

## Κεφάλαιο 14

# Εξισώσεις Υπερβολικού Τύπου

### 14.1 Κυματική Εξίσωση

#### 14.1.1 Εισαγωγή-Ιστορικά Στοιχεία

Φαινόμενα όπως μετάδοση κυμάτων, ροή ηλεκτρικού ρεύματος, ταλάντωση χορδής, περιγράφονται από προβλήματα, τα οποία περιλαμβάνουν την κυματική εξίσωση. Η κυματική εξίσωση ιδιαίτερα στις 3 διαστάσεις θεωρείται από μαθηματικούς (θεωρητικούς και εφαρμοσμένους), φυσικούς, και μηχανικούς ως η πλέον σημαντική μερική διαφορική εξίσωση, αφού περιγράφει μια μεγάλη ποικιλία φαινομένων, από τις δονήσεις των συνεχών μηχανικών συστημάτων, την μετάδοση ηλεκτρομαγνητικών και ηχητικών κυμάτων, μέχρι την κβαντική περιγραφή των στοιχειωδών σωματίων, τη γενική θεωρία σχετικότητας και θεωρίες ενοποιημένου πεδίου, όπως οι υπερχορδές (superstrings).

Η επιστημονική ενασχόληση με τη συμπεριφορά της παλλόμενης τεντωμένης χορδής ανάμεσα σε δύο σταθερά σημεία, κατά τον 18ο αιώνα αποτέλεσε ιστορικά το αίτιο της διαμόρφωσης και της μελέτης της κυματικής εξίσωσης. Επίσης κατά την περίοδο αυτή έντονο ενδιαφέρον αναπτύχθηκε για τη συμπεριφορά του αέρα, που κινείται μέσα στα πνευστά μουσικά όργανα, συνδυαζόμενο με διάφορες μουσικές θεωρίες. Μετά τη διαμόρφωση των βασικών αρχών και κανόνων του Διαφορικού και Ολοκληρωτικού Λογισμού από τους **Sir Isaak Newton (1642-1727)** στην Αγγλία και **Gotfried Wilhelm von Leibniz (1646 - 1716)** στη Γερμανία, πολλοί διακεκριμένοι μαθηματικοί ασχολήθηκαν με τη μελέτη της παλλόμενης χορδής. Φαινόμενο άμεσα σχετιζόμενο με τη μαθηματική θεωρία των μουσικών ήχων (έγχορδα - 1 διάσταση, κρουστά - 2 διαστάσεις).

Κατά το 18ο αιώνα, ο Βρετανός **Brook Taylor (1685-1731)**, ο **Jean D' Alembert (1717-1783)**, Γάλλος μαθηματικός, οι **Daniel Bernoulli (1700-1782)** και **Leonard Euler (1707-1783)** από την Ελβετία είναι από τους κυριότερους μελετητές του μαθηματικού προβλήματος της παλλόμενης χορδής. Περί το 1747 εμφανίζεται η εργασία του Jean D' Alembert για τη μονοδιάστατη κυματική εξίσωση με χωροχρονική

εξάρτηση, όπου δίδεται και η γνωστή ως λύση D' Alembert (Βλέπε, Ενότητα 11.4.2). Η εργασία αυτή κατά πολλούς σηματοδοτεί την εμφάνιση της πρώτης μερικής διαφορικής εξίσωσης.

Κατά τον 19ο αιώνα η κυματική εξίσωση εφαρμόστηκε στο ταχύτατα αναπτυσσόμενο πεδίο της Ελαστικότητας, κατά συνέπεια και στη μελέτη της διάδοσης του ήχου και του φωτός. Οι κυριότερες συνεισφορές έγιναν από τους **Simon Denis Poisson (1781-1840)**, **Bernhard Riemann (1826-1866)**, **Hermann von Helmholtz (1821-1894)**, **Gustav R. Kirchhoff (1824-1887)** και **John W. S. Rayleigh (1842 - 1919)**.

Τον εικοστό αιώνα η κυματική εξίσωση και οι συνδεδεμένες με αυτήν εξισώσεις (όπως Dirac, Klein-Gordon, Maxwell, κλπ.) αποτελούν τον μαθηματικό πυρήνα σύγχρονων θεωριών, όπως η κλασική αλλά και η κβαντική προσέγγιση των στοιχειωδών σωματιδίων, η υπεραγωγιμότητα, η υπερρευστότητα (superfluidity). Τέλος, η κυματική εξίσωση αποτελεί κεντρικό μαθηματικό εργαλείο στην ανάπτυξη της θεωρίας των υπερχορδών, η οποία αποτελεί μια από τις τελευταίες προσεγγίσεις του ενοποιημένου πεδίου.

Ήδη από το δέκατο όγδοο αιώνα οι παραπάνω διακεκριμένοι μαθηματικοί είχαν διαμορφώσει τη μερική διαφορική εξίσωση, που περιγράφει το φαινόμενο (κυματική εξίσωση), είχαν βρει τη γενική λύση αυτής και είχαν προσδιορίσει τους θεμελιώδεις παλμικούς τρόπους. Η εμπειρία, που αποκτήθηκε την εποχή εκείνη από τη μελέτη της κυματικής εξίσωσης, οδήγησε στη διατύπωση της αρχής της (γενικευμένης) υπέρθεσης και κατά συνέπεια στην αναπαράσταση τυχαίας συνάρτησης με μια τριγωνομετρική σειρά. Το γεγονός αυτό αποτέλεσε την απαρχή μιας μακράς διαμάχης μεταξύ των μαθηματικών της εποχής γύρω από την εγκυρότητα των συναρτήσεων, που παριστάνονται από ημιτονικές σειρές.

Η εργασία του **Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)** σχετικά με τη μετάδοση της θερμότητας, που οδήγησε σε αντίστοιχα αναπτύγματα των λύσεων με ημιτονοειδείς σειρές, ενίσχυσε περαιτέρω τη συζήτηση. Τελικά, η μαθηματική ερμηνεία και απόδειξη δόθηκε το 1829 από το Γερμανό μαθηματικό **Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859)**, ο οποίος έδωσε συνθήκες ικανές, ώστε μια τριγωνομετρική σειρά να συγκλίνει σε συγκεκριμένη συνάρτηση.

Η μερική διαφορική εξίσωση, που περιγράφει τη ροή ηλεκτρικού ρεύματος σ' ένα καλώδιο, ονομάζεται **εξίσωση τηλεγράφου (ή τηλεφώνου)** και σε γραμμική μορφή είναι

$$LCU_{tt}(x,t) + (GL+RC)U_t(x,t) + RGU(x,t) = U_{xx}(x,t), \quad x \in I \subset \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (1.1)$$

όπου  $R$  η αντίσταση,  $L$  η επαγωγή,  $C$  η χωρητικότητα και  $G$  η διαρροή, όλα μετρημένα ανά μονάδα μήκους του καλωδίου. Η άγνωστη συνάρτηση  $U(x,t)$  παριστά την τάση ή το ρεύμα στη θέση  $x$  κατά τη χρονική στιγμή  $t$ . Με τη βοήθεια των μετασχηματισμών

$$2b = \frac{R}{L} + \frac{G}{C}, \quad c^2 = \frac{1}{CL}, \quad a = \frac{RG}{CL},$$

η εξίσωση (1.1) λαμβάνει τη μορφή

$$U_{tt}(x, t) + 2bU_t(x, t) + aU(x, t) = c^2 U_{xx}(x, t), \quad x \in I \subset \mathbb{R}, \quad t > 0. \quad (1.2)$$

Επειδή ισχύει η σχέση  $AC - B^2 = -c^2 < 0$ , η εξίσωση (1.2) άρα και η (1.1) είναι υπερβολικού τύπου, για κάθε τιμή των συντελεστών  $a, b, c$ . Μερική περίπτωση αυτής της εξίσωσης ( $a = -\delta$ ,  $b = 0$ ,  $c = 1$ ) αποτελεί η γραμμική εξίσωση **Klein-Gordon**

$$U_{tt}(x, t) - U_{xx}(x, t) = \delta U(x, t), \quad x \in I \subset \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

η οποία συναντάται μεταξύ άλλων στην *Κβαντομηχανική*. Άλλα φαινόμενα τα οποία παρουσιάζουν κυματική συμπεριφορά είναι:

1. ηχητικά κύματα - διαμήκεις δονήσεις,
2. ηλεκτρομαγνητικά κύματα του φωτός και του ηλεκτρισμού,
3. Δονήσεις στη στεριά - διαμήκεις (*longitudinal*), εγκάρσιες (*transversal*) και στρεπτικές (*torsional*),
4. Κύματα πιθανότητας στην *Κβαντομηχανική* (*probability waves in Quantum Mechanics*),
5. Υδάτινα Κύματα (*Water waves*) - εγκάρσια και διαμήκη κύματα,
6. Δονούμενη χορδή - εγκάρσια κύματα.

Σ' αυτό το Κεφάλαιο θα μελετήσουμε την απλούστερη δυνατή μορφή της γραμμικής μη-ομογενούς κυματικής εξίσωσης στη μια διάσταση και σε φραγμένο διάστημα, η οποία είναι της μορφής

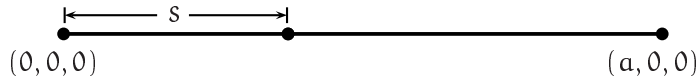
$$U_{xx}(x, t) = c^{-2}U_{tt}(x, t) - g(x, t), \quad 0 < x < a, \quad t > 0. \quad (1.3)$$

Στην επόμενη ενότητα θα μελετήσουμε τη διαδικασία διαμόρφωσης του βασικού γραμμικού και μη γραμμικού μαθηματικού προτύπου, που περιγράφει τα κυματικά φαινόμενα.

### 14.1.2 Κυματική Εξίσωση: Μαθηματική Προτυποποίηση

**A. Διαμόρφωση της Κυματικής Εξίσωσης.** Θεωρούμε μια τέλεια εύκαμπτη (*perfectly flexible*) χορδή μήκους  $a$ , η οποία σε κατάσταση ισορροπίας είναι προεντεταμένη με σταθερά άκρα. Επιλέγουμε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, έτσι ώστε τα δύο άκρα της χορδής να είναι στα σημεία  $(0, 0, 0)$  και  $(a, 0, 0)$ . Η χορδή παραμετρικοποιείται με την παράμετρο  $s$ , όπου  $0 \leq s \leq a$  (Βλέπε Σχήμα 4.1.1). Η κίνηση του σημείου  $s$  της χορδής στον τρισδιάστατο χώρο κατά τη χρονική στιγμή  $t$  περιγράφεται από τη διανυσματική συνάρτηση  $r(s, t) = (X(s, t), Y(s, t), Z(s, t))$ . Το διάνυσμα  $\partial r / \partial t$  δίδει την ταχύτητα του σημείου  $s$  τη χρονική στιγμή  $t$  και εφάπτεται της χορδής στο σημείο  $s$ , ενώ το διάνυσμα  $\partial^2 r / \partial t^2$  αποτελεί την επιτάχυνση της χορδής στο σημείο  $s$  (Βλέπε Σχήμα 4.1.2).

Για να προχωρήσουμε θα εφαρμόσουμε τον *δεύτερο νόμο κίνησης του Newton*, που αναφέρει ότι: η δύναμη σε κάθε τμήμα της χορδής ισούται με τη χρονική παράγωγο της ροπής αυτού του τμήματος. Η μάζα της χορδής  $[\alpha, \beta]$  με  $0 \leq \alpha < \beta \leq a$ , δίδεται από τη συνάρτηση



Σχήμα 14.1.1: Χορδή σε Κατάσταση Ισορροπίας.

πυκνότητας μάζας  $\rho(s)$ ,  $\alpha \leq s \leq \beta$ , δηλαδή έχουμε

$$\int_{\alpha}^{\beta} \rho(s) ds = \text{μάζα του τμήματος } [\alpha, \beta] \text{ της χορδής,}$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \rho(s) \frac{\partial \mathbf{r}(s, t)}{\partial t} ds = \text{ροπή του τμήματος } [\alpha, \beta] \text{ της χορδής.}$$

Το τμήμα  $[\alpha, \beta]$  της χορδής υφίσταται τις δυνάμεις επαφής στα άκρα  $\alpha, \beta$  από το υπόλοιπο



Σχήμα 14.1.2: Παλλόμενη Χορδή και Διάνυσμα Ταχύτητας.

της χορδής και τις εξωτερικές δυνάμεις από το περιβάλλον, όπως η βαρύτητα. Οι εξωτερικές δυνάμεις γραφόμενες ως μια διανυσματική συνάρτηση  $\mathbf{F}(s, t) = (F_1(s, t), F_2(s, t), F_3(s, t))$ , παριστάνουν τη δύναμη ανά μονάδα μάζας στο σημείο  $s$  της χορδής. Για να περιγράψουμε τις δυνάμεις επαφής, εισάγουμε την τάση  $T(s, t)$ . Το τμήμα  $[\beta, a]$  της χορδής ασκεί μια δύναμη επαφής επί του τμήματος  $[\alpha, \beta]$  της χορδής και στο σημείο  $s = \beta$ , η οποία δίδεται από την παράσταση

$$T^+(\beta, t) \frac{\partial \mathbf{r}(\beta, t)/\partial s}{|\partial \mathbf{r}(\beta, t)/\partial s|}.$$

Η μαθηματική έκφρασή της υπόθεσης ότι, η χορδή είναι τέλεια εύκαμπτη, είναι ότι, η παραπάνω δύναμη επαφής έχει διεύθυνση κατά μήκος της εφαπτομένης της χορδής στο σημείο  $s = \beta$ . Κατ' ανάλογο τρόπο, έχουμε (Βλέπε, Σχήμα 4.1.3) μια δύναμη, που ασκείται από το τμήμα  $[0, \alpha]$  στο τμήμα  $[\alpha, \beta]$  της χορδής και στο σημείο  $s = \alpha$ , η οποία δίδεται από την παράσταση

$$-T^-(\alpha, t) \frac{\partial \mathbf{r}(\alpha, t)/\partial s}{|\partial \mathbf{r}(\alpha, t)/\partial s|}.$$

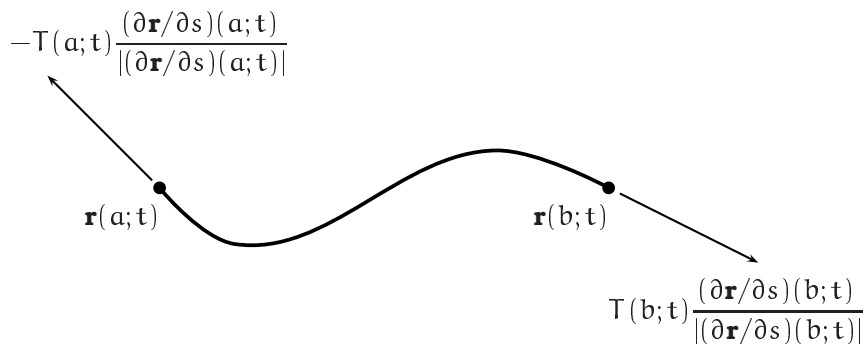
Έτσι, σύμφωνα με το δεύτερο νόμο κίνησης του Newton θα έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \rho(s) \frac{\partial^2 \mathbf{r}(s, t)}{\partial t^2} ds = & + \int_{\alpha}^{\beta} \rho(s) \mathbf{F}(s, t) ds \\ & + T^+(\beta, t) \frac{\partial \mathbf{r}(\beta, t)/\partial s}{|\partial \mathbf{r}(\beta, t)/\partial s|} - T^-(\alpha, t) \frac{\partial \mathbf{r}(\alpha, t)/\partial s}{|\partial \mathbf{r}(\alpha, t)/\partial s|}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Ένα σχόλιο που αφορά τα  $\pm$  της συνάρτησης τάσης: Αν πάρουμε το όριο  $\beta \rightarrow \alpha$  στην εξίσωση (1.4), προκύπτει ότι  $T^+(\alpha, t) = T^-(\alpha, t)$ . Έτσι μπορούμε να παραλείψουμε το πρόσημο και να χρησιμοποιούμε το σύμβολο  $T(s, t)$  για την κοινή τιμή της τάσης στη θέση  $(s, t)$ . Για να γράψουμε τη διανυσματική ολοκληρωτική εξίσωση (1.4) στη μορφή διαφορικής εξίσωσης, παραγωγίζουμε ως προς  $\beta$ , θέτουμε  $\beta = s$  και βρίσκουμε την εξίσωση της παλλόμενης χορδής

$$\rho(s) \frac{\partial^2 \mathbf{r}(s, t)}{\partial t^2} = \rho(s) F(s, t) + \frac{\partial}{\partial s} \left\{ T(s, t) \frac{\partial \mathbf{r}(s, t) / \partial s}{|\partial \mathbf{r}(s, t) / \partial s|} \right\}, \quad s \in (0, a), \quad t > 0. \quad (1.5)$$

Η διανυσματική διαφορική εξίσωση (1.5) ισοδυναμεί με τρεις βαθμωτές διαφορικές εξισώσεις



Σχήμα 14.1.3: Δυνάμεις Επαφής στην Παλλόμενη Χορδή.

ως προς τους αγνώστους  $X, Y, Z, T$ . Για κάθε ελαστικό υλικό υπάρχει μια καλά ορισμένη συνάρτηση  $N$ , που εκφράζει τη σχέση της τάσης  $T(s, t)$  και του παράγοντα  $|\partial \mathbf{r}(s, t) / \partial s|$ , η οποία γράφεται

$$T(s, t) = N(|\partial \mathbf{r}(s, t) / \partial s|, s). \quad (1.6)$$

Παρά το γεγονός ότι η εξίσωση, που προκύπτει από την αντικατάσταση της σχέσης (1.6) στην εξίσωση (1.5), αποτελεί μια αυστηρή συνέπεια του δευτέρου νόμου κίνησης του Newton, εντούτοις η προσπάθεια άμεσης επίλυσης αυτής συναντά ανυπέρβλητες δυσκολίες. Έτσι καταφεύγουμε στη μελέτη μιας πρώτης προσέγγισης αυτής της εξίσωσης, δηλαδή της γραμμικοποίησής της. Αποδεικνύεται ότι, οι λύσεις αυτής της γραμμικοποιημένης εξίσωσης δίδουν ικανοποιητικές απαντήσεις, ειδικά σε φαινόμενα, που αφορούν μικρές δονήσεις. Για περισσότερες πληροφορίες σχετικές με το θέμα παραπέμπουμε στο κλασικό σύγγραμμα του H. F. Weinberger [120] καθώς και στο σημαντικό άρθρο του S. S. Antman [5]. Για να βρούμε την πρώτη προσέγγιση του προβλήματος χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο μετασχηματισμό

$$X(s, t) = s + \varepsilon x(s, t), \quad Y(s, t) = \varepsilon y(s, t), \quad Z(s, t) = \varepsilon z(s, t), \quad (1.7)$$

$$T(s, t) = T_0 + \varepsilon T_1(s, t), \quad F(s, t) = \varepsilon f(s, t), \quad (1.8)$$

όπου η παράμετρος  $\varepsilon$  μπορεί να θεωρηθεί ότι, είναι τάξης μεγέθους όση η μέγιστη μετατόπιση της χορδής από τη θέση ουδέτερης ισορροπίας  $X = s, Y = 0, Z = 0$ . Αντικαθιστώντας το μετασχηματισμό (1.7) - (1.8) στις εξισώσεις (1.5), (1.6) και αγνοώντας τις ανώτερες δυνάμεις

του  $\varepsilon$  μπορούμε να υπολογίσουμε τα  $T_0, T_1$ . Ειδικά, το  $T_0$  εκφράζει την τάση της χορδής στη θέση ουδέτερης ισορροπίας  $X = s, Y = 0, Z = 0$ . Από τις σχέσεις (1.7) προκύπτει ότι

$$\frac{\partial X(s, t)}{\partial s} = 1 + \varepsilon \frac{\partial x(s, t)}{\partial s}, \quad \frac{\partial Y(s, t)}{\partial s} = \varepsilon \frac{\partial y(s, t)}{\partial s}, \quad \frac{\partial Z(s, t)}{\partial s} = \varepsilon \frac{\partial z(s, t)}{\partial s}. \quad (1.9)$$

Έτσι προκύπτει

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \right|^2 &= \left( 1 + \varepsilon \frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 + \left( \varepsilon \frac{\partial y}{\partial s} \right)^2 + \left( \varepsilon \frac{\partial z}{\partial s} \right)^2 \\ &= 1 + 2\varepsilon \frac{\partial x}{\partial s} + \varepsilon^2 \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial s} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial s} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Παίρνοντας την τετραγωνική ρίζα της σχέσης (1.10) και χρησιμοποιώντας τον ακόλουθο τύπο του αναπτύγματος Taylor:  $(1 + a)^{1/2} = 1 + \frac{a}{2} + O(a^2)$ , προκύπτει ότι

$$\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \right| = 1 + \varepsilon \frac{\partial x}{\partial s} + O(\varepsilon^2).$$

Επομένως ισχύει ότι

$$\frac{\partial \mathbf{r}(s, t)/\partial s}{|\partial \mathbf{r}(s, t)/\partial s|} = (1 + O(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \frac{\partial y}{\partial s} + O(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \frac{\partial z}{\partial s} + O(\varepsilon^2)). \quad (1.11)$$

Εισάγοντας την τελευταία εξίσωση (1.11) στην εξίσωση (1.5), χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς (1.7) - (1.8) και τέλος εξισώνοντας τους συντελεστές του  $\varepsilon$  σε κάθε μια από τις τρεις προκύπτουσες εξισώσεις, λαμβάνουμε τις ακόλουθες γραμμικοποιημένες εξισώσεις για τις εγκάρσιες και διαμήκεις δονήσεις (longitudinal and transverse vibrations)

$$\rho(s) \frac{\partial^2 x(s, t)}{\partial t^2} = \rho(s) f_1(s, t) + \frac{\partial}{\partial s} T_1(s, t), \quad s \in (0, a), \quad t > 0, \quad (1.12)$$

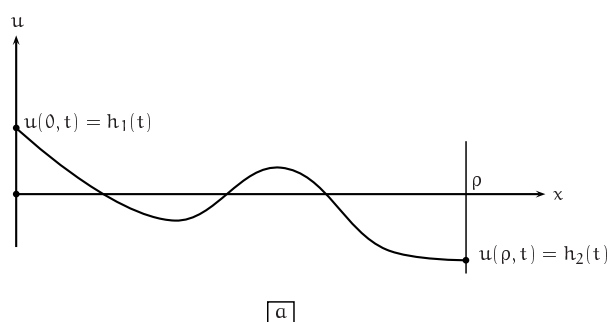
$$\rho(s) \frac{\partial^2 y(s, t)}{\partial t^2} = \rho(s) f_2(s, t) + T_0 \frac{\partial^2 y(s, t)}{\partial s^2}, \quad s \in (0, a), \quad t > 0, \quad (1.13)$$

$$\rho(s) \frac{\partial^2 z(s, t)}{\partial t^2} = \rho(s) f_3(s, t) + T_0 \frac{\partial^2 z(s, t)}{\partial s^2}, \quad s \in (0, a), \quad t > 0. \quad (1.14)$$

Οι εξισώσεις που μας ενδιαφέρουν, είναι αυτές που περιγράφουν τις εγκάρσιες δονήσεις και αυτές είναι οι εξισώσεις (1.13) και (1.14). Οι εξισώσεις αυτές είναι του αυτού τύπου, ο οποίος είναι αυτός της λεγόμενης μονοδιάστατης γραμμικής κυματικής εξίσωσης με γενική μορφή

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = f(x, t) + \frac{T_0}{\rho(x)} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad x \in (0, a), \quad t > 0. \quad (1.15)$$

**Β. Αρχικές και Συνοριακές Συνθήκες - Καλή Τοποθέτηση.** Από τη μέχρι τώρα ανάλυση φαίνεται ότι, η εξίσωση θερμότητας (1.15) περιγράφει το φαινόμενο των εγκάρσιων δονήσεων σε μια ράβδο ή χορδή. Για την πλήρη μελέτη του φαινομένου πρέπει να λάβουμε υπ' όψιν τα δεδομένα στο σύνορο του σώματος καθώς και τις συνθήκες κατά την εκκίνηση μελέτης του φαινομένου, δηλαδή τις συνοριακές και



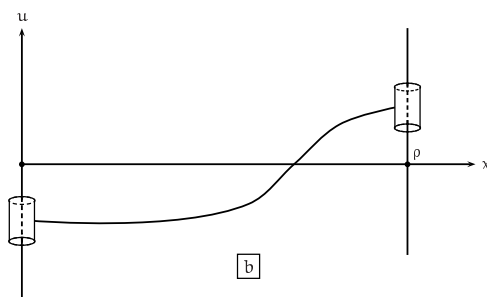
Σχήμα 14.1.4: Συνθήκες Dirichlet

αρχικές συνθήκες, αντίστοιχα. Οι συνοριακές συνθήκες, που συνοδεύουν συνήθως φαινόμενα της ανωτέρω μορφής, ομαδοποιούνται στις ακόλουθες κύριες κατηγορίες

1. Ελεγχόμενα συνοριακά σημεία ή συνοριακές συνθήκες πρώτου είδους ή συνθήκες Dirichlet της μορφής (Βλέπε, Σχήμα 4.1.4)

$$u(0, t) = h_1(t), \quad u(p, t) = h_2(t), \quad t > 0, \quad (1.16)$$

2. Δεδομένη δύναμη στα συνοριακά σημεία ή συνοριακές συνθήκες δεύτερου



Σχήμα 14.1.5: Συνθήκες Neumann

είδους ή συνθήκες Neumann της μορφής (Βλέπε, Σχήμα 4.1.5)

$$u_x(0, t) = f_1(t), \quad u_x(p, t) = f_2(t), \quad t > 0, \quad (1.17)$$

3. Ελαστική σύνδεση στο σύνορο ή συνοριακές συνθήκες τρίτου είδους ή συνθήκες Robin της μορφής (Βλέπε, Σχήμα 4.1.6)

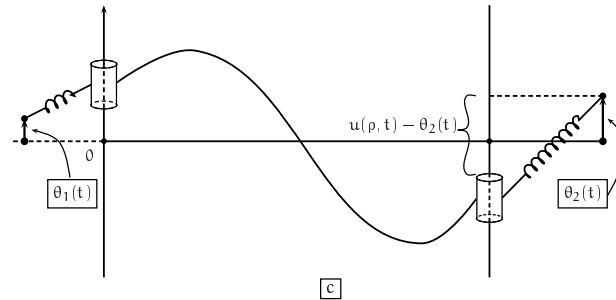
$$u_x(0, t) - \frac{h}{\Gamma} u(0, t) = \theta_1(t), \quad u_x(p, t) - \frac{h}{\Gamma} u(p, t) = \theta_2(t), \quad t > 0, \quad (1.18)$$

όπου  $h$  η σταθερά των ελατηρίων και  $T$  η τάση αυτών.

Τέλος, για να έχουμε ένα **καλά τοποθετημένο πρόβλημα** του τύπου (1.15) θα πρέπει να συνοδεύεται από **αρχικές συνθήκες** της μορφής

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad x \in (0, a). \quad (1.19)$$

Στη συνέχεια αυτού του Κεφαλαίου θα μελετήσουμε διάφορες βασικές μορφές του



Σχήμα 14.1.6: Συνθήκες Robin

προβλήματος (1.15), (1.19) συνοδευόμενου από μια των συνοριακών συνθηκών (1.16), (1.17) ή (1.18), στη μια διάσταση και σ' ένα φραγμένο διάστημα του  $\mathbb{R}$ .

## 14.2 Ομογενής Κυματική Εξίσωση

### 14.2.1 Εύρεση Λύσης - Διερεύνηση

Θεωρούμε μια χορδή από ομογενές υλικό μήκους  $p$ , η οποία ταλαντώνεται χωρίς την επίδραση βαρύτητας και με μικρό πλάτος. Οι εγκάρσιες μετατοπίσεις  $u(x, t)$  των σημείων της χορδής συναρτήσει του χρόνου αποτελούν λύσεις της εξίσωσης

$$u_{xx}(x, t) = c^{-2}u_{tt}(x, t), \quad 0 < x < p, \quad t > 0. \quad (2.1)$$

Υποθέτουμε ακόμα ότι το φαινόμενο συνοδεύεται από τις παρακάτω συνοριακές και αρχικές συνθήκες, αντίστοιχα

$$u(0, t) = 0, \quad u(p, t) = 0, \quad t > 0, \quad (2.2)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < p. \quad (2.3)$$

Για την επίλυση θα ακολουθήσουμε τα εξής βήματα.

#### A. Εύρεση της Τυπικής Λύσης - Χωρισμός Μεταβλητών

Κάνουμε χρήση της μεθόδου χωρισμού των μεταβλητών, δηλαδή υποθέτουμε ότι η λύση έχει τη μορφή

$$u(x, t) = X(x)W(t). \quad (2.4)$$

Έτσι η αντικατάσταση της παράστασης (2.4) στην εξίσωση (2.1) οδηγεί στις ακόλουθες συνήθειες διαφορικές εξισώσεις

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < p, \quad (2.5)$$

$$W''(t) + \lambda c^2 W(t) = 0, \quad t > 0. \quad (2.6)$$

Οι συνοριακές συνθήκες (2.2) γίνονται

$$X(0)W(t) = 0, \quad X(p)W(t) = 0.$$

Από εδώ προκύπτει ότι

$$X(0) = 0, \quad X(p) = 0. \quad (2.7)$$

Το πρόβλημα ιδιοτιμών (2.5), (2.7) δέχεται ως λύσεις τα ιδιοζεύγη

$$\lambda_n = k_n^2 = \frac{n^2 \pi^2}{p^2}, \quad \Phi_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{p}, \quad 0 < x < p, \quad (2.8)$$

όπου η ποσότητα  $k_n$  αποτελεί τον κυματάριθμο τάξης  $n$  του προβλήματος. Γι' αυτές τις τιμές του  $\lambda$  οι λύσεις της εξίσωσης (2.6) είναι

$$W_n(t) = a_n \cos \frac{nc\pi t}{p} + b_n \sin \frac{nc\pi t}{p}, \quad t > 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.9)$$

όπου  $a_n, b_n, n = 1, 2, 3, \dots$ , αυθαίρετες σταθερές. Συνδυάζοντας τις (2.8) και (2.9) προκύπτει ότι για κάθε  $n = 1, 2, 3, \dots$ , οι συναρτήσεις

$$u_n(x, t) = \left\{ a_n \cos \frac{nc\pi t}{p} + b_n \sin \frac{nc\pi t}{p} \right\} \sin \frac{n\pi x}{p}, \quad 0 < x < p, \quad t > 0, \quad (2.10)$$

αποτελούν τις λύσεις του προβλήματος (2.1) - (2.2). Αν θεωρήσουμε το μετασχηματισμό  $d_n = \tan^{-1}(b_n/a_n)$  οι λύσεις (2.10), για κάθε  $n = 1, 2, 3, \dots$ , παίρνουν μια άλλη ιδιαίτερα χρήσιμη μορφή, που είναι

$$u_n(x, t) = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \cos \left( \frac{nc\pi t}{p} - d_n \right) \sin \left( \frac{n\pi x}{p} \right), \quad 0 < x < p, \quad t > 0. \quad (2.11)$$

Η  $u_n(x, t)$  αποτελεί τον  $n$ -τρόπο ταλάντωσης ή την  $n$ -αρμονική του προβλήματος. Για την πλήρη επίλυση του προβλήματος θα πρέπει να προσδιορισθούν οι αυθαίρετες σταθερές  $a_n, b_n$  της σχέσης (2.9). Αυτό γίνεται με την εφαρμογή της γενικευμένης αρχής της υπέρθεσης κατ' αρχή και στη συνέχεια τη χρήση των αρχικών συνθηκών. Πιο συγκεκριμένα, θεωρούμε το ανάπτυγμα

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos \left( \frac{nc\pi t}{p} \right) + b_n \sin \left( \frac{nc\pi t}{p} \right) \right\} \sin \left( \frac{n\pi x}{p} \right), \quad (2.12)$$

όπου  $0 < x < p$ ,  $t > 0$ . Εύκολα μπορεί να επαληθευθεί ότι η συνάρτηση (2.12) αποτελεί λύση τόσο της εξίσωσης όσο και των συνοριακών συνθηκών. Για να ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες θα πρέπει να ισχύουν οι σχέσεις

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{p}, \quad 0 < x < p, \quad (2.13)$$

$$u_t(x, 0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nc\pi b_n}{p} \sin \frac{n\pi x}{p}, \quad 0 < x < p, \quad (2.14)$$

όπου έχουμε υποθέσει ότι είναι δυνατή η εναλλαγή διαφόρισης και άπειρης άθροισης. Από τις (2.13), (2.14) προκύπτει ότι τα  $a_n, b_n$  αποτελούν τους ημιτονικούς συντελεστές *Fourier* των συναρτήσεων  $f(x)$  και  $g(x)$  στο διάστημα  $[0, p]$ . Έτσι, για  $n = 1, 2, 3, \dots$ , θα ισχύει ότι

$$a_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \sin \frac{n\pi x}{p} dx, \quad (2.15)$$

$$b_n = \frac{2}{nc\pi} \int_0^p g(x) \sin \frac{n\pi x}{p} dx. \quad (2.16)$$

Άρα τελικά η (μοναδική) τυπική λύση του προβλήματος (2.1)-(2.3) δίδεται από τη σχέση (2.12), όπου οι συντελεστές  $a_n, b_n$  καθορίζονται από τις σχέσεις (2.15), (2.16).

## B. Ομαλοποίηση της Λύσης - Κλασικές & Ασθενείς Λύσεις.

Όπως έχει αναφερθεί και προηγούμενα οι λύσεις, που έχουν προκύψει με την παραπάνω διαδικασία, είναι **τυπικές** (ασθενείς). Εδώ θα μελετήσουμε τις ικανές συνθήκες, ώστε η τυπική λύση να είναι **κλασική λύση**. Όπως έχουμε αναφέρει στο προηγούμενο Κεφάλαιο 13, στις παραβολικές εξισώσεις οι λύσεις είναι κλασικές, αρκεί οι αρχικές συνθήκες να είναι τμηματικά συνεχείς. Αντίθετα, στις υπερβολικές εξισώσεις για να έχουμε κλασική λύση, θα πρέπει να περιορίσουμε αρκετά τις αρχικές συνθήκες. Πιο συγκεκριμένα, μπορούμε να διαπιστώσουμε εύκολα ότι η σειρά

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{nc\pi t}{p} \sin \frac{n\pi x}{p}, \quad 0 < x < p, \quad t > 0, \quad (2.17)$$

όπου  $a_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \sin \frac{n\pi x}{p} dx$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , αποτελεί μια τυπική λύση του προβλήματος

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, t) &= c^{-2} u_{tt}(x, t), \quad 0 < x < p, \quad t > 0, \\ u(0, t) &= 0, \quad u(p, t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < p, \end{aligned} \quad (2.18)$$

Επίσης η σειρά

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{nc\pi t}{p} \sin \frac{n\pi x}{p}, \quad 0 < x < p, \quad t > 0, \quad (2.19)$$

όπου  $b_n = \frac{2}{nc\pi} \int_0^p g(x) \sin \frac{n\pi x}{p} dx$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , αποτελεί τυπική λύση του προβλήματος

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, t) &= c^{-2} u_{tt}(x, t), \quad 0 < x < p, \quad t > 0, \\ u(0, t) &= 0, \quad u(p, t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= 0, \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < p. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Επομένως, με βάση την αρχή της υπέρθεσης, η συνάρτηση

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t), \quad 0 < x < p, \quad t > 0, \quad (2.21)$$

θα αποτελεί τυπική λύση του προβλήματος (2.1) - (2.3).

**Θεώρημα 14.2.1. (Ύπαρξη Λύσης).** Έστω ότι οι συναρτήσεις  $f(x)$ ,  $f'(x)$ ,  $f''(x)$  είναι συνεχείς στο διάστημα  $[0, p]$  και ισχύουν οι σχέσεις  $f(0) = f''(0) = f(p) = f''(p) = 0$ . Τότε η συνάρτηση  $v(x, t)$  αποτελεί κλασική λύση του προβλήματος (2.18).

Απόδειξη Αν οι συναρτήσεις  $f(x)$ ,  $f'(x)$  είναι συνεχείς στο διάστημα  $[0, p]$  και  $f(0) = f(p) = 0$ , τότε αποδεικνύεται (από τη θεωρία σύγκλισης των σειρών Fourier) ότι η σειρά

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{p}, \quad 0 < x < p, \quad (2.22)$$

συγκλίνει ομοιόμορφα (σε κάθε πεπερασμένο διάστημα) στην περιττή περιοδική επέκταση  $f_0(x)$ ,  $x \in (-p, p)$ , της  $f(x)$ . Ακολουθώντας τη διαδικασία της λύσης D'Alembert (Βλέπε, Ενότητα 11.4.2) βρίσκουμε ότι η λύση (2.17) μπορεί να γραφεί

$$v(x, t) = \frac{f_0(x + ct) + f_0(x - ct)}{2}, \quad 0 < x < p, \quad t > 0, \quad (2.23)$$

Προφανώς η  $v(x, t)$  είναι συνεχής συνάρτηση. Επιπλέον ισχύει

$$v(0, t) = \frac{f_0(ct) + f_0(-ct)}{2} = \frac{f_0(ct) - f_0(ct)}{2} = 0, \quad t > 0$$

και

$$\begin{aligned} v(p, t) &= \frac{f_0(p + ct) + f_0(p - ct)}{2} = \frac{f_0(p + ct) + f_0(-p - ct)}{2} \\ &= \frac{f_0(p + ct) - f_0(p + ct)}{2} = 0, \quad t > 0, \end{aligned}$$

δηλαδή αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση  $v(x, t)$  ικανοποιεί τις *συνοριακές συνθήκες*. Ακόμα επαληθεύονται οι *αρχικές συνθήκες*, αφού έχουμε τις σχέσεις

$$\begin{aligned} v(x, 0) &= \frac{f_0(x) + f_0(x)}{2} = f_0(x) = f(x), \quad 0 < x < p, \\ v_t(x, 0) &= \left[ \frac{c(f_0)'(x+ct) - c(f_0)'(x-ct)}{2} \right]_{t=0} \\ &= \frac{c[(f_0)'(x) - (f_0)'(x)]}{2} = 0, \quad 0 < x < p. \end{aligned}$$

Τέλος, παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} v_{xx}(x, t) &= \frac{(f_0)''(x+ct) + (f_0)''(x-ct)}{2}, \quad 0 < x < p, \quad t > 0, \\ v_{tt}(x, t) &= \frac{c^2 [(f_0)''(x+ct) + (f_0)''(x-ct)]}{2}, \quad 0 < x < p, \quad t > 0, \end{aligned}$$

όπου οι  $v_{xx}(x, t), v_{tt}(x, t)$  είναι συνεχείς, αφού εξ υποθέσεως η  $f''(x)$  είναι. Έτσι προκύπτει ότι

$$v_{xx} - c^{-2}v_{tt} = \frac{(f_0)''(x+ct) + (f_0)''(x-ct)}{2} - \frac{(f_0)''(x+ct) + (f_0)''(x-ct)}{2} = 0,$$

για κάθε  $0 < x < p, \quad t > 0$  και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί.  $\diamond$

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται το ακόλουθο αποτέλεσμα (Βλέπε, [119, σελ. 131-133])

**Θεώρημα 14.2.2. (Ύπαρξη Λύσης).** *Η συνάρτηση  $w(x, t)$  είναι κλασική λύση του προβλήματος (2.20), αν οι συναρτήσεις  $g(x), g'(x)$  είναι συνεχείς στο διάστημα  $[0, p]$  και ισχύουν οι σχέσεις  $g(0) = g(p) = 0$ .*

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι αν οι συναρτήσεις  $f(x), g(x)$  των αρχικών συνθηκών δεν πληρούν τις ικανές συνθήκες, τότε μπορεί να μην προκύπτει κλασική λύση για το πρόβλημα (2.1) - (2.3). Σ' αυτή την περίπτωση η τυπική λύση  $u(x, t)$  αποτελεί μια *γενικευμένη ή ασθενή λύση* του προβλήματος.

### Γ. Μονοσήμαντο της Λύσης.

Για το πρόβλημα (2.1)-(2.3) ισχύει το ακόλουθο αποτέλεσμα μονοσήμαντου

**Θεώρημα 14.2.3. (Μοναδικότητα)** *Το πρόβλημα αρχικών - συνοριακών συνθηκών (2.1)-(2.3) δέχεται μοναδική λύση.*

*Απόδειξη* Έστω ότι υπάρχουν δύο λύσεις  $u(x, t), v(x, t)$  για το πρόβλημα (2.1) - (2.3). Συμβολίζουμε με  $w(x, t) = u(x, t) - v(x, t)$ . Είναι εύκολο να δούμε ότι η συνάρτηση  $w(x, t)$  ικανοποιεί το πρόβλημα

$$\begin{aligned} w_{xx}(x, t) &= c^{-2}w_{tt}(x, t), \quad 0 < x < p, \quad t > 0, \\ w(0, t) &= 0, \quad w(p, t) = 0, \quad t > 0, \\ w(x, 0) &= 0, \quad w_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < p. \end{aligned}$$

Θα αποδείξουμε ότι  $w(x, t) \equiv 0$ , για κάθε  $0 < x < p$ ,  $t > 0$ . Για το σκοπό αυτό θεωρούμε τη μη αρνητική συνάρτηση,

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^p \{c^2 w_x^2(x, t) + w_t^2(x, t)\} dx, \quad t > 0,$$

η οποία (φυσικά) παριστάνει την ολική ενέργεια της δονούμενης χορδής κατά τη χρονική στιγμή  $t$ . Επειδή η  $w \in C^2((0, p) \times (0, +\infty))$ , παραγωγίζοντας την  $E(t)$  προκύπτει

$$E'(t) = \int_0^p \{c^2 w_x(x, t) w_{xt}(x, t) + w_t(x, t) w_{tt}(x, t)\} dx, \quad t > 0.$$

Όμως ισχύει

$$\int_0^p c^2 w_x(x, t) w_{xt}(x, t) dx = [c^2 w_x(x, t) w_t(x, t)]_0^p - \int_0^p c^2 w_t(x, t) w_{xx}(x, t) dx.$$

Από τις συνοριακές συνθήκες προκύπτει ότι  $w_t(0, t) = w_t(p, t) = 0$ , δηλαδή ισχύει

$$\int_0^p c^2 w_x(x, t) w_{xt}(x, t) dx = - \int_0^p c^2 w_t(x, t) w_{xx}(x, t) dx.$$

Επομένως έχουμε

$$E'(t) = \int_0^p w_t(x, t) \{w_{tt}(x, t) - c^2 w_{xx}(x, t)\} dx = 0, \quad t > 0,$$

το οποίο σημαίνει ότι, η ολική ενέργεια  $E(t)$  είναι σταθερά, έστω ίση με  $\sigma$ . Επειδή  $w(x, 0) = 0$ , για κάθε  $x \in (0, p)$ , έχουμε ότι  $w_x(x, 0) = 0$ . Λαμβάνοντας δε υπ' όψιν ότι  $w_t(x, 0) = 0$ , προκύπτει (Βλέπε, [119, σελ. 133])

$$E(0) = \frac{1}{2} \int_0^p \{c^2 w_x^2(x, t) + w_t^2(x, t)\}_{t=0} dx = 0.$$

Επομένως  $E(t) = 0$ , το οποίο συμβαίνει, αν και μόνο αν  $w_x(x, t) \equiv 0$  και  $w_t(x, t) \equiv 0$  συγχρόνως, για κάθε  $x \in (0, p)$ ,  $t > 0$ . Αυτό συνεπάγεται ότι,  $w(x, t) \equiv$  σταθερά παντού στο  $(0, p) \times (0, \infty)$ . Το τελευταίο συνδυαζόμενο με τη σχέση  $w(x, 0) = 0$ , δίδει τελικά ότι  $w(x, t) \equiv 0$ , για κάθε  $x \in (0, p)$ ,  $t > 0$ . Πράγμα που αποδεικνύει τη μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος (2.1)-(2.3).  $\diamond$

#### Δ. Φυσική Σημασία της Λύσης.

(i) Οι λύσεις (2.10) ή (2.11) ονομάζονται **στάσιμα κύματα (standing waves)** του προβλήματος (2.1)-(2.3). Γιατί κάθε μια απ' αυτές τις λύσεις μπορεί να θεωρηθεί ότι έχει **σταθερό σχήμα**  $\sin \frac{n\pi x}{p}$  αλλά **μεταβαλλόμενο πλάτος**  $W_n(t)$ . Τα σημεία, όπου  $\sin \frac{n\pi x}{p} = 0$ , ονομάζονται **κόμβοι (nodes)** της λύσης και αποτελούν τα **στάσιμα σημεία** του προβλήματος αρχικών - συνοριακών συνθηκών (2.1)-(2.3), αφού αντιστοιχούν σε μηδενική μετατόπιση της χορδής, για κάθε  $t > 0$ . Αποδεικνύεται ότι η λύση  $u_n(x, t)$  έχει  $(n - 1)$  κόμβους. Στο παρακάτω Σχήμα 4.2.2 φαίνονται οι κόμβοι για  $n = 1, 2, 3, 4$ .

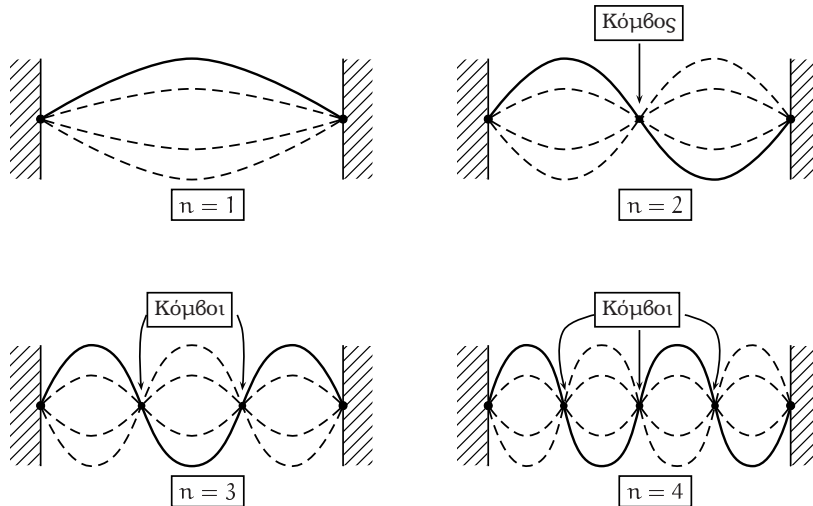
(ii) Από τον τύπο (2.11) της λύσης βλέπουμε ότι για σταθερό  $x$  οι λύσεις  $u_n(x, t)$  παριστάνουν απλές αρμονικές ταλαντώσεις **γωνιακής συχνότητας**

$$\omega_n = \frac{nc\pi}{p}$$

και πλάτους

$$\sqrt{a_n^2 + b_n^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right).$$

Η συχνότητα  $\omega_n$  αποτελεί την  $n$ -φυσική συχνότητα ή αρμονική του προβλήματος (2.1) - (2.3), ενώ η  $\omega_1$  αποτελεί τη θεμελιώδη συχνότητα αυτού.



Σχήμα 14.2.1: Στάσιμα Κύματα και Κόμβοι μιας Παλλόμενης Χορδής για  $n = 1, 2, 3, 4$ .

(iii) Το ύψος του ήχου ενός εγχόρδου εξαρτάται άμεσα από τη θεμελιώδη συχνότητα  $\omega_1$ , δηλαδή όσο μεγαλύτερη είναι η  $\omega_1$ , τόσο υψηλότερος είναι ο ήχος. Επειδή δε  $c = \sqrt{T/\rho}$  βλέπουμε ότι το ύψος αυξάνεται, όσο αυξάνεται η τάση των χορδών ή ελαττώνεται το μήκος τους  $p$ . Οι μουσικοί ήχοι, που παράγονται από ένα έγχορδο, οφείλονται στο γεγονός ότι όλες οι υψηλότερες αρμονικές  $\omega_n$  είναι ακέραια πολλαπλάσια της  $\omega_1$ , αφού  $\omega_n = n\omega_1$ . Κάτι που δεν χαρακτηρίζει γενικά τα μη-έγχορδα όργανα, όπως κρουστά, πνευστά, κ.τ.λ. .

#### Ε. Διαφορά Παραβολικών και Υπερβολικών Εξισώσεων.

Η ουσιώδης διαφορά μεταξύ των λύσεων των παραβολικών και των υπερβολικών εξισώσεων εντοπίζεται στο γεγονός ότι στις μεν πρώτες παρουσιάζονται αρνητικοί εκθετικοί όροι ως προς το χρόνο  $t$ , οι οποίοι τείνουν στο μηδέν αρκετά γρήγορα, καθώς τα  $t, n \rightarrow \infty$ , ενώ στις δεύτερες υπάρχουν ταλαντούμενοι όροι ως προς το χρόνο  $t$  (τριγωνομετρικές συναρτήσεις). Επομένως οι λύσεις-σειρές των παραβολικών εξισώσεων, καθώς και οι παράγωγοι αυτών  $u_{xx}(x, t)$ ,  $u_t(x, t)$  συμπεριφέρονται πολύ καλά ως προς τη σύγκλιση, καθώς τα  $t \rightarrow \infty$  και  $n \rightarrow \infty$ . Αντίθετα, στην περίπτωση των υπερβολικών εξισώσεων, όπου για παράδειγμα συναντούμε τη μορφή

$$u_{xx}(x, t) = - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{p}\right)^2 \left\{ a_n \cos\left(\frac{nc\pi t}{p}\right) + b_n \sin\left(\frac{nc\pi t}{p}\right) \right\} \sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right),$$

βλέπουμε ότι εξαιτίας της παρουσίας του  $n^2$  είναι δυνατόν η σειρά  $u_{xx}(x, t)$  να μη συγκλίνει ακόμα και στην περίπτωση, που έχουμε σύγκλιση της σειράς  $u(x, t)$ .

Τέλος, πρέπει να σημειωθεί ότι τυχόν ασυνέχειες στις αρχικές συνθήκες των υπερβολικών προβλημάτων μεταφέρονται στην ίδια τη λύση  $u(x, t)$ . Ενώ το αντίθετο συμβαίνει στην περίπτωση των παραβολικών εξισώσεων, όπου τόσο οι ασυνέχειες όσο και διάφορες άλλες ιδιομορφίες των αρχικών συνθηκών εξαφανίζονται αυτόματα για  $t > 0$ . Μάλιστα δε, η λύση  $u(x, t)$  είναι αναλυτική σ' όλο το πεδίο ορισμού του προβλήματος.

**Παράδειγμα 14.2.4.** Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών συνθηκών τύπου *Dirichlet*

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, t) &= c^{-2}u_{tt}(x, t), & 0 < x < 1, & t > 0, \\ u(0, t) &= 0, \quad u(1, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) &= x(1-x), \quad u_t(x, 0) = 0, & 0 < x < 1. \end{aligned} \quad (\alpha)$$

*Λύση* Εφαρμόζουμε το χωρισμό μεταβλητών  $u(x, t) = X(x)W(t)$  στο πρόβλημα  $(\alpha)$ , οπότε προκύπτουν οι εξισώσεις

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < 1 \quad (\beta)$$

$$W''(t) + \lambda c^2 W(t) = 0, \quad t > 0. \quad (\gamma)$$

Από τις συνοριακές συνθήκες έχουμε

$$X(0) = 0, \quad X(1) = 0. \quad (\delta)$$

Το πρόβλημα  $(\beta)$  και  $(\delta)$  έχει ιδιοτιμές  $\lambda_n = k_n^2 = n^2\pi^2$  με αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις  $\Phi_n(x) = \sin(n\pi x)$ . Για  $\lambda = \lambda_n$  η εξίσωση  $(\gamma)$  έχει γενική λύση

$$W_n(t) = a_n \cos(nc\pi t) + b_n \sin(nc\pi t), \quad t > 0.$$

Έτσι η λύση του προβλήματος  $(\alpha)$  θα είναι της μορφής

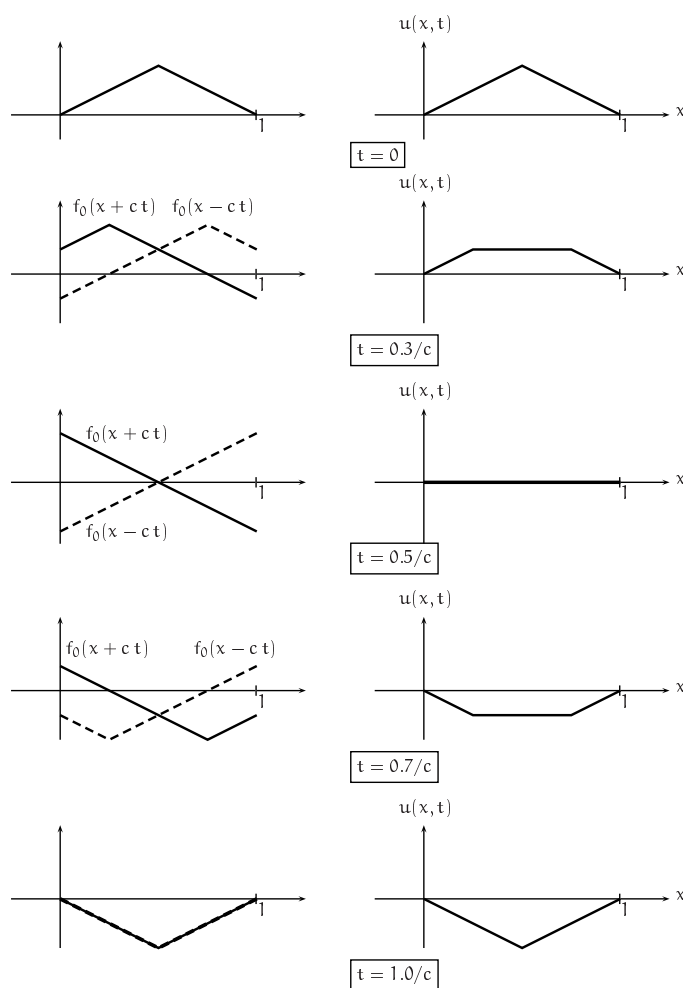
$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(n\pi c t) + b_n \sin(n\pi c t)\} \sin(n\pi x), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

όπου  $a_n, b_n$  προσδιορίστεται συντελεστές. Από την πρώτη αρχική συνθήκη έχουμε

$$u(x, 0) = x(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\pi x), \quad 0 < x < 1.$$

Επομένως τα  $a_n$  αποτελούν τους ημιτονικούς συντελεστές Fourier της συνάρτησης  $x(1-x)$ , δηλαδή θα ισχύει

$$\begin{aligned} a_n &= 2 \int_0^1 f(x) \sin(n\pi x) dx = 2 \int_0^1 x \sin(n\pi x) dx - 2 \int_0^1 x^2 \sin(n\pi x) dx \\ &= \frac{4}{n^3\pi^3} [1 + (-1)^{n+1}], \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$



Σχήμα 14.2.2: Μετατόπιση μιας Παλλόμενης Χορδής κατά το Πρώτο Ήμισυ της Περιόδου.

Επίσης από τη δεύτερη αρχική συνθήκη προκύπτει ότι

$$u_t(x, 0) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi c b_n \sin(n\pi x), \quad 0 < x < 1.$$

Επομένως θα έχουμε ότι  $b_n = 0, n = 1, 2, 3, \dots$ . Άρα τελικά η τυπική λύση του προβλήματος (α) είναι

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^3 \pi^3} [1 + (-1)^{n+1}] \cos(n\pi ct) \sin(n\pi x), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0.$$

**Παράδειγμα 14.2.5.** Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών συνθηκών τύπου *Dirichlet*

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, t) &= c^{-2} u_{tt}(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0, t) &= 0, \quad u(1, t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 1, \end{aligned} \quad (\alpha)$$

όπου

$$f(x) = \begin{cases} 4x, & \text{για } 0 \leq x \leq 1/2, \\ 4(1-x), & \text{για } 1/2 < x \leq 1. \end{cases}$$

*Λύση* Με το χωρισμό των μεταβλητών  $u(x, t) = X(x)W(t)$  προκύπτει, αφ' ενός το πρόβλημα ιδιοτιμών

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad X(0) = 0, \quad X(1) = 0, \quad (\beta)$$

με ιδιοτιμές και αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις

$$\lambda_n = k_n^2 = n^2 \pi^2, \quad \phi_n(x) = \sin(n\pi x), \quad 0 < x < 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

αφ' ετέρου δε το χρονικό πρόβλημα

$$W''(t) + n^2 \pi^2 c^2 W(t) = 0, \quad t > 0. \quad (\gamma)$$

Για τις τιμές του  $\lambda = \lambda_n$ , η χρονοεξαρτώμενη εξίσωση (γ) έχει λύσεις της μορφής

$$W_n(t) = a_n \cos(n\pi ct) + b_n \sin(n\pi ct), \quad t > 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Έτσι η γενική λύση του συνοριακού προβλήματος (α) με χρήση της αρχής της υπέρθεσης είναι της μορφής

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\pi ct) + b_n \sin(n\pi ct)] \sin(n\pi x), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0.$$

Κάνοντας χρήση της πρώτης των αρχικών συνθηκών έχουμε

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\pi x), \quad 0 < x < 1,$$

οπότε θα ισχύει

$$\begin{aligned} a_n &= 2 \int_0^1 f(x) \sin(n\pi x) dx, \\ &= 8 \int_0^{1/2} x \sin(n\pi x) dx + 8 \int_{1/2}^1 (1-x) \sin(n\pi x) dx, \\ &= \frac{16}{n^2 \pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Από τη δεύτερη των αρχικών συνθηκών ( $g(x) = 0$ ), έπεται ότι  $b_n = 0$ . Επομένως η λύση του προβλήματος αρχικών και συνοριακών συνθηκών (α) έχει τελικά τη μορφή

$$u(x, t) = \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/2)}{n^2} \cos(n\pi ct) \sin(n\pi x), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0. \quad (\delta)$$

Η μορφή αυτή της λύσης δεν μας επιτρέπει να βρούμε το σχήμα της χορδής σε διάφορες τιμές του χρόνου  $t$ . Εντούτοις, επειδή για  $t = 0$  έχουμε

$$f(x) = \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/2)}{n^2} \sin(n\pi x), \quad 0 < x < 1,$$

έπεται ότι, για κάθε  $x$ , η σειρά συγκλίνει στην περιττή επέκταση  $f_0(x)$  στο διάστημα  $(-1, 1)$  της  $f(x)$ . Χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2} [\sin(A + B) + \sin(A - B)],$$

μπορούμε να εκφράσουμε την τυπική λύση (δ) στη μορφή

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \{\sin[n\pi(x + ct)] + \sin[n\pi(x - ct)]\} \\ &= \frac{1}{2} \{f_0(x + ct) + f_0(x - ct)\}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Η παραπάνω μορφή αποτελεί ειδική περίπτωση της λύσης D'Alembert για την κυματική εξίσωση ορισμένη σε πεπερασμένο διάστημα. Εδώ θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι η λύση συνίσταται από δύο απλά κύματα, καθ' ένα από τα οποία διαδίδεται αντίστοιχα προς τα αριστερά και δεξιά με σταθερή **ταχύτητα φάσης**  $c$ .

Η τελευταία μορφή της λύσης μας επιτρέπει να ελέγχουμε το σχήμα αυτής για διάφορες τιμές της  $t$ , όπως φαίνεται από το Σχήμα 4.2.6. Στην προηγούμενη εφαρμογή η τριγωνική μορφή των αρχικών συνθηκών υποδηλώνει ότι η  $f'(x)$  δεν ορίζεται παντού στο  $[0, 1]$ .

Έτσι σύμφωνα με το Θεώρημα 14.2.1 η λύση, που έχει βρεθεί, αποτελεί *ασθενή λύση* του προβλήματος. Αυτό συμβαίνει εδώ γιατί το μαθηματικό πρότυπο, που έχει επιλεγεί, είναι αρκετά απλουστευμένο, αφού είναι αδύνατο να έχουμε χορδή σε αυστηρά τριγωνική μορφή.

### 14.2.2 Προβλήματα

**1.** Να λυθεί το ακόλουθο υπερβολικό πρόβλημα αρχικών - συνοριακών συνθηκών τύπου Dirichlet

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) &= c^2 u_{xx}(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0, t) &= 0, \quad u(1, t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= x(1 - x), \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 1, \end{aligned}$$

όπου  $c$  είναι μια θετική πραγματική σταθερά.

*Απάντηση:*  $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(n\pi)^3} [1 - (-1)^n] \cos n\pi ct \sin n\pi x.$

**2.** Να λυθεί το ακόλουθο υπερβολικό πρόβλημα αρχικών - συνοριακών συνθηκών τύπου Dirichlet

$$\begin{aligned}u_{tt}(x, t) &= c^2 u_{xx}(x, t), \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\u(0, t) &= 0, \quad u(\pi, t) = 0, \quad t > 0, \\u(x, 0) &= 0, \quad u_t(x, 0) = 8 \sin^2 x, \quad 0 < x < \pi,\end{aligned}$$

όπου  $c$  είναι μια θετική πραγματική σταθερά.

*Απάντηση:*  $u(x, t) = \sum_{n=1,3,4,\dots}^{\infty} \frac{32[(-1)^n - 1]}{\pi c n^2 (n^2 - 4)} \sin(nct) \cos(nx)$ .

**3.** Να λυθεί το ακόλουθο υπερβολικό πρόβλημα αρχικών - συνοριακών συνθηκών τύπου Dirichlet

$$\begin{aligned}u_{tt}(x, t) &= c^2 u_{xx}(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\u(0, t) &= 0, \quad u(1, t) = 0, \quad t > 0, \\u(x, 0) &= 0, \quad u_t(x, 0) = x \sin x, \quad 0 < x < 1,\end{aligned}$$

όπου  $c$  είναι μια θετική πραγματική σταθερά.

*Απάντηση:*

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi}{n^2 \pi^2 - 1} \left[ \frac{2}{n^2 \pi^2 - 1} ((-1)^n \cos 1 - 1) - (-1)^n \sin 1 \right] \sin(nc\pi t) \cos(n\pi x).$$

**4.** Να λυθεί το ακόλουθο υπερβολικό πρόβλημα αρχικών - συνοριακών συνθηκών τύπου Robin

$$\begin{aligned}u_{tt}(x, t) &= c^2 u_{xx}(x, t), \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\u(0, t) &= 0, \quad u_x(\pi, t) = 0, \quad t > 0, \\u(x, 0) &= x + \sin x, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < \pi,\end{aligned}$$

όπου  $c$  είναι μια θετική πραγματική σταθερά.

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{32(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2 \pi [4 - (2n-1)^2]} \sin \frac{n(2n-1)x}{2} \cos \frac{(2n-1)ct}{2}$$

**5.** Να λυθεί το ακόλουθο υπερβολικό πρόβλημα αρχικών - συνοριακών συνθηκών τύπου Neumann

$$\begin{aligned}u_{tt}(x, t) &= c^2 u_{xx}(x, t), \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\u_x(0, t) &= 0, \quad u_x(\pi, t) = 0, \quad t > 0, \\u(x, 0) &= \cos x, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < \pi,\end{aligned}$$

όπου  $c$  είναι μια θετική πραγματική σταθερά.

### 14.3 Μη Ομογενής Κυματική Εξίσωση Ειδικής Μορφής Μέθοδος Προσδιορισμού των Συντελεστών

#### 14.3.1 Γενική Θεωρία - Παραδείγματα

Θεωρούμε το μη ομογενές πρόβλημα αρχικών και συνοριακών συνθηκών

$$u_{xx}(x, t) = c^{-2}u_{tt}(x, t) - P(x) \sin(\omega t), \quad 0 < x < p, \quad t > 0, \quad (3.1)$$

$$\Sigma_1[u] = \sigma_{11}u(0, t) + \sigma_{12}u_x(0, t) = 0, \quad t > 0, \quad (3.2)$$

$$\Sigma_2[u] = \sigma_{21}u(p, t) + \sigma_{22}u_x(p, t) = 0, \quad t > 0, \quad (3.3)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < p, \quad (3.4)$$

όπου τα  $\sigma_{11}, \dots, \sigma_{22}$  αποτελούν δοθείσες πραγματικές σταθερές. Η λύση  $u(x, t)$  του προβλήματος (3.1) - (3.4) θα είναι το άθροισμα της λύσης  $u_0(x, t)$  του ομογενούς προβλήματος

$$u_{xx}(x, t) = c^{-2}u_{tt}(x, t), \quad 0 < x < p, \quad t > 0, \quad (3.5)$$

$$\Sigma_1[u] = 0, \quad \Sigma_2[u] = 0, \quad t > 0, \quad (3.6)$$

και μιας λύσης  $u_\mu(x, t)$  του μη-ομογενούς προβλήματος

$$u_{xx}(x, t) = c^{-2}u_{tt}(x, t) - P(x) \sin \omega t, \quad 0 < x < p, \quad t > 0, \quad (3.7)$$

$$\Sigma_1[u] = 0, \quad \Sigma_2[u] = 0, \quad t > 0. \quad (3.8)$$

Το πρόβλημα (3.5) - (3.6) λύνεται κατά τα γνωστά με τη μέθοδο χωρισμού μεταβλητών, οπότε προκύπτει ότι δέχεται λύση της μορφής

$$u_0(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(k_n c t) + b_n \sin(k_n c t)] \phi_n(x), \quad 0 < x < p, \quad t > 0, \quad (3.9)$$

όπου τα  $\lambda_n = k_n^2$  και  $\phi_n(x)$  αποτελούν τις ιδιοτιμές και ιδιοσυναρτήσεις, αντίστοιχα, του ομογενούς συνοριακού προβλήματος ιδιοτιμών

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < p, \quad \Sigma_1[X] = 0, \quad \Sigma_2[X] = 0. \quad (3.10)$$

Για να βρούμε μια μερική λύση του μη-ομογενούς προβλήματος (3.7) - (3.8) χρησιμοποιούμε, τροποποιημένη κατάλληλα, τη γνωστή από τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις μέθοδο προσδιορισμού των συντελεστών. Υποθέτουμε δηλαδή ότι, η λύση έχει τη μορφή

$$u_\mu(x, t) = Y(x) \sin \omega t + Z(x) \cos \omega t, \quad 0 < x < p, \quad t > 0, \quad (3.11)$$

όπου  $Y(x), Z(x)$  συναρτήσεις προς προσδιορισμό. Αντικαθιστώντας την παράσταση (3.11) απ' ευθείας στη μερική διαφορική εξίσωση (3.7) προκύπτει η σχέση

$$Y''(x) \sin \omega t + Z''(x) \cos \omega t = \left[ -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 Y(x) - P(x) \right] \sin \omega t - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 Z(x) \cos \omega t,$$

όπου  $0 < x < p$ ,  $t > 0$ . Εξισώνοντας τους συντελεστές των συναρτήσεων  $\sin \omega t$ ,  $\cos \omega t$ , προκύπτει το ακόλουθο σύστημα

$$Y''(x) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 Y(x) = -P(x), \quad 0 < x < p, \quad (3.12)$$

$$Z''(x) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 Z(x) = 0, \quad 0 < x < p. \quad (3.13)$$

Επειδή μας αρκεί να βρούμε μια οποιαδήποτε μερική λύση του προβλήματος (3.7) - (3.8), γι' αυτό θέτουμε  $Z(x) \equiv 0$ . Έτσι έχουμε για επίλυση μόνο τη διαφορική εξίσωση (3.12) με συνοριακές συνθήκες

$$\Sigma_1[Y] = 0, \quad \Sigma_2[Y] = 0, \quad (3.14)$$

το οποίο αποτελεί ένα γνωστό συνοριακό πρόβλημα. Έχοντας λοιπόν προσδιορίσει τη συνάρτηση  $Y(x)$ , η λύση του προβλήματος (3.1) - (3.3) θα είναι της μορφής

$$u(x, t) = Y(x) \sin \omega t + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(k_n c t) + b_n \sin(k_n c t)] \phi_n(x). \quad (3.15)$$

Για να ικανοποιούνται οι αρχικές συνθήκες (3.4) του προβλήματος (3.1) - (3.4) θα πρέπει να ισχύουν οι σχέσεις

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x), \quad 0 < x < p, \quad (3.16)$$

$$g(x) - \omega Y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n c b_n \phi_n(x), \quad 0 < x < p. \quad (3.17)$$

Επομένως σύμφωνα με τη θεωρία των σειρών Fourier οι συντελεστές  $a_n$ ,  $b_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , υπολογίζονται από τις ακόλουθες σχέσεις

$$a_n = \|\phi_n(x)\|^{-2} \int_0^p f(x) \phi_n(x) dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.18)$$

$$b_n = \frac{\|\phi_n(x)\|^{-2}}{k_n c} \int_0^p [g(x) - \omega Y(x)] \phi_n(x) dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.19)$$

Άρα τελικά η λύση του προβλήματος (3.1) - (3.4) δίδεται από την παράσταση (3.15), όπου οι συντελεστές  $a_n$ ,  $b_n$  υπολογίζονται από τις σχέσεις (3.18) και (3.19).

**Παρατήρηση 14.3.1.** Η μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε για την επίλυση του παραπάνω προβλήματος, είναι άμεσα εξαρτημένη από την ειδική μορφή (ημιτονική) της εξωτερικής επίδρασης. Όπως και στις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις η μέθοδος προσδιορισμού των συντελεστών μπορεί να δοκιμαστεί και σε διάφορες άλλες μορφές του μη ομογενούς όρου, για παράδειγμα, πολυωνυμική, εκθετική, σινημιτονική ή συνδυασμοί αυτών. Η γενική περίπτωση αντιμετωπίζεται με τη μέθοδο του αναπτύγματος ιδιοσυναρτήσεων, η οποία θα παρουσιαστεί στην επόμενη Παράγραφο 14.4

**Παράδειγμα 14.3.2.** Να λυθεί το μη ομογενές πρόβλημα ομογενών αρχικών και συνοριακών συνθηκών

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, t) &= c^{-2}u_{tt}(x, t) - q \sin \omega t, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(0, t) &= 0, \quad u(\pi, t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < \pi, \end{aligned} \quad (\alpha)$$

όπου το  $q$  αποτελεί μια πραγματική σταθερά.

**Λύση** Ακολουθώντας τη γενική μέθοδο, που αναπτύχθηκε παραπάνω, αναφέρουμε κατ' αρχήν ότι, το πρόβλημα ιδιοτιμών

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad X(0) = 0, \quad X(\pi) = 0 \quad (\beta)$$

έχει ιδιολύσεις τα  $\lambda_n = n^2$ ,  $\phi_n(x) = \sin(nx)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Έτσι η λύση του αντίστοιχου ομογενούς συνοριακού προβλήματος θα είναι

$$u_0(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nct + b_n \sin nct) \sin(nx).$$

Για να βρούμε μια λύση του μη-ομογενούς προβλήματος, θα πρέπει να λύσουμε το πρόβλημα συνοριακών συνθηκών

$$Y''(x) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 Y(x) = -q, \quad 0 < x < \pi, \quad Y(0) = 0, \quad Y(\pi) = 0. \quad (\gamma)$$

Θέτοντας  $k = \frac{\omega}{c}$ , βρίσκουμε ως λύση του παραπάνω προβλήματος  $(\gamma)$  την ακόλουθη παράσταση

$$Y(x) = \frac{q(\cos kx - 1)}{k^2} + \frac{q(1 - \cos k\pi) \sin kx}{k^2 \sin k\pi}, \quad 0 < x < \pi,$$

όπου  $k \neq 1, 2, 3, \dots$ . Επομένως η λύση του αρχικού συνοριακού προβλήματος  $(\alpha)$  θα είναι

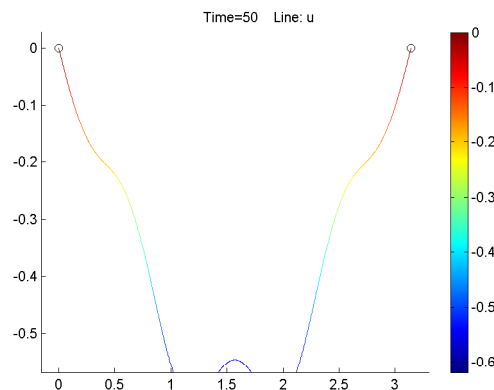
$$u(x, t) = Y(x) \sin \omega t + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nct) + b_n \sin(nct)] \sin nx, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0.$$

Για τον προσδιορισμό των αυθαίρετων σταθερών θα κάνουμε χρήση των αρχικών συνθηκών, οπότε θα προκύψουν οι σχέσεις

$$u(x, 0) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx), \quad u_t(x, 0) = 0 = \omega Y(x) + \sum_{n=1}^{\infty} ncb_n \sin(nx), \quad 0 < x < \pi.$$

Οι τελευταίες σχέσεις συνεπάγονται ότι  $a_n = 0$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $b_n = 0$ ,  $n = 2, 4, 6, \dots$ . Ενώ για  $n = 1, 3, 5, \dots$ , βρίσκεται μετά από αρκετές πράξεις ότι ισχύει η σχέση

$$ncb_n = -\frac{2\omega}{\pi} \int_0^\pi Y(x) \sin(nx) dx = -\frac{4\omega q}{n\pi(n^2 - k^2)}.$$



Σχήμα 14.3.1: Το Πρόβλημα του Παραδείγματος 14.3.2 Ι) Συντονισμός.

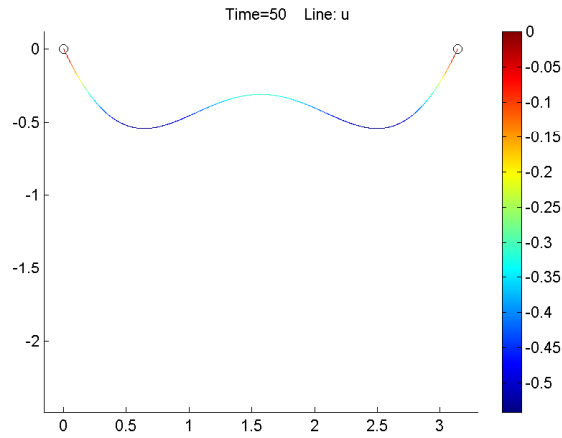
Άρα με την προϋπόθεση ότι, ισχύει η ανισότητα  $\omega \neq nc$ , για  $n = 1, 3, 5, \dots$ , η τελική μορφή της λύσης του προβλήματος (α) είναι

$$u(x, t) = \frac{4qc\omega}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)ct) \sin(2n+1)x}{(2n+1)^2(\omega^2 - (2n+1)^2c^2)} + \frac{qc^2 \sin \omega t}{\omega^2} \left[ \cos \frac{\omega x}{c} - 1 \right] \\ + \frac{qc^2 \sin(\omega x/c) \sin \omega t}{\omega^2 \sin(\omega \pi/c)} \left[ 1 - \cos \frac{\omega \pi}{c} \right], \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0.$$

**Παρατήρηση 14.3.3.** Στην περίπτωση που έχουμε ταύτιση της φυσικής συχνότητας μιας κατασκευής, με αυτήν κάποιας εξωτερικής δράσης, δηλαδή όταν ισχύει  $\omega_n = nc$ ,  $n = 1, 3, 5, \dots$ , τότε το πλάτος της ταλάντωσης γίνεται άπειρο, οπότε έχουμε το φαινόμενο συντονισμού. Πρακτικά βέβαια, σ' όλα τα φυσικά φαινόμενα λόγω τριβών υπάρχουν όροι απόσβεσης, οι οποίοι δεν έχουν ληφθεί υπ' όψιν στο συγκεκριμένο μαθηματικό πρότυπο και οι οποίοι συντελούν στην ελάττωση της πραγματικής τιμής του πλάτους. Όμως για να αποφευχθούν ιδιόμορφες συμπεριφορές φυσικών συστημάτων, θα πρέπει το πλάτος της ταλάντωσης να μην υπερβεί κάποιο όριο ασφάλειας. Όλα αυτά έχουν άμεση σχέση με την κατασκευή (υλικά, σχήμα, κ.λ.π.) του υπό ταλάντωση συστήματος, όσον και τις πιθανές εξωτερικές δυνάμεις, που επιδρούν σ' αυτό (Βλέπε την περίπτωση της γέφυρας Tacoma Narrows, Seattle, USA (1940), κ.λ.π.). Για περισσότερα στοιχεία σχετικά με το φαινόμενο του συντονισμού παραπέμπουμε στο σχετικά πρόσφατο σημαντικό άρθρο ανασκόπησης των A. C. Lazer and P. J. McKenna [73] και στην εκεί βιβλιογραφία.

#### Μελέτη με τα προγράμματα COMSOL 3.2 και MATLAB.

Στα παραπάνω Σχήματα βλέπουμε τη διαφορά στη συμπεριφορά του προβλήματος του Παραδείγματος 14.3.2 στις περιπτώσεις Ι) Συντονισμού: με  $c = \pi$ ,  $q = 3$ ,  $\omega = 2\pi$  και ΙΙ) Μη συντονισμού: με  $c = \pi$ ,  $q = 3$ ,  $\omega = 2, 1$ . Με τη βοήθεια των προγραμμάτων



Σχήμα 14.3.2: Το Πρόβλημα του Παραδείγματος 14.3.2 II) Μη - Συντονισμός.

COMSOL 3.2 και MATLAB έγινε η αναπαραγωγή των γραφικών παραστάσεων των Σχημάτων 4.3.1 και 4.3.2.

### 14.3.2 Προβλήματα

1. Να λυθεί το ακόλουθο μη-ομογενές υπερβολικό πρόβλημα αρχικών - συνοριακών συνθηκών τύπου Dirichlet

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, t) &= c^2 u_{tt}(x, t) - q \cos \omega t, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(0, t) &= 0, \quad u(\pi, t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < \pi, \end{aligned}$$

όπου  $c$ ,  $q$ ,  $\omega$  είναι πραγματικές σταθερές με  $c > 0$ .

$$\begin{aligned} \text{Απάντηση: } u(x, t) &= \frac{qc^2 \cos \omega t}{\omega^2} \left[ \cos \frac{\omega x}{c} - 1 \right] + \frac{qc^2 \sin(\omega x/c) \cos \omega t}{\omega^2 \sin(\omega \pi/c)} \left[ 1 - \cos \frac{\omega \pi}{c} \right] \\ &+ \frac{4qc}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)ct \sin(2n+1)x}{(2n+1)^2(\omega^2 - (2n+1)^2 c^2)}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0. \end{aligned}$$

2. Να λυθεί το μη-ομογενές υπερβολικό πρόβλημα αρχικών συνοριακών συνθηκών τύπου Dirichlet

$$\begin{aligned} u_{xx} &= e^{-2} u_{tt} - q \cos \omega t, \quad 0 < x < 2\pi, \quad t > 0, \\ u(0, t) &= 0, \quad u(2\pi, t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= e^x, \quad u_t(x, 0) = 2\pi x, \quad 0 < x < 2\pi, \end{aligned}$$

όπου  $q$ ,  $\omega$  είναι πραγματικές σταθερές.

3. Να λυθεί το μη-ομογενές υπερβολικό πρόβλημα αρχικών συνοριακών συνθηκών τύπου

Dirichlet

$$\begin{aligned} u_{xx} &= \pi^{-2} u_{tt} + e^{-t} \cos x, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(0, t) &= 0, \quad u(\pi, t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= x^2, \quad u_t(x, 0) = 2x, \quad 0 < x < \pi. \end{aligned}$$

Απάντηση:  $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2((-1)^{n+1}[\sin(n\pi t) + n\pi(e^{-t} - \cos(n\pi t))])}{(1-n^2)(1+n^2\pi^2)} + \right.$   
 $\left. + \frac{2[(-1)^n(2-n^2\pi^2-2)]}{\pi n^3} \cos(n\pi t) + \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi n^2} \sin(n\pi t) \right\} \sin(nx).$

4. Να λυθεί το ακόλουθο μη-ομογενές υπερβολικό πρόβλημα αρχικών - συνοριακών συνθηκών τύπου Neumann

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, t) &= u_{tt}(x, t) - 1, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u_x(0, t) &= 0, \quad u_x(1, t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= 1, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 1. \end{aligned}$$

Απάντηση:  $u(x, t) = 1.$

## 14.4 Μη Ομογενής Κυματική Εξίσωση Γενικής Μορφής Μέθοδος Αναπτύγματος Ιδιοσυναρτήσεων

### 14.4.1 Γενική Θεωρία - Παραδείγματα

Έστω το μη ομογενές πρόβλημα αρχικών και συνοριακών συνθηκών

$$u_{xx}(x, t) = c^{-2} u_{tt}(x, t) - q(x, t), \quad 0 < x < p, \quad t > 0, \quad (4.1)$$

$$\Sigma_1[u] = 0, \quad \Sigma_2[u] = 0, \quad t > 0, \quad (4.2)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < p. \quad (4.3)$$

Ακολουθώντας τη μέθοδο του γενικευμένου αναπτύγματος ιδιοσυναρτήσεων, που παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 13, Ενότητα 13.4.1, υποθέτουμε ότι το πρόβλημα (4.1)-(4.3) δέχεται λύση της μορφής

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n(t) \phi_n(x), \quad 0 < x < p, \quad t > 0, \quad (4.4)$$

όπου τα  $(\lambda_n, \phi_n)$  είναι οι ιδιολύνσεις του αντίστοιχου προβλήματος ιδιοτιμών

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < p, \quad \Sigma_1[X] = 0, \quad \Sigma_2[X] = 0 \quad (4.5)$$

και οι συναρτήσεις  $E_n(t)$  αποτελούν τους άγνωστους προσδιοριστέους συντελεστές του αναπτύγματος. Αντικαθιστώντας το ανάπτυγμα (4.4) στην εξίσωση του

προβλήματος (4.1) - (4.3) προκύπτει η σχέση

$$c^2 q(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ E_n''(t) \phi_n(x) - c^2 E_n(t) \phi_n''(x) \right], \quad 0 < x < p, \quad t > 0.$$

Επειδή δε ισχύει η σχέση  $\phi_n''(x) = -\lambda_n \phi_n(x) = -k_n^2 \phi_n(x)$ , από την τελευταία παράσταση έχουμε ότι

$$c^2 q(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ E_n''(t) + c^2 k_n^2 E_n(t) \right] \phi_n(x), \quad 0 < x < p, \quad t > 0. \quad (4.6)$$

Έτσι, για σταθερό  $t$ , η εξίσωση (4.6) μπορεί να θεωρηθεί ως η γενικευμένη σειρά Fourier της παράστασης  $c^2 q(x, t)$  με συντελεστές

$$E_n''(t) + c^2 k_n^2 E_n(t) = c^2 \|\phi_n\|^{-2} \int_0^p q(x, t) \phi_n(x) dx \equiv c^2 Q_n(t), \quad t > 0, \quad (4.7)$$

όπου  $\|\phi_n\|^2 = \int_0^p [\phi_n(x)]^2 dx$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Με την προϋπόθεση ότι ισχύει  $k_n \neq 0$ , για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ , η σχέση (4.7) αποτελεί μια μη ομογενή δευτεροβάθμια γραμμική συνήθη διαφορική εξίσωση, της οποίας η γενική λύση ευρίσκεται ότι είναι της μορφής

$$E_n(t) = \frac{c}{k_n} \int_0^t \sin[k_n c(t-r)] Q_n(r) dr + a_n \cos(k_n c t) + b_n \sin(k_n c t), \quad t > 0, \quad (4.8)$$

για κάθε  $n = 1, 2, 3, \dots$ , όπου τα  $a_n, b_n$  αποτελούν τις αυθαίρετες σταθερές. Αντικαθιστώντας την ακολουθία (4.8) στην παράσταση (4.4) έχουμε ότι η συνάρτηση που ικανοποιεί το πρόβλημα

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{c}{k_n} \int_0^t \sin k_n c(t-r) Q_n(r) dr + a_n \cos k_n c t + b_n \sin k_n c t \right\} \phi_n(x), \quad (4.9)$$

για κάθε  $x \in (0, p)$  και  $t > 0$ . Τέλος, κάνοντας χρήση των αρχικών συνθηκών βρίσκουμε ότι

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x), \quad u_t(x, 0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n c b_n \phi_n(x), \quad 0 < x < p.$$

Επομένως σύμφωνα με τη θεωρία των σειρών Fourier προκύπτει ότι οι συντελεστές  $a_n, b_n$  του αναπτύγματος (4.9) δίδονται από τις σχέσεις

$$a_n = \|\phi_n\|^{-2} \int_0^p f(x) \phi_n(x) dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (4.10)$$

$$b_n = \frac{\|\phi_n\|^{-2}}{k_n c} \int_0^p g(x) \phi_n(x) dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots. \quad (4.11)$$

Άρα τελικά η λύση του προβλήματος (4.1) - (4.3) δίδεται από τον τύπο (4.9), όπου οι συντελεστές  $a_n, b_n$  υπολογίζονται από τις σχέσεις (4.10) και (4.11).

**Παρατήρηση 14.4.1.** (i) Αν κάποια από τις  $\lambda_n$ , έστω η ιδιοτιμή  $\lambda_0 = 0$  [με αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση  $\phi_0(x)$ ], τότε η δοκιμαστική λύση δίδεται στη μορφή

$$u(x, t) = E_0(t)\phi_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} E_n(t)\phi_n(x).$$

(ii) Για τον υπολογισμό της λύσης (4.9) κάνουμε χρήση της πλευρικής συνάρτησης Green (Βλέπε, Κεφάλαιο ??). Μπορούν να χρησιμοποιηθούν και άλλες πρόσφοροι μέθοδοι, οι οποίες θα οδηγήσουν βέβαια σε διαφορετικούς τύπους για τους συντελεστές  $a_n, b_n$ .

**Παρατήρηση 14.4.3. (Γενικό Μη-Ομογενές Πρόβλημα)** Η μεθοδολογία που ισχύει στην περίπτωση του γενικού μη ομογενούς προβλήματος είναι ανάλογη αυτής, που έχει ήδη περιγραφεί για τις παραβολικές εξισώσεις. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε να διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις

[1]. Έστω το μη ομογενές πρόβλημα με χρονοανεξάρτητες μη ομογενείς συνοριακές συνθήκες

$$u_{xx}(x, t) = c^2 u_{tt}(x, t) - q(x, t), \quad 0 < x < p, \quad t > 0, \quad (4.12)$$

$$\Sigma_1[u] = \alpha, \quad \Sigma_2[u] = \beta, \quad t > 0, \quad (4.13)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < p, \quad (4.14)$$

όπου  $\alpha, \beta$  πραγματικές σταθερές. Για την επίλυση του (4.12) - (4.14) θεωρούμε ότι, η λύση αυτού  $u(x, t)$  έχει τη μορφή

$$u(x, t) = S(x) + V(x, t), \quad (4.15)$$

όπου η συνάρτηση  $S(x)$  αποτελεί λύση του προβλήματος με μη ομογενείς συνοριακές συνθήκες

$$S''(x) = 0, \quad 0 < x < p, \quad \Sigma_1[S] = \alpha, \quad \Sigma_2[S] = \beta \quad (4.16)$$

και η συνάρτηση  $V(x, t)$  ικανοποιεί το συμπληρωματικό πρόβλημα

$$V_{xx}(x, t) = c^{-2} V_{tt}(x, t) - q(x, t), \quad 0 < x < p, \quad t > 0, \quad (4.17)$$

$$\Sigma_1[V] = 0, \quad \Sigma_2[V] = 0, \quad t > 0, \quad (4.18)$$

$$V(x, 0) = f(x) - S(x), \quad V_t(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < p. \quad (4.19)$$

Το πρόβλημα (4.17) - (4.19) λύνεται με μεθόδους, που έχουν ήδη αναπτυχθεί στην προηγούμενη Ενότητα 14.2.2 και την παρούσα 14.4.1. Ενώ το (4.16) αποτελεί ένα κλασικό ομογενές συνοριακό πρόβλημα ιδιοτιμών τύπου Sturm - Liouville.

Εδώ πρέπει να σημειώσουμε ότι η  $V(x, t)$  δεν αποτελεί τη μεταβατική λύση, με την έννοια, που δόθηκε στην εξίσωση θερμότητας (Βλέπε, Ενότητα 13.3), αφού εν γένει δεν τείνει στο 0, καθώς το  $t \rightarrow \infty$ .

[2]. Αν τέλος τόσο η εξίσωση όσο και οι συνοριακές συνθήκες είναι χρονοεξαρτώμενες, τότε η δοκιμαστική μορφή της λύσης  $u(x, t)$  είναι ανάλογη αυτής, που χρησιμοποιήθηκε στην εξίσωση θερμοότητας (Βλέπε, Ενότητα 13.4.2 και Παράδειγμα 4.4.5).

**Παράδειγμα 14.4.4.** Να λυθεί το μη ομογενές πρόβλημα αρχικών και συνοριακών συνθηκών μεικτού τύπου

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, t) &= u_{tt}(x, t) - 10, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0, t) &= 2, \quad u_x(1, t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= 2, \quad u_t(x, 0) = \sin(3\pi x/2), \quad 0 < x < 1. \end{aligned} \quad (\alpha)$$

*Λύση* Για το πρόβλημα  $(\alpha)$  θεωρούμε λύση της μορφής  $u(x, t) = S(x) + V(x, t)$ , όπου η συνάρτηση  $S(x)$  αποτελεί λύση του ομογενούς συνοριακού προβλήματος

$$S''(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad S(0) = 2, \quad S'(1) = 0, \quad (\beta)$$

η οποία είναι  $S(x) \equiv 2$ . Έτσι η συνάρτηση  $V(x, t)$  θα ικανοποιεί το συμπληρωματικό μη ομογενές πρόβλημα αρχικών και συνοριακών συνθηκών

$$\begin{aligned} V_{xx}(x, t) &= V_{tt}(x, t) - 10, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ V(0, t) &= 0, \quad V(1, t) = 0, \quad t > 0, \\ V(x, 0) &= 2 - S(x) = 0, \quad V_t(x, 0) = \sin(3\pi x/2), \quad 0 < x < 1. \end{aligned} \quad (\gamma)$$

Θεωρούμε ως δοκιμαστική λύση του προβλήματος  $(\gamma)$  το γενικευμένο ανάπτυγμα ιδιοσυναρτήσεων

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n(t) \phi_n(x), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad (\delta)$$

όπου  $\phi_n(x)$  οι ιδιοσυναρτήσεις του συσχετισμένου προβλήματος

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad X(0) = 0, \quad X'(1) = 0.$$

Με γνωστή διαδικασία βρίσκουμε ότι τα ιδιοζεύγη του τελευταίου προβλήματος είναι

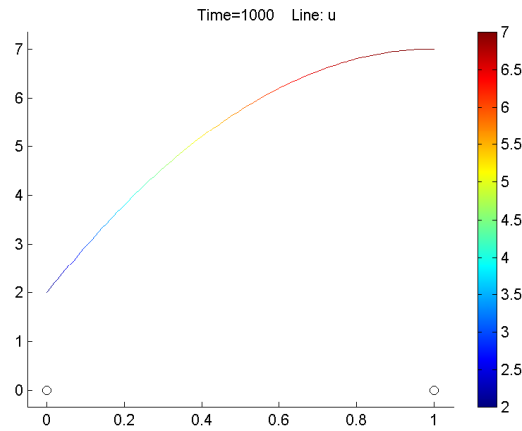
$$\lambda_n = k_n^2 = \frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4}, \quad \phi_n(x) = \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2}, \quad 0 < x < 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Αντικαθιστώντας την παράσταση  $(\delta)$  στην εξίσωση του προβλήματος  $(\gamma)$  προκύπτει ότι

$$10 = \sum_{n=1}^{\infty} \{E_n''(t) + k_n^2 E_n(t)\} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2}, \quad t > 0.$$

Επομένως θα ισχύει

$$E_n''(t) + k_n^2 E_n(t) = \left\| \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2} \right\|^{-2} \int_0^1 10 \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2} dx, \quad t > 0.$$



Σχήμα 14.4.1: Το Πρόβλημα του Παραδείγματος 14.4.4.

Επειδή δε ισχύει

$$\left\| \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2} \right\|^2 = \int_0^1 \sin^2 \frac{(2n-1)\pi x}{2} dx = \frac{1}{2},$$

θα έχουμε

$$E_n''(t) + k_n^2 E_n(t) = \frac{40}{(2n+1)\pi}, \quad t > 0.$$

Η επίλυση της τελευταίας μη ομογενούς συνήθους διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης δίδει

$$\begin{aligned} E_n(t) &= \frac{1}{k_n} \int_0^t \sin[k_n c(t-r)] [40/(2n+1)\pi] dr + a_n \cos(k_n t) + b_n \sin(k_n t) \\ &= \frac{20}{k_n^3} [1 - \cos(k_n t)] + a_n \cos(k_n t) + b_n \sin(k_n t), \quad t > 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Έτσι η μορφή (δ) της λύσης του προβλήματος (α) γίνεται

$$V(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{20}{k_n^3} [1 - \cos(k_n t)] + a_n \cos(k_n t) + b_n \sin(k_n t) \right\} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2},$$

όπου έχουμε ότι  $0 < x < 1$ ,  $t > 0$ . Από τις αρχικές συνθήκες προκύπτει ότι,  $a_n = 0$ , για  $n = 1, 2, 3, \dots$ ,  $b_n = 0$ , για  $n = 2, 3, 4, \dots$  και  $b_1 = \frac{1}{k_1}$ . Συνδυάζοντας όλα τα ανωτέρω έχουμε ότι, η τελική μορφή της λύσης του προβλήματος (α) είναι

$$\begin{aligned} u(x, t) &= 2 + \frac{2}{3\pi} \sin \frac{3\pi t}{2} \sin \frac{3\pi x}{2} \\ &+ \frac{160}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \left[ 1 - \cos \left( \frac{(2n-1)\pi t}{2} \right) \right] \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2}, \end{aligned}$$

όπου  $0 < x < 1$ ,  $t > 0$ .

**Μελέτη με τα προγράμματα COMSOL 3.2 και MATLAB.**

Με τη βοήθεια των προγραμμάτων COMSOL 3.2 και MATLAB έγινε η αναπαραγωγή των γραφικών παραστάσεων του Σχήματος 4.4.1, όπου βλέπουμε τη συμπεριφορά της χορδής του προβλήματος του Παραδείγματος 14.4.4.

**14.4.2 Προβλήματα**

1. Να λυθεί το μη-ομογενές υπερβολικό πρόβλημα αρχικών συνοριακών συνθηκών τύπου Robin

$$\begin{aligned} u_{xx} &= e^{-2}u_{tt} + \sin 3x \cos \omega t, \quad 0 < x < \pi/2, \quad t > 0, \\ u(0, t) &= 0, \quad u_x(\pi/2, t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= e^x, \quad u_t(x, 0) = 2\pi x, \quad 0 < x < \pi/2, \end{aligned}$$

όπου το  $\omega$  είναι μια θετική πραγματική σταθερά.

2. Να λυθεί το μη-ομογενές υπερβολικό πρόβλημα με μη-ομογενείς αρχικές και συνοριακές συνθήκες Dirichlet

$$\begin{aligned} u_{xx} &= u_{tt} - x^{-2} \sin t, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0, t) &= \sin t, \quad u(1, t) = -t^2/2, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= 0, \quad u_t(x, 0) = 1 - x, \quad 0 < x < 1. \end{aligned}$$

Απάντηση:  $u(x, t) = \sin t(1 - x) - \frac{t^2}{2}x + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2(-1)^{n+1}(1 - \cos(n\pi t))}{n^3\pi^3} + \right.$   
 $\left. + \frac{\sin(n\pi t) - n\pi \sin t}{n\pi(1 - n^2\pi^2)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (n\pi)^{(2k+1)}}{2k(2k+1)!} \right\} \sin(n\pi x).$

3. Να λυθεί το ακόλουθο μη-ομογενές υπερβολικό πρόβλημα αρχικών - συνοριακών συνθηκών τύπου Robin

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) &= 4u_{xx}(x, t) + xt, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0, t) &= 0, \quad u_x(1, t) = 1 + t, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= x, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 1. \end{aligned}$$

4. Να λυθεί το ακόλουθο μη ομογενές υπερβολικό πρόβλημα αρχικών - συνοριακών συνθηκών τύπου Dirichlet

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, t) &= u_{tt}(x, t) - 1, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0, t) &= t^2/2, \quad u(1, t) = -\cos t, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= -x, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 1. \end{aligned}$$

Απάντηση:

$$u(x, t) = \frac{t^2(1-x)}{2} - x \cos t + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left[ \frac{1 - \cos n\pi t}{n^2\pi^2} - \frac{2(\cos t - \cos n\pi t)}{n^2\pi^2 - 1} \right] \sin(n\pi x).$$