)$ | 16. $x(t) = x^1(t) + 2x^2(t) + x^3(t)$ | | |
| 17. $x(t) = [x^1(t) + x^3(t)] (7/18)$. | | | |
| 18. (i) $x(t) = 3x^1(t) + 7x^2(t) + x^3(t) - 2x^4(t)$, (ii) $x(t) = 13x^1(t) + 41x^2(t) + 3x^3(t) - 12x^4(t)$ | | | |

6.4 Α.Ι) Προβλήματα

1. $x = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t}$ 2. $x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$
 3. $x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$ 4. $x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}$

$$5. x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3t} + c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

$$6. x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

$$7. x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{3t}$$

6.4 A. II) Προβλήματα

$$1. e^{At} = \begin{pmatrix} 1+2t & -t \\ 4t & 1-t \end{pmatrix} e^t \quad 2. x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t/2} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t$$

$$3. e^{At} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$4. e^{At} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} e^{-2t} + 5e^{2t} - e^{3t} & 5e^{2t} - 5e^{3t} & e^{-2t} - e^{3t} \\ -e^{-2t} + e^{3t} & 5e^{3t} & -e^{-2t} + e^{3t} \\ 4e^{-2t} - 5e^{2t} + e^{3t} & -5e^{2t} + 5e^{3t} & 4e^{-2t} + e^{3t} \end{pmatrix}$$

$$5. e^{At} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 6e^{2t} - \cos t - 2\sin t & -2e^{2t} + 2\cos t + 4\sin t & 2e^{2t} - 2\cos t + \sin t \\ 3e^{2t} - 3\cos t - \sin t & -e^{2t} + 6\cos t + 2\sin t & e^{2t} - \cos t + 3\sin t \\ 5\sin t & -10\sin t & 5\cos t \end{pmatrix}$$

$$6. e^{At} = \begin{pmatrix} (t+1)e^{-t} & (t+1)e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -te^{-t} & -te^{-t} + e^{-2t} & e^{-2t} - e^{-t} \\ te^{-t} & te^{-t} & e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$7. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad 8. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad 9. A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$10. e^{At} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1-t & -t \\ t & 1+t \end{pmatrix}, \quad 11. e^{At} = e^{-t} \begin{pmatrix} 1+3t - (3/2)t^2 & t & -t + (1/2)t^2 \\ -3t & 1 & t \\ 9t - (9/2)t^2 & 3t & 1 - 3t + (3/2)t^2 \end{pmatrix}$$

$$12. e^{At} = e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4t & 1 & 0 \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 22. e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ t^2/2 & t & 1 \end{pmatrix}$$

$$24. A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad 25. A = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 16 & -25 & 30 \\ 8 & -6 & -24 \\ 0 & 13 & 26 \end{pmatrix} \quad 26. \text{όχι}$$

6.4 A. III) (α) Προβλήματα

1. $x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{4t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-2t}$ 2. $x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$
3. $x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-3t}$ 4. $x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$
5. $x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4t}$ 6. $x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t}$
7. $x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{9t} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{6t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3t}$ 8. $x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{6t} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3t}$
9. $x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^t + c_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t}$ 10. $x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$
11. $x(t) = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t}$ 12. $x(t) = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} e^{3t}$
13. $x(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$ 14. $x(t) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t}$
15. $x(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} - \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix} e^{4t}$ 16. $x(t) = \begin{pmatrix} 5/6 \\ 15/6 \end{pmatrix} e^{4t} + \begin{pmatrix} 1/6 \\ -1/2 \end{pmatrix} e^{-2t}$
17. $x(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} -1/2 \\ -2 \\ 1/2 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} e^{-3t}$ 18. $x(t) = -\frac{5}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^t - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-2t}$
19. $x(t) = \frac{3}{8} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} e^{8t}$
20. $x_1(t) = x_4(t) = 2e^{10t} + e^{15t}$, $x_2(t) = x_3(t) = -e^{10t} + 2e^{15t}$
22. (i) $x_1 = \begin{pmatrix} \lambda_2 - \lambda_1 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} e^{-\lambda_1 t}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-\lambda_2 t}$, $x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-\lambda_2 t}$ 24. $x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 3t^2 \\ t^2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} t^4 \\ t^4 \end{pmatrix}$
25. $x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} t^{-1}$ 26. $x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t^{-1} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t^2$
27. $x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t^{-2}$ 28. $x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} t^4 + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} t^{-1}$
29. $x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} V_2 \\ -V_1 \end{pmatrix} e^{k^1 V + 1 V t}$ 30. $\begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} e^t$

6.4 A. III) (β) Προβλήματα

1. $x(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} 2 & 2 \sin t \\ 1 - \sin t & \cos t + \sin t \end{pmatrix}$ 2. $x(t) = e^t \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & \cos 2t & \sin 2t \\ 3 & \sin 2t & -\cos 2t \end{pmatrix}$

3. $x(t) = \begin{pmatrix} \cos \pi t & \sin \pi t \\ -\sin \pi t & \cos \pi t \end{pmatrix} e^{-2t}$
4. $x(t) = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{2}t & \sin \sqrt{2}t \\ -\sin \sqrt{2}t & \cos \sqrt{2}t \end{pmatrix} e^{-3t}$
5. $x(t) = \begin{pmatrix} 3e^{3t} & e^t \cos 2t & e^t \sin 2t \\ 4e^{3t} & e^t (\cos 2t + \sin 2t) & e^t (\sin 2t - \cos 2t) \\ 4e^{3t} & 0 & 0 \end{pmatrix}$
6. $x(t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & \cos 2t & \sin 2t \\ 2 & \sin 2t & -\cos 2t \end{pmatrix} e^t$
7. $x(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} \cos t - 5 \sin t \\ -2 \cos t - 3 \sin t \end{pmatrix}$
8. $x(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 2 \cos t + \sin t \\ -\cos t - 3 \sin t \end{pmatrix}$
9. $x(t) = \frac{e^t}{2} \begin{pmatrix} 1 - 3 \cos 2t + 2 \sin 2t \\ 3 \sin 2t + 2 \cos 2t \\ 3 - 3 \cos 2t + 2 \sin 2t \end{pmatrix}$
10. $x(t) = \frac{e^{t-10}}{2} \begin{pmatrix} 1 - \cos 2(t-10) \\ \sin 2(t-10) \\ 3 - \cos 2(t-10) \end{pmatrix}$
11. $x(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \sin \sqrt{2}t - \sqrt{2} \cos \sqrt{2}t \\ \cos \sqrt{2}t - \sqrt{2} \sin \sqrt{2}t \\ -3 \cos \sqrt{2}t \end{pmatrix} e^{-t}$
12. $x(t) = -\begin{pmatrix} 25 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix} e^t - \begin{pmatrix} \cos 5t - 5 \sin 5t \\ \cos 5t \\ \cos 5t \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} 5 \cos 5t + \sin 5t \\ \sin 5t \\ \sin 5t \end{pmatrix}$
13. (ii) $\Psi(t) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{6} \sin \sqrt{6}t & 2\sqrt{6} \cos \sqrt{6}t & \sin t & -\cos t \\ -12 \cos \sqrt{6}t & -12 \sin \sqrt{6}t & \cos t & \sin t \\ \sqrt{6} \sin \sqrt{6}t & -\sqrt{6} \cos \sqrt{6}t & 2 \sin t & -2 \cos t \\ 6 \cos \sqrt{6}t & 6 \sin \sqrt{6}t & 2 \cos t & 2 \sin t \end{pmatrix}$
- (iii) $x(t) = \left[\frac{2}{5} (2y_0 - z_0) \cos \sqrt{6}t + \frac{1}{5} (y_0 + 2z_0) \cos t, -\frac{12}{5\sqrt{6}} (2y_0 - z_0) \sin \sqrt{6}t \right. \\ \left. - \frac{1}{5} (y_0 + 2z_0) \sin t, -\frac{1}{5} (2y_0 - z_0) \cos \sqrt{6}t + \frac{2}{5} (y_0 + 2z_0) \cos t, \right. \\ \left. \frac{\sqrt{6}}{5} (2y_0 - z_0) \sin \sqrt{6}t - \frac{2}{5} (y_0 + 2z_0) \sin t \right]^T$
14. $x(0) = (x_1 \ 0 \ x_3)^T$
15. $x(t) = c_1 t^{-1} \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{2} \ln t) \\ \sqrt{2} \sin(\sqrt{2} \ln t) \end{pmatrix} + c_2 t^{-1} \begin{pmatrix} \sin(\sqrt{2} \ln t) \\ -\sqrt{2} \cos(\sqrt{2} \ln t) \end{pmatrix}$
16. $x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 5 \cos(\ln t) \\ 2 \cos(\ln t) + \sin(\ln t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 5 \sin(\ln t) \\ \cos(\ln t) + 2 \sin(\ln t) \end{pmatrix}$
17. $x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} t^{-1} + c_2 \begin{pmatrix} \cos(\ln t) \\ \sin(\ln t) \\ \cos(\ln t) \end{pmatrix} t^{-1} + c_3 \begin{pmatrix} \sin(\ln t) \\ \sin(\ln t) \\ \cos(\ln t) \end{pmatrix} t^{-1}$

6.4 Α. ΙΙΙ. (c) Προβλήματα

1. $x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t - \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right]$
2. $x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t/2} + c_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t e^{-t/2} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2/5 \end{pmatrix} e^{-t/2} \right]$

$$3. x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1/4 \\ -1/4 \end{pmatrix} \right\} \quad 4. x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t e^{2t} + \begin{pmatrix} -1/3 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} \right\}$$

$$5. x(t) = e^t \begin{pmatrix} 2 & 2t-1 \\ 1 & t \end{pmatrix} \quad 6. x(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ -t & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$7. x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

$$8. x(t) = c_1 \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{5t} + c_3 \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} t e^{5t} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \frac{e^{5t}}{2} \right\}$$

$$9. x(t) = \begin{pmatrix} e^{-3t} & e^{-3t} & e^{3t} \\ -e^{-3t} & e^{-3t} & e^{3t} \\ 0 & e^{-3t} & -2e^{3t} \end{pmatrix} \quad 10. x(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 \\ 2 & 1+2t & 2t^2+2t \\ 4 & 4+4t & 4t^2+8t+4 \end{pmatrix}$$

$$11. x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-2t} + \left[c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} t \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \right] e^{-t} \quad 12. x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + \left[c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} +t \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] e^{-t}$$

$$13. x(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^t \quad 14. x(t) = \begin{pmatrix} 1-t \\ t \\ t \end{pmatrix} e^{2t} \quad 15. x(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 1+2t \\ 1-2t \end{pmatrix}$$

$$16. x(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 4t \\ 4t-1 \end{pmatrix} \quad 17. x(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$18. x(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -33 \end{pmatrix} e^t + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} t e^t + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} \quad 19. x(t) = \begin{pmatrix} 3+4t \\ 2+4t \end{pmatrix} e^{-3t}$$

6.4 Β. Προβλήματα

$$1. x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t/2} + c_2 \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} e^{3t/2} - \begin{pmatrix} 13/2 \\ 13/4 \end{pmatrix} t e^{t/2} - \begin{pmatrix} 15/2 \\ 9/4 \end{pmatrix} e^{t/2}$$

$$2. x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t e^t$$

$$3. x(t) = \begin{pmatrix} c \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + c \begin{pmatrix} -t \\ 1/2-t \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 1/2 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}$$

$$4. x(t) = c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \ln |\cos t|$$

$$5. x(t) = c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} t e^t$$

$$6. x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t$$

$$7. x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} -\cos t \\ (\cos t - \sin t)/2 \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -\sin t \\ (\cos t + \sin t)/2 \\ \sin t - \cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$8. x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{t+} + c_2 \begin{pmatrix} -\cos t \\ (\cos t - \sin t)/2 \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -\sin t \\ (\cos t + \sin t)/2 \\ \sin t - \cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} e^t$$

$$9. x(t) = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t+} + c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t+} + \begin{pmatrix} 2t-1-2e^{-t}-2te^{-t} \\ 0 \\ 2t+2+2e^{-t}+4te^{-t} \end{pmatrix}$$

$$10. x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{t+} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix} e^{t+} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ \sin 2t \\ -\cos 2t \end{pmatrix} e^{t+} + \frac{e^{ct} (c-1)^{-1}}{(1-c)^2 + 4} \begin{pmatrix} 4 + (1-c)^2 \\ 2(c-4) \\ 1+3c \end{pmatrix}$$

$$11. x(t) = 2e^t \begin{pmatrix} t \cos t + 3t \sin t + \sin t \\ -t \sin t \end{pmatrix}$$

$$12. x(t) = \begin{pmatrix} -\cos t - \sin t + 1 \\ \sin t - \cos t + 1 \end{pmatrix}$$

$$13. x(t) = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3t}$$

$$14. x(t) = \begin{pmatrix} 1+t^2/2 \\ t \end{pmatrix} e^{2t}$$

$$15. x(t) = \begin{pmatrix} (27/25) e^{2t} - (3/5) t e^{2t} - (1/25) (14 \sin t + 2 \cos t) \\ (1/5) (\sin t - 2 \cos t) - (3/5) e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$16. x(t) = \begin{pmatrix} e^t - e^{-t} \\ e^{-t} (1+t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$17. x(t) = \begin{pmatrix} 3e^{3t} - 2e^{2t} - te^{2t} \\ e^{2t} \\ 3e^{3t} - 2e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$19. x_p(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} & 1 \\ 2e & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -e^{-t}/4 - t \\ -e^{-t}/2 \end{pmatrix}$$

$$20. x(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} t e^{3t}$$

