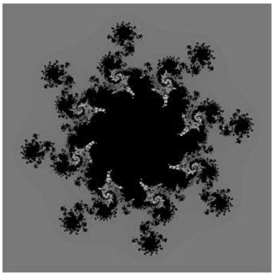


Κεφάλαιο 7

Μετασχηματισμός Laplace

Pierre Simon Laplace
(1749-1827)

«Mathematics possesses not only truth but supreme beauty, a beauty cold and austere, like that of sculpture, without appeal to any part of our weaker nature, and capable of a stern perfection such as only the greatest art can show».

Bertrand Russell

7.1 ΙΣΤΟΡΙΚΟ

Ο μετασχηματισμός Laplace έχει ένα αρκετά ενδιαφέρον ιστορικό. Το ολοκλήρωμα του μετασχηματισμού Laplace εμφανίστηκε για πρώτη φορά σε εργασίες του Leonard Euler (1707-1783). Όμως, όπως και σε πάρα πολλές άλλες περιπτώσεις, δόθηκε το όνομα του επόμενου μαθηματικού που διατύπωσε και χρησιμοποίησε αυτό το ολοκλήρωμα (διαφορετικά θα είχαμε εκατοντάδες τύπους, θεωρήματα, τεχνικές, εξισώσεις κ.ά. με το όνομα του L. Euler!). Ο Pierre Simon de Laplace* έκανε εκτενή χρήση τέτοιων ολοκληρωμάτων στη Θεωρία Πιθανοτήτων στο περίφημο κλασικό βιβλίο του *Théorie Analytique des Probabilités* (1812). Εντούτοις, οι τεχνικές του τελεστικού λογισμού και ιδιαίτερα του μετασχηματισμού Laplace βρήκαν εφαρμογή στις διαφορικές εξισώσεις πολύ αργότερα. Ο Άγγλος ηλεκτρολόγος μηχανικός Oliver Heaviside (1850-1925) είναι εκείνος που έκανε ευρύτατη χρήση του μετασχηματισμού Laplace. Παρ' όλα αυτά, μέχρι το 1930 η σχετική θεωρία δεν είχε διατυπωθεί με την απαιτούμενη μαθηματική αυστηρότητα και αποτελούσε αντικείμενο αμφισβήτησης. Οι εργασίες του G. Goetsch τη δεκαετία του 1930 βοήθησαν σημαντικά στη μαθηματική θεμελίωση των τεχνικών του τελεστικού λογισμού.

7.2 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι μέθοδοι που χρησιμοποιήθηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια για την επίλυση γραμμικών, μη-ομογενών διαφορικών εξισώσεων (ή συστημάτων) που ικανοποιούν δοσμένες αρχικές ή συνοριακές συνθήκες ακολουθούν τρία στάδια:

- εύρεση της *γενικής λύσης* της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης ή συστήματος,
- εύρεση της *ειδικής λύσης* της μη-ομογενούς εξίσωσης,
- υπολογισμό των *αυθαίρετων σταθερών* με τη χρήση των αρχικών ή συνοριακών συνθηκών.

Σε αντίθεση με τα παραπάνω οι μέθοδοι του λεγόμενου ***τελεστικού λογισμού*** οδηγούν *κατευθείαν* στον υπολογισμό της ειδικής λύσης που ικανοποιεί δοσμένες συνθήκες. Επιπλέον, οι μέθοδοι αυτοί επιτρέπουν τη διαμόρφωση *πινάκων λύσεων*, που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη μελέτη των διαφορι-

* *Pierre Simon de Laplace* (1749-1827). Ένα φτωχό αγροτόπαιδο, που υπήρξε στενός φίλος του Ναπολέοντα και έγινε ευγενής από το Λουδοβίκο XVIII. Άφησε σημαντικό έργο στην ουράνια μηχανική και τις πιθανότητες. Στο 5τομο μεγαλειώδες έργο του *Mécanique Céleste* (1799-1825) αναπτύσσει διεξοδικά τη Θεωρία Δυναμικού, ιδέα που οφειλόταν στο Lagrange και η οποία μέχρι σήμερα βρίσκει πολυάριθμες εφαρμογές στις φυσικές επιστήμες, από τη βαρύτητα και την υδροδυναμική μέχρι τον ηλεκτρομαγνητισμό και την πυρηνική φυσική. Έτσι η βασική εξίσωση της Θεωρίας Δυναμικού είναι γνωστή με το όνομα *εξίσωση Laplace* και όχι Lagrange. Στην εποχή του θεωρούνταν ο Newton της Γαλλίας. Αξίζει να αναφερθεί ότι προσέφερε βοήθεια και υποστήριξη σε αρκετούς νέους τότε επιστήμονες, όπως οι Gay-Lussac, Humboldt, Poisson, Cauchy κ.ά.

κών εξισώσεων. Μια ιδιαίτερα χρήσιμη κατηγορία μεθόδων είναι αυτή των ***ολοκληρωτικών μετασχηματισμών***, που έχουν τη μορφή

$$F(s) = \int_{\alpha}^{\beta} K\,(s,t)\, f\,(t)\, dt \tag{1}$$

Η συνάρτηση F(s) αποτελεί τον ***ολοκληρωτικό μετασχηματισμό*** της συνάρτησης f(t). Η συνάρτηση K(s, t) αποτελεί τον ***πυρήνα*** του μετασχηματισμού. Στόχος αυτής της διαδικασίας είναι ο μετασχηματισμός μιας πολύπλοκης συνάρτησης f(t) σε μια απλούστερη F(s), η επίλυση του προβλήματος με βάση τη συνάρτηση F(s) και τέλος η εύρεση της λύσης του αρχικού προβλήματος με τη χρήση κάποιου *αντίστροφου μετασχηματισμού* ή των *πινάκων του μετασχηματισμού.*

Στη συνέχεια θα ορισθεί και θα μελετηθεί ένας ειδικός ολοκληρωτικός μετασχηματισμός, ίσως ο περισσότερο σημαντικός για την επίλυση προβλημάτων αρχικών ή συνοριακών τιμών συνήθων και μερικών διαφορικών εξισώσεων. Έστω f(t) μια πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής t, η οποία αρκεί να ορίζεται μόνο για $t \geq 0$. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f(t) ικανοποιεί συγκεκριμένες συνθήκες, που θα δοθούν στη συνέχεια. Ονομάζεται ***μετασχηματισμός Laplace*** της f(t) και συμβολίζεται με $\mathcal{L}\{f(t)\}$ ή F(s) το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\mathcal{L}\,\{f(t)\} = F\,(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}\, f\,(t)\, dt\,, \tag{2}$$

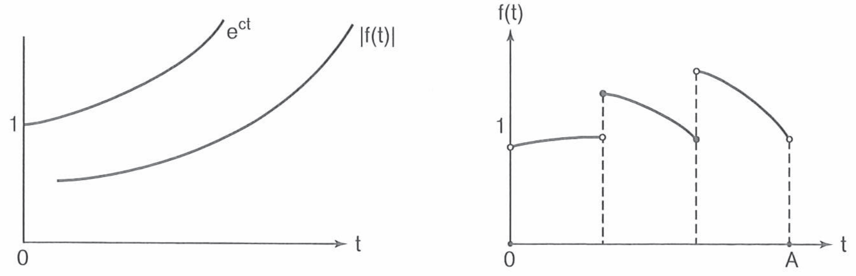
όπου s είναι μια πραγματική παράμετρος. Σε ορισμένες εφαρμογές απαιτείται η χρήση μιγαδικής παραμέτρου s. Για λεπτομερή ανάπτυξη του μετασχηματισμού Laplace με μιγαδικές τιμές παραπέμπουμε στα κλασικά βιβλία των Wilbur R. LePage [LP], Chapter 8 και J.E. Marsden [MAR]. Ο μετασχηματισμός Laplace είναι ιδιαίτερα χρήσιμος και απλοποιεί τις διαδικασίες επίλυσης μηομογενών προβλημάτων, των οποίων η εξωτερική επίδραση είναι ασυνεχής συνάρτηση τύπου Heaviside ή γενικευμένη συνάρτηση τύπου δ-Dirac κ.ά. Επίσης ο μετασχηματισμός Laplace είναι απαραίτητος στη σύγχρονη Θεωρία Γραμμικών Συστημάτων Ελέγχου, Σχεδίου, Ανάλυσης, καθώς και στις ολοκληρωτικές εξισώσεις, στα συστήματα γραμμικών εξισώσεων και τέλος σε πολλές μορφές γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων ορισμένων σε φραγμένα και μηφραγμένα πεδία.

Το επόμενο Θεώρημα 1 περικλείει τις βασικές συνθήκες που πρέπει να πληροί η συνάρτηση f(t), ώστε το γενικευμένο ολοκλήρωμα (2), δηλαδή ο μετασχηματισμός Laplace $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ αυτής, να ορίζεται

Θεώρημα 1 *Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f(t) είναι (i)* ***τμηματικά συνεχής*** *στο κλειστό διάστημα $0 \leq t \leq A$, για κάθε θετικό A. (ii)* ***εκθετικής τάξης c****, δηλαδή υπάρχουν $k>0$, $c \geq 0$ τέτοια ώστε*

$$|f\,(t)| \leq k\, e^{ct}, \qquad M \leq t < \infty\,, \tag{3}$$

για κάποια θετική σταθερά M (βλέπε Σχήμα 1). Τότε ο μετασχηματισμός Laplace $\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$, που ορίζεται από την εξίσωση (2), υπάρχει για κάθε $s>c$.



f(t): εκθετική τάξης c

f(t): τμηματικά συνεχής στο [0, A]

Σχήμα 1

Απόδειξη Επειδή η συνάρτηση f(t) είναι τμηματικά συνεχής, το ολοκλήρωμα

$$\int_0^A e^{-st} f(t)\, dt$$

υπάρχει για κάθε $A>0$. Για να αποδείξουμε ότι το όριο αυτού του ολοκληρώματος υπάρχει για όλα τα $s>c$, παρατηρούμε ότι για μεγάλα A έχουμε

$$\begin{aligned}\int_0^A \left|e^{-st} f(t)\right| dt &\le \int_0^M e^{-st}\left|f(t)\right| dt + \int_M^A e^{-st}\left|f(t)\right| dt \\ &\le k_{\mathrm{I}} \int_0^M e^{-st}\, dt + k \int_M^A e^{-(s-c)t}\, dt \\ &= \frac{k_1}{s}\left(1-e^{-Ms}\right) + \frac{k}{s-c}\left(e^{-(s-c)M} - e^{-(s-c)A}\right)\end{aligned}$$

όπου $k_1 = \sup\{|f(t)|: t\in [0, M]\}$. Επομένως, υπάρχει το $\lim\limits_{A\to\infty} \int_0^A e^{-st} f(t)\, dt$ και ισχύει

$$\left|\mathcal{L}\{f(t)\}\right| = |F(s)| = \lim_{A\to\infty}\left|\int_0^A e^{-st} f(t)\, dt\right| \le \frac{k_1}{s}\left(1-e^{-Ms}\right) + \frac{k\, e^{-(s-c)M}}{s-c}. \quad (4)$$

◆

Οι συνθήκες του Θεωρήματος 1 δεν είναι αναγκαίες (βλέπε Πρόβλημα 24).

Πόρισμα 2 *Αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος 1 και $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ για $s>c$, τότε έχουμε ότι (a) $\lim\limits_{s\to\infty} F(s) = 0$, (b) η συνάρτηση $sF(s)$ είναι φραγμένη σε κάθε περιοχή του $+\infty$.*

Απόδειξη Είναι προφανής λόγω της σχέσης (4). ◆

Χωρίς απόδειξη παραθέτουμε το επόμενο αποτέλεσμα.

***ΠΡΟΤΑΣΗ 3** (Ιδιότητα Λειότητας) Για κάθε τμηματικά συνεχή συνάρτηση $f(t)$ εκθετικής τάξης c, ο μετασχηματισμός Laplace $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ ανήκει στο χώρο $C^{\infty}(s_0, +\infty)$, για κάθε $s_0 \geq c$.*

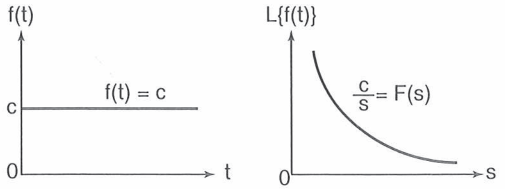
Παρατήρηση 4 Από το παραπάνω Πόρισμα 2 γίνεται φανερό ότι συναρτήσεις $F(s)$ με την ιδιότητα $\lim_{s \to +\infty} F(s) \neq 0$, δεν είναι δυνατόν να αποτελούν μετασχηματισμό Laplace κάποιων άλλων συναρτήσεων $f(t)$.

Στη συνέχεια παραθέτουμε παραδείγματα μετασχηματισμού Laplace χαρακτηριστικών συναρτήσεων.

Παράδειγμα 5 Να υπολογισθεί ο μετασχηματισμός Laplace της $f(t) = c$.

Λύση Από τη σχέση (2) προκύπτει ότι (βλέπε Σχήμα 2)

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \lim_{A \to \infty} \int_0^A e^{-st}\, c\, dt = \lim_{A \to \infty} c\, \frac{1 - e^{-sA}}{s} = \begin{cases} \dfrac{c}{s}, & s > 0, \\ \infty, & s \leq 0. \end{cases}$$ ■




```
In[1]:= LaplaceTransform[c, x, s]
Out[1]= c
        -
        s
```

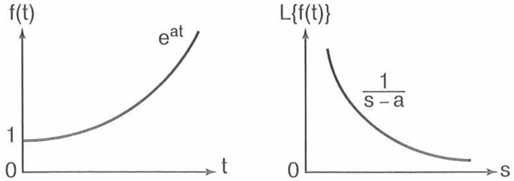
Παράδειγμα 5

Σχήμα 2 $\mathcal{L}\{c\} = \dfrac{c}{s}$

Παράδειγμα 6 Να υπολογισθεί ο μετασχηματισμός Laplace της $f(t) = e^{at}$.

Λύση Από τη σχέση (2) προκύπτει ότι (βλέπε Σχήμα 3)

$$F(s) = \mathcal{L}\{e^{at}\} = \lim_{A \to \infty} \int_0^A e^{-st} e^{at}\, dt = \lim_{A \to \infty} \frac{e^{-(a-s)A} - 1}{a - s} = \begin{cases} \dfrac{1}{s-a}, & s > a, \\ \infty, & s \leq a. \end{cases}$$ ■




```
In[2]:= LaplaceTransform[Exp[a t], t, s]
Out[2]=    1
        ------
        -a + s
```

Παράδειγμα 6

Σχήμα 3 $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \dfrac{1}{s-a}$

Παράδειγμα 7 Να υπολογισθεί ο μετασχηματισμός Laplace των συναρτήσεων: cos ωt, sin ωt.

Λύση Από τη σχέση (2) προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}(\cos \omega t) = \int_0^\infty e^{-st} \cos \omega t dt\,,\ \mathcal{L}(\sin\omega t) = \int_0^\infty e^{-st} \sin\omega t dt\,.$$

Τώρα παρατηρούμε ότι

$$\mathcal{L}\{\cos \omega t\} + i\,\mathcal{L}\{\sin \omega t\} = \int_0^\infty e^{-st} e^{i\omega t}\, dt = \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{(i\omega - s)t} dt$$

$$= \lim_{A\to\infty} \frac{e^{(i\omega - s)A} - 1}{i\omega - s} = \begin{cases} \dfrac{1}{s - i\omega} = \dfrac{s + i\omega}{s^2 + \omega^2}, & s > 0\,, \\ \text{απροσδιόριστο}, & s \le 0\,. \end{cases}$$

Εξισώνοντας τα πραγματικά και τα φανταστικά μέρη της εξίσωσης έχουμε

$$\mathcal{L}\{\cos \omega t\} = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad \text{και} \quad \mathcal{L}\{\sin \omega t\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}\,,\quad s > 0\,.$$

■

```
In[3]:= LaplaceTransform[Cos[w t], t, s]

            s
Out[3]= ---------
         s² + w²

In[4]:= LaplaceTransform[Sin[w t], t, s]

            w
Out[4]= ---------
         s² + w²
```

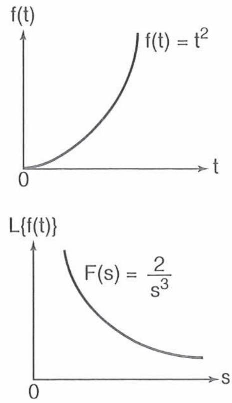
Παράδειγμα 7

Παράδειγμα 8 Να υπολογισθεί ο μετασχηματισμός Laplace της $f(t) = t^2$.

Λύση Από τη σχέση (2) προκύπτει

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{t^2\right\} = \int_0^\infty e^{-st} t^2\, dt = -\left.\frac{t^2 e^{-st}}{s}\right]_0^\infty + \int_0^\infty 2t\, \frac{e^{-st}}{s}\, dt\,.$$

Επειδή $t^2 e^{-st} \to 0$, καθώς το $t \to \infty$, έπεται ότι (βλέπε Σχήμα 4)



Σχήμα 4 $\mathcal{L}\{t^2\} = 2\, s^{-3}$

$$\mathcal{L}\{t^2\} = \left[-\frac{e^{-st}}{s} t^2\right]_0^\infty + \frac{2}{s} \int_0^{+\infty} t\, e^{-st}\, dt$$

$$= \frac{2}{s}\left\{\left[\frac{-t e^{-st}}{s}\right]_0^{+\infty} - \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{-s}\, dt\right\} = \frac{2}{s^2}\int_0^\infty e^{-st}\, dt = \frac{2}{s^2}\,\mathcal{L}\{1\} = \frac{2}{s^3}$$

■

Παρατήρηση 9 Επαγωγικά αποδεικνύεται ότι ισχύει ο γενικός τύπος

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0.$$

Παρατήρηση 10 *(Πεδίο Ορισμού του F).* (**a**) Ενώ η συνάρτηση f(t) μπορεί να ορίζεται σε όλο το διάστημα [0, +∞), εν γένει ο μετασχηματισμός Laplace $\mathcal{L}\{f(t)\}$ ορίζεται σε ένα μικρότερο διάστημα. Για παράδειγμα, ο $\mathcal{L}\{e^{8t}\}$ ορίζεται για $s \in (8, +\infty)$ κ.λπ. (**b**) Ακόμα υπάρχουν συναρτήσεις των οποίων ο μετασχηματισμός Laplace δεν ορίζεται, όπως η e^{t^2}, για την οποία δεν υπάρχει θετική σταθερά c, ώστε να ορίζεται ο $\mathcal{L}\{e^{t^2}\}$ στο (c, +∞), αφού για κάθε c>0 υπάρχει t_0 (π.χ., t_0=c+1) έτσι ώστε να ισχύει $e^{ct} < e^{t^2}$, για κάθε $t \geq t_0$.

Τέλος δίδουμε τον τρόπο υπολογισμού του μετασχηματισμού Laplace για μια τμηματικά συνεχή συνάρτηση.

Παράδειγμα 11 Να ορισθεί ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{για} \quad 0 < t < 10, \\ 0, & \text{για} \quad 10 < t < 20, \\ e^t, & \text{για} \quad 20 < t. \end{cases}$$

Λύση Από τη σχέση (2) έχουμε

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \int_0^{10} e^{-st}\,dt + \int_{20}^\infty e^{-st} e^t\,dt = \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^{10} + \left.\frac{e^{-(s-1)t}}{-(s-1)}\right|_{20}^\infty$$

$$= -\frac{e^{-10s}}{s} + \frac{1}{s} + \frac{e^{-20(s-1)}}{s-1} = \frac{1}{s} - \frac{e^{-10s}}{s} + \frac{e^{-20(s-1)}}{s-1}, \quad \text{για} \quad s > 1.$$

■

7.2 Προβλήματα

• Να γίνει η γραφική παράσταση των παρακάτω συναρτήσεων. Επίσης να διαπιστωθεί αν οι συναρτήσεις αυτές είναι συνεχείς (Σ), τμηματικά συνεχείς (Τ.Σ) ή ασυνεχείς (Α).

1. $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1, \\ t, & 1 \leq t < \pi, \\ \sin t, & \pi \leq t. \end{cases}$

2. $f(t) = \begin{cases} (t-\pi)e^t, & 0 \leq t < \pi, \\ \sin t, & \pi \leq t. \end{cases}$

3. $f(t) = \begin{cases} 1, & t = 0, \\ t^{-1/2}, & 0 < t < \infty. \end{cases}$

4. $f(t) = \mathrm{sgn}(\cos 3t), \quad 0 \leq t < \infty.$

5. $f(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin t}{\sqrt{t}}, & t > 0, \\ 0, & t = 0. \end{cases}$

6. $f(t) = \begin{cases} \dfrac{\cos 2t}{\sqrt{t}}, & t > 0, \\ 0, & t = 0. \end{cases}$

• Να εξετασθεί αν οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι εκθετικής τάξης για κάποια σταθερά c>0 και να προσδιορισθεί η σταθερά c.

7. $f(t) = \sinh(2t)$ **8.** $f(t) = 3\exp(t^2)$ **9.** $f(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)e^{-t}$

10. $f(t) = e^t \cos(\pi t) + 10$

11. $f(t) = e^{t\sin t}$ **12.** $f(t) = e^{-3t}\cos(\pi t)$ **13.** $f(t) = t^n$

14. $f(t) = \sin at$ **15.** $f(t) = e^{\sqrt{t}}$ **16.** $f(t) = \ln(1+t)$

17. $f(t) = \frac{1}{1+t}$ **18.** $f(t) = \frac{e^{at}}{1+t}$ **19.** $f(t) = \cosh(t^2)$

20. $f(t) = t\ln t$ **21.** $f(t) = e^t \sin t^2$

22. Έστω f(t) μια τμηματικά συνεχής συνάρτηση στο $[0, +\infty)$. Να αποδειχθεί ότι η f(t) είναι εκθετικής τάξης, αν και μόνο αν υπάρχει $a>0$ ώστε $\lim_{t\to\infty} e^{-at}f(t)=0$.

23. Αν η f(t) είναι εκθετικής τάξης και τμηματικά συνεχής, να αποδειχθεί ότι και η συνάρτηση $\int_{t_0}^{t} f(r)\,dr$ για $t_0 \geq 0$, είναι επίσης της ίδιας εκθετικής τάξης.

24. Να αποδειχθεί ότι οι συνθήκες του Θεωρήματος 1 δεν είναι και αναγκαίες. Ειδικότερα να αποδειχθεί ότι για τη συνάρτηση

$$f(t) = \begin{cases} e^{n^2}, & t \in \left[n, n+e^{-n^2}\right], \quad n \in \mathbb{N}, \\ 0, & t \notin \left[n, n+e^{-n^2}\right], \quad n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

δεν υπάρχουν αριθμοί $k > 0$, $M > 0$ και $c \in \mathbb{R}$, τέτοιοι ώστε $|f(t)| \leq k\, e^{ct}$, για $t \in [m, +\infty)$, αλλά υπάρχει ο $\mathcal{L}\{f(t)\}$ για κάθε $t>0$.

25. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(t) = \sin(e^{t^2})$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος 1, ενώ η $f'(t)$ δεν τις ικανοποιεί.

26. Να αποδειχθεί ότι κάθε φραγμένη τμηματικά συνεχής συνάρτηση έχει μετασχηματισμό Laplace. Επίσης κάθε πολυώνυμο οποιουδήποτε βαθμού.

27. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(t) = 2te^{t^2}\cos(e^{t^2})$ έχει μετασχηματισμό Laplace, αν και η f(t) δεν είναι εκθετικής τάξης.

28. Έστω $f(t) \equiv 0$, $t \in \mathbb{R}$. (i) Να υπολογισθεί η $f'(t) = Df(t)$, $t \in \mathbb{R}$ και να γίνει το γράφημα αυτής. (ii) Τροποποιήστε τη συνάρτηση f(t) ώστε να προκύψει η

$$g(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & \text{αλλού}. \end{cases}$$

Να υπολογισθεί η $g'(t) = Dg(t)$ και να γίνει το γράφημα αυτής. Πού ταυτίζονται οι $f'(t)$ και $g'(t)$; (iii) Να υπολογισθούν οι συναρτήσεις $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ και $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$ και να γίνουν τα γραφήματα αυτών. Πού ταυτίζονται οι συναρτήσεις F(s), G(s); (iv) Σχολιάστε τις διαφορές μεταξύ των γραμμικών τελεστών D και $\mathcal{L}$.

7.3 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ LAPLACE

Στην παράγραφο αυτή θα αναπτυχθούν οι βασικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace, οι οποίες, συνδυαζόμενες με τους μετασχηματισμούς Laplace των στοιχειωδών συναρτήσεων, απλοποιούν σημαντικά την επίλυση των διαφορικών εξισώσεων, όπως αυτό θα φανεί και στις εφαρμογές.

Θεώρημα 1 *(Γραμμικότητα) Για οποιεσδήποτε συναρτήσεις f(t), g(t), των οποίων οι μετασχηματισμοί Laplace $\mathcal{L}\{f(t)\}$ και $\mathcal{L}\{g(t)\}$ υπάρχουν, ισχύει*

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t)+\beta g(t)\}=\alpha\,\mathcal{L}\{f(t)\}+\beta\mathcal{L}\{g(t)\},\ \text{για κάθε } \alpha,\beta\in\mathbb{R}.$$

Απόδειξη Είναι φανερό ότι, αν οι συναρτήσεις f(t), g(t) έχουν μετασχηματισμό Laplace, τότε και η συνάρτηση άθροισμα αf(t) + βg(t) έχει μετασχηματισμό Laplace και ισχύει:

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t)+\beta g(t)\}=\int_0^\infty[\alpha f(t)+\beta g(t)]\,e^{-st}dt$$
$$=\alpha\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt+\beta\int_0^\infty g(t)e^{-st}dt=\alpha\,\mathcal{L}\{f(t)\}+\beta\,\mathcal{L}\{g(t)\}.\quad\blacklozenge$$

Θεώρημα 2 *(1ο Θεώρημα Μετατόπισης) Αν η συνάρτηση f(t) έχει μετασχηματισμό Laplace τη συνάρτηση F(s), τότε ο μετασχηματισμός Laplace της $e^{at}f(t)$ είναι η συνάρτηση F(s-a).*

Απόδειξη Είναι φανερό ότι

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}e^{at}f(t)\,dt=\int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)\,dt=F(s-a).\quad\blacklozenge$$

Παράδειγμα 3 (i) Επειδή ισχύει $\mathcal{L}\{\cos t\}=\frac{s}{s^2+1}$, τότε από το Θεώρημα 2 προκύπτει ότι

$$L\{e^{5t}\cos t\}=\frac{(s-5)}{(s-5)^2+1}.$$

(ii) Επειδή έχουμε $\mathcal{L}\{t^2\}=2\,s^{-3}$, τότε σύμφωνα με το Θεώρημα 2 θα ισχύει

$$\mathcal{L}\{e^{-7t}t^2\}=2(s+7)^{-3}.\quad\blacksquare$$

Θεώρημα 4 *(Πολλαπλασιασμός με σταθερά) Αν ο μετασχηματισμός Laplace της f(t) είναι F(s), τότε ο μετασχηματισμός της f(ct) με c>0 θα είναι $c^{-1}F(s/c)$.*

Απόδειξη Έχουμε ότι

$$\mathcal{L}\{f(ct)\}=\int_0^\infty e^{-st}f(ct)\,dt=\int_0^\infty c^{-1}e^{-s\xi/c}f(\xi)\,d\xi=c^{-1}F(s/c),\ \text{όπου } \xi=ct.\quad\blacklozenge$$

Παράδειγμα 5 Επειδή ισχύει $\mathcal{L}\,\{\sin t\} = \dfrac{1}{s^2+1}$, τότε σύμφωνα με το Θεώρημα 4 θα έχουμε ότι

$$\mathcal{L}\,\{\sin \omega t\} = \frac{1}{\omega}\frac{1}{\left(\frac{s}{\omega}\right)^2+1} = \frac{1}{\omega}\frac{\omega^2}{s^2+\omega^2} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}\,.$$

Επίσης ισχύει ότι $\mathcal{L}\,\{\cos \omega t\} = \dfrac{1}{\omega}\dfrac{s/\omega}{(s/\omega)^2+1} = \dfrac{s}{s^2+\omega^2}\,.$ ■

Στη συνέχεια θα αποδειχθεί η βασική ιδιότητα του μετασχηματισμού Laplace, η οποία τον καθιστά ιδιαίτερα χρήσιμο για την επίλυση (συνήθων ή μερικών) διαφορικών εξισώσεων και συστημάτων.

Θεώρημα 6 *(Παραγώγιση) Έστω ότι η συνάρτηση f(t) είναι συνεχής και η f΄(t) τμηματικά συνεχής στο διάστημα 0≤t≤T, για κάθε T>0. Έστω επίσης ότι η f(t) είναι εκθετικής τάξης, καθώς το t→∞. Τότε ο μετασχηματισμός Laplace της f΄(t) υπάρχει και δίδεται από τον τύπο*

$$\mathcal{L}\,\{f'(t)\} = s\,\mathcal{L}\,\{f(t)\} - f(0)\,. \tag{1}$$

Απόδειξη Θεωρούμε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^T e^{-st} f'(t)\,dt = e^{-st} f(t)\Big|_0^T + \int_0^T s\,e^{-st} f(t)\,dt$$
$$= e^{-sT} f(T) - f(0) + s\int_0^T e^{-st} f(t)\,dt.$$

Επειδή ισχύει $|f(t)| \le M\,e^{ct}$ για μεγάλο t με c>0, M>0, θα έχουμε τη σχέση $|e^{-sT} f(T)| \le M\,e^{-(s-c)T}$. Στο όριο ισχύει $e^{-sT}f(T)\to 0$, καθώς το $T\to\infty$, όταν s>c. Επομένως,

$$\mathcal{L}\,\{f'(t)\} = s\,\mathcal{L}\,\{f(t)\} - f(0), \quad \text{για } s>c.$$ ◆

Θεώρημα 7 *(Ανώτερες Παράγωγοι) Αν οι συναρτήσεις f΄(t), f΄΄(t) ικανοποιούν τις ίδιες ιδιότητες που είχαν οι συναρτήσεις f(t), f΄(t) στο Θεώρημα 6, τότε υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace της f΄΄(t) και δίδεται από τον τύπο*

$$\mathcal{L}\,\{f''(t)\} = s^2\,\mathcal{L}\,\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)\,. \tag{2}$$

Γενικότερα, κάτω από αντίστοιχες συνθήκες ισχύει

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^n\,\mathcal{L}\,\{f(t)\} - s^{n-1} f(0) - \ldots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0). \tag{3}$$

Απόδειξη Για n=2 έχουμε

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\} - f'(0) = s\left[s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)\right] - f'(0) = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)\,.$$

Επαγωγικά αποδεικνύεται ο τύπος (3) για n>2. ◆

Πρόταση 8 *(Ιδιότητες Αρχικών Τιμών) Αν η συνάρτηση f(t) είναι συνεχής στο (0, +∞), υπάρχει το* $\lim_{t \to 0} f(t)$, *η f΄(t) είναι τμηματικά λεία στο [0, +∞) και f(t), f΄(t) είναι εκθετικής τάξης, τότε* $\lim_{s \to \infty} s\, \mathcal{L}\,(f(t)) = \lim_{t \to 0} f(t) = f(0^+)$.

Απόδειξη Σύμφωνα με το Θεώρημα 6, υπάρχει c>0, ώστε οι συναρτήσεις $F(s) = \mathcal{L}\,\{f(t)]$ και $F_1(s) = \mathcal{L}\,\{f'(t)\}$ να ορίζονται για s>c. Μεταξύ τους δε ισχύει η σχέση [αντικαθιστούμε το f(0) με το $f(0^+)$], $F_1(s) = s\,F(s) - f(0^+)$, $s > c$. Από την Πρόταση 3 της Ενότητας 7.2 έχουμε $\lim_{s \to \infty} F_1(s) = 0$ και s F(s) φραγμένη. Επομένως, πράγματι ισχύει ότι

$$\lim_{s \to \infty} s\,F(s) = \lim_{t \to 0^+} f(t) = f(0^+).$$

◆

Θεώρημα 9 *(Ολοκλήρωση) Αν υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης f(t), τότε ισχύει*

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(r)\,dr\right\} = \frac{\mathcal{L}\,\{f(t)\}}{s}.$$

Απόδειξη Πράγματι έχουμε ότι

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(r)\,dr\right\} = \left[-\frac{e^{-st}}{s}\int_0^t f(r)\,dr\right]_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty f(t)\,e^{-st}\,dt = \frac{\mathcal{L}\{f(t)\}}{s},$$

όπου θεωρείται γνωστό ότι, αν η f(t) είναι εκθετικής τάξης με σταθερά c, τότε το $\int_0^t f(\tau)\,d\tau$ είναι της ίδιας εκθετικής τάξης c και s>c (βλέπε Πρόβλημα 23, Ενότητα 7.2).

◆

Παράδειγμα 10 (i) Επειδή $\mathcal{L}\,\{\cos \omega t\} = \frac{s}{s^2+\omega^2}$, τότε σύμφωνα με το Θεώρημα 9

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin \omega t}{\omega}\right\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t \cos \omega r\,dr\right\} = \frac{1}{s}\,\frac{s}{s^2+\omega^2} = \frac{1}{s^2+\omega^2}.$$

(ii) Επειδή $\mathcal{L}\,\{t^2\} = \frac{2}{s^3}$, από το Θεώρημα 9 προκύπτει $\mathcal{L}\left\{\int_0^t \tau^2\,d\tau\right\} = \frac{1}{s}\,\frac{2}{s^3} = \frac{2}{s^4}$ ή $\mathcal{L}\left\{\frac{t^3}{3}\right\} = \frac{2}{s^4}$. Επομένως $\mathcal{L}\{t^3\} = 2 \cdot 3/t^4 = 3!/t^4$.

```
In[1]:= LaplaceTransform[Sin[w t] / w, t, s]

           1
Out[1]= -------
        s^2 + w^2

In[2]:= LaplaceTransform[Integrate[r^2, {r, 0, t}], t, s]

        2
Out[2]= --
        s^4
```

Παράδειγμα 10

■

Θεώρημα 11 *(Συνάρτηση Γάμμα) Να αποδειχθεί ότι ισχύει η σχέση*

$$\mathcal{L}\,\{t^x\} = \frac{\Gamma\,(x+1)}{s^{x+1}}, \qquad s>0, \quad x>-1\,, \tag{4}$$

όπου η ***συνάρτηση Γάμμα*** *ορίζεται*

$$\Gamma\,(x) = \int_0^\infty e^{-\beta}\,\beta^{x-1}\,d\beta\,, \quad x>0\,.$$

Απόδειξη Ισχύει ότι

$$\Gamma\,(x+1) = \int_0^\infty e^{-\beta}\,\beta^x d\beta = \left[-e^{-\beta}\,\beta^x\right]_0^\infty + x\int_0^\infty e^{-\beta}\,\beta^{x-1}\,d\beta.$$

Επειδή για σταθερό x>0 έχουμε $\beta^x \to 0$, καθώς το $\beta \to 0$ και $e^{-\beta}\beta^x \to 0$, καθώς το $\beta \to \infty$, προκύπτει ότι $\Gamma\,(x+1) = x\int_0^\infty e^{-\beta}\,\beta^x\,d\beta = x\,\Gamma\,(x)$. Θέτοντας τώρα $\beta = s\,t$ στη $\Gamma(x+1)$ (για $s>0$) έχουμε

$$\Gamma\,(x+1) = \int_0^\infty e^{-st}\,s^{x+1}\,t^x dt = s^{x+1}\int_0^\infty e^{-st}\,t^x\,dt = s^{x+1}\,\mathcal{L}\,\{t^x\}\,,$$

το οποίο αληθεύει για $x+1>0$. Επομένως,

$$\frac{\Gamma\,(x+1)}{s^{x+1}} = \int_0^\infty e^{-st}\,t^x\,ds\,, \quad s>0\,, \quad x>-1,$$

δηλαδή

$$\mathcal{L}\,\{t^x\} = \frac{\Gamma\,(x+1)}{s^{x+1}}, \quad \text{για} \quad s>0\,, \quad x>-1\,.$$

◆

Θεώρημα 12 *(Περιοδικές συναρτήσεις) Έστω ότι η συνάρτηση f(t),* $t\in\mathbb{R}$ *είναι τμηματικά συνεχής και περιοδική με περίοδο T, δηλαδή f(t + T) = f(t), για κάθε* $t\in\mathbb{R}$, *όπου T>0. Τότε ισχύει*

$$\mathcal{L}\,\{f\,(t)\} = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-s\tau}\,f(\tau)d\tau\,.$$

Απόδειξη Κατ' αρχήν παρατηρούμε ότι μια τέτοια συνάρτηση f(t) είναι πλήρως ορισμένη, αν είναι γνωστή στο διάστημα $0\le t<T$. Επίσης είναι φανερό ότι η f(t) είναι εκθετικής τάξης. Επομένως, υπάρχει ο $\mathcal{L}\{f(t)\}$ και ισχύει η σχέση

$$\mathcal{L}\,\{f\,(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\,f\,(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{nT}^{(n+1)T} e^{-st}\,f\,(t)\,dt.$$

Η αντικατάσταση $t = \tau + nT$ δίδει

$$\int_{nT}^{(n+1)T} e^{-st}\,f(t)\,dt = \int_0^T e^{-s\,(\tau+nT)}\,f(\tau+nT)\,d\tau = e^{-snT}\int_0^T e^{-s\tau}\,f\,(\tau)\,d\tau\,,$$

λόγω της περιοδικότητας της f(t). Επομένως, θα έχουμε

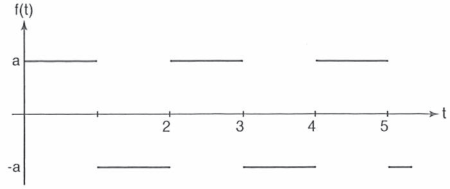
$$\mathcal{L}\{f\,(t)\} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-snT}\right)\int_0^T e^{-s\tau}\,f\,(\tau)\,d\tau = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-s\tau}\,f\,(\tau)\,d\tau\,.$$

◆

Παράδειγμα 13 Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace της ***τετραγωνικής κυματικής συνάρτησης*** f(t), που ορίζεται από τη σχέση

$$f(t)=\begin{cases} a\,, & \text{για } 2\,n\lambda < t < (2n+1)\,\lambda\,,\\ -a\,, & \text{για } (2n+1)\,\lambda < t < (2n+2)\,\lambda\,,\end{cases}$$

όπου $n\in\mathbb{Z}_0^+$ (βλέπε Σχήμα 1).



Σχήμα 1 Τετραγωνική Κυματική Συνάρτηση

Λύση Η συνάρτηση f(t) είναι περιοδική περιόδου 2λ και τέτοια ώστε f(t)=a, για 0<t<λ και f(t)=–a, για λ<t<2λ. Έτσι έχουμε

$$\mathcal{L}\,\{f\,(t)\}=\left[a\int_0^{\lambda} e^{-st}\,dt-a\int_{\lambda}^{2\lambda} e^{-st}\,dt\right]\left(1-e^{-2\lambda s}\right)^{-1}$$

$$=\left[\left[-\,ae^{-st}/s\right]_0^{\lambda}+\left[a\,e^{-st}/s\right]_{\lambda}^{2\lambda}\right]\left(1-e^{-2\lambda s}\right)^{-1}$$

$$=a\left(1-e^{-\lambda s}\right)^2\left[s\left(1-e^{-2\lambda s}\right)\right]^{-1}=\frac{a}{s}\,\frac{e^{\lambda s}-1}{e^{\lambda s}+1}=\frac{a}{s}\tanh\left(\frac{\lambda s}{2}\right).$$ ■

Θεώρημα 14 *(Παράγωγος Μετασχηματισμού). Αν ισχύει ο μετασχηματισμός Laplace* $\mathcal{L}\,\{f\,(t)\}=F\,(s)$ *τότε έχουμε* $F'\,(s)=\mathcal{L}\,\{-\,t\,f\,(t)\}$.

Απόδειξη Πράγματι, σύμφωνα με τον ορισμό ισχύει $F\,(s)=\int_0^{\infty} e^{-st}\,f\,(t)\,dt$. Έτσι έχουμε $F'\,(s)=\int_0^{\infty}(-\,t)\,e^{-st}\,f\,(t)\,dt=\mathcal{L}\,\{(-\,t)\,f\,(t)\}$. ◆

Πόρισμα 15 *Αν οι συναρτήσεις F(s), f(t) είναι όπως στο Θεώρημα 14, τότε για κάθε θετικό ακέραιο n ισχύει*

$$\frac{d^n\,F\,(s)}{ds^n}=\mathcal{L}\,\left\{(-\,t)^n\,f\,(t)\right\}.$$

Όπως θα φανεί στη συνέχεια (βλέπε Ενότητα 7.5, Παραδείγματα 4, 5), ο τύπος αυτός είναι ιδιαίτερα σημαντικός στην επίλυση διαφορικών εξισώσεων με *μεταβλητούς συντελεστές*.

Πόρισμα 16 *Έστω ότι η συνάρτηση f(t) είναι τμηματικά συνεχής και εκθετικής τάξης με* $\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$. *Επίσης έστω ότι υπάρχει το* $\lim_{t\to 0^+} t^{-1}\,f\,(t)=a_0\in\mathbb{R}$. *Τότε ισχύει*

$$\mathcal{L}\,\left\{t^{-1}\,f\,(t)\right\}=\int_s^{+\infty}F\,(\tau)\,d\tau\,.$$

Απόδειξη Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$g\,(t)=\begin{cases} t^{-1}\,f\,(t)\,, & \text{για } t>0\,,\\ a_0\,, & \text{για } t=0\,.\end{cases}$$

Η συνάρτηση g(t) ως τμηματικά συνεχής και εκθετικής τάξης έχει μετασχηματισμό Laplace, έστω την $G(s)=\mathcal{L}\{g(t)\}$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 14 προκύπτει

$$F(s)=\mathcal{L}\left\{t\left(\frac{f(t)}{t}\right)\right\}=\mathcal{L}\{t\,g(t)\}=-\frac{dG(s)}{ds}.$$

Έτσι έχουμε ότι $G'(s)=-F(s)$ ή $G(s)=A-\int_c^s F(\tau)\,d\tau$, για κάποια σταθερά A και κάθε c>0. Αν τώρα θεωρήσουμε το $s\to+\infty$, τότε από την Πρόταση 3 της Ενότητας 7.2 προκύπτει

$$0=\lim_{s\to\infty} G(s)=\lim_{s\to\infty}\left\{A-\int_c^s F(\tau)\,d\tau\right\}=A-\int_c^\infty F(\tau)\,d\tau.$$

δηλαδή $A=\int_c^\infty F(\tau)\,d\tau$. Έτσι η προηγούμενη σχέση γίνεται

$$G(s)=\int_c^\infty F(\tau)\,d\tau-\int_c^s F(\tau)\,d\tau=\int_s^\infty F(\tau)\,d\tau.$$

◆

Παράδειγμα 17 Να υπολογισθεί ο $\mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}$.

Λύση Γνωρίζουμε ότι $\mathcal{L}\{\sin t\}=\frac{1}{s^2+1}$, για s>0. Επομένως, θα έχουμε

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}=\int_s^\infty \frac{dr}{r^2+1}=\frac{\pi}{2}-\arctan s=\arctan\left(\frac{1}{s}\right).$$

■

Παράδειγμα 18 Να υπολογισθεί ο μετασχηματισμός Laplace του ημιτονικού ολοκληρώματος

$$Si(t)=\int_0^t \frac{\sin r}{r}\,dr.$$

Λύση Από το προηγούμενο Παράδειγμα 17 και το Θεώρημα 9 προκύπτει

$$\mathcal{L}\{Si(t)\}=\frac{1}{s}\arctan\left(\frac{1}{s}\right).$$

■

7.3 Προβλήματα

● Να υπολογισθεί ο μετασχηματισμός Laplace των ακόλουθων συναρτήσεων:

1. $f(t)=3\sin t+t\sin t$ **2.** $f(t)=\sqrt{t}+2t^{3/2}$ **3.** $f(t)=\sinh(at)$

4. $f(t)=\frac{\cos at-1}{t}$ **5.** $f(t)=\frac{e^{at}-e^{bt}}{t}$ **6.** $f(t)=\cos^2 at$

7. $f(t)=\sin^3 at$ **8.** $f(t)=\sin^2 at\cos at$ **9.** $f(t)=e^{at}t^2$

10. $f(t)=t^2\cos bt$ **11.** $f(t)=t^3e^{at}$ **12.** $f(t)=t\cosh at$

13. $f(t)=t\sinh at$ **14.** $f(t)=\cosh at\cos at$ **15.** $f(t)=\cosh at\sin at$

16. $f(t) = \sinh at \cos at$ **17.** $f(t) = \sinh at \sin at$ **18.** $f(t) = e^{-2t} \sin(n\pi t)$

19. $f(t) = e^{-at}(A \cos\beta t + B \sin\beta t)$ **20.** $f(t) = 2t^2 e^{-3t} - 4t + 1$

21. $f(t) = t \sin(3t) - 1 + 2t^2$ **22.** $f(t) = 2\cosh^2(3t)$

23. $f(t) = 6t \sinh(3t) - 9t^3$ **24.** $f(t) = 2t^2 e^{-t} - \sin^2 t$

25. $f(t) = [\cosh(4t) - \cos(4t)]/2$ **26.** $f(t) = (t-1)\cos(3t) + 5e^{-t}$

27. $f(t) = \sinh(3t) + \cosh(3t) - 2t^3$ **28.** $f(t) = 1 - \sinh(6t) + e^{-t}\cosh(t)$

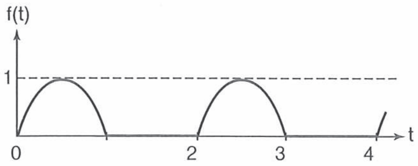
29. $f(t) = 3e^{-4t} \sin 2t - \cos(6t) + 6$

- Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace των ακόλουθων περιοδικών συναρτήσεων:

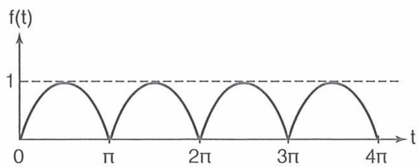
30. $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 2e^{3t}, & 2n < t < 2n+1, \\ -2e^{-3t}, & 2n+1 < t < 2n+2, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$

31. $f(t) = \begin{cases} h, & 4n \le t < 4n+4, \quad h > 0 \\ -h, & 4n+4 \le t < 4n+8, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$ **32.** $f(t) = \max\{0, \sin t\}$

33. $f(s) = \operatorname{sgn}\{\sin(\pi t)\}$ **34.** $f(t) = |\sin t|$



Σχήμα 2 Πρόβλημα 32

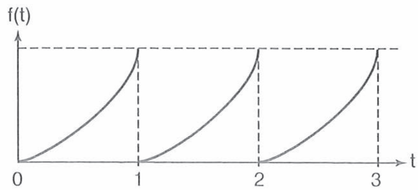


Σχήμα 3 Πρόβλημα 34

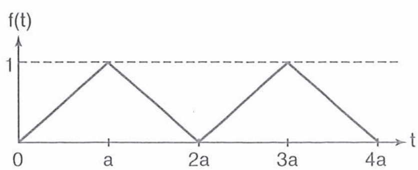
35. $f(t) = e^t, 0 \le t < 1, f(t+1) = f(t)$ **36.** $f(t) = \begin{cases} 2t/\pi, & 0 \le t < \pi/2 \\ \sin t, & \pi/2 \le t < \pi \end{cases}, \ f(t+\pi) = f(t)$

37. $f(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{a}, & 0 \le t < a \\ \dfrac{2a - t}{a}, & a \le t < 2a \end{cases}, \quad f(t + 2a) = f(t)$

38. $f(t) = \dfrac{a}{b} t, \quad 0 \le t < b, \quad f(t+b) = f(t), \quad b > 0$

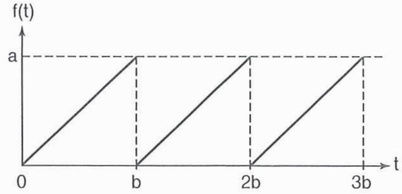


Σχήμα 4 Πρόβλημα 35

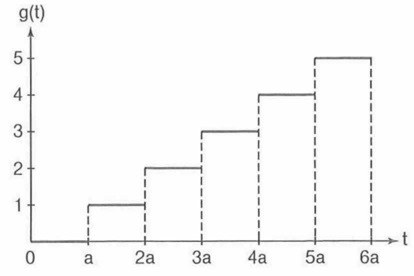


Σχήμα 5 Πρόβλημα 37
(Συνάρτηση Τριγωνικού Κύματος)

39. Έστω g(t) η ***κλιμακωτή συνάρτηση*** του Σχήματος 7, η οποία ορίζεται $g(t) = n$, για $na<t<(n+1)a$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Να δειχθεί ότι $g(t) = bta^{-1} - f(t)$, όπου f(t) η οδοντωτή συνάρτηση του Προβλήματος 38 και να βρεθεί η $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$.



Σχήμα 6 Πρόβλημα 38
(Οδοντωτή Συνάρτηση)



Σχήμα 7 Πρόβλημα 39
(Κλιμακωτή Συνάρτηση)

40. Ο μετασχηματισμός Laplace μιας συνάρτησης f(t) μπορεί να υπολογισθεί από το ανάπτυγμα Taylor αυτής. Πράγματι, αν

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n ,$$

τότε

$$F(s) = \frac{a_0}{s} + \frac{a_1}{s^2} + \frac{2!a_2}{s^3} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!a_n}{s^{n+1}} .$$

(a) Από το ανάπτυγμα $\sin t = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{2k+1}/(2k+1)!$ να υπολογισθεί ο $\mathcal{L}\{\sin t\}$ με τη μέθοδο των σειρών και να αποδειχθεί ότι η σειρά έχει ως άθροισμα τη συνάρτηση $(s^2+1)^{-1}$.

(b) Η *συνάρτηση Bessel πρώτου είδους και μηδενικής τάξης* είναι

$$J_0(t) = 1 - \frac{t^2}{2^2} + \frac{t^4}{2^2\ 4^2} - \frac{t^6}{2^2\ 4^2\ 6^2} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k} .$$

Να υπολογισθεί ο $\mathcal{L}\{J_0(t)\}$. (*Υποδ.* Να χρησιμοποιηθεί η σχέση

$$\left(1 + s^{-2}\right)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2} s^{-2} + \frac{1}{2}\frac{3}{4} s^{-4} - \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6} s^{-6} + \ldots .$$

(c) Η ***συνάρτηση σφάλματος*** ορίζεται $\mathrm{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-\tau^2} d\tau$. Να υπολογισθεί ο $\mathcal{L}\{\mathrm{erf}(t)\}$ ως σειρά.

(d) Να υπολογισθεί ο $\mathcal{L}\{\mathrm{erf}(\sqrt{t})\}$.

(e) Να αποδειχθεί ότι $\mathcal{L}\{J_0(\sqrt{t})\} = \frac{1}{s} e^{-s/4}$.

(f) Είναι γνωστό ότι $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\tau^2} d\tau = 1$. Επομένως, αν ορισθεί η ***συμπληρωματική συνάρτηση σφάλματος*** erfc(t) από τον τύπο $\mathrm{erfc}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_t^{+\infty} e^{-\tau^2} d\tau$, τότε θα ισχύει e r f (t) + e r f c (t) = 1. Χρησιμοποιώντας αυτό το αποτέλεσμα να υπολογισθεί ο $\mathcal{L}\{\mathrm{erfc}(t)\}$.

41. Να αποδειχθεί ότι $\mathcal{L}\{\mathrm{erf}(t)\} = s^{-1} e^{s^2/4}\, \mathrm{erfc}(s/2)$. (*Υποδ.* Να γραφεί ο $\mathcal{L}\{\mathrm{erf}(t)\}$ ως διπλό ολοκλήρωμα και να γίνει εναλλαγή της σειράς ολοκλήρωσης στο διπλό ολοκλήρωμα του $\mathcal{L}\{\mathrm{erf}(t)\}$).

42. Έστω $F(s) = \mathcal{L}\{\sin 2t\}$. Τότε να υπολογισθούν τα: (i) F(3i) και F(–3i) και (ii) F(a+ib) και F(a–ib).

43. Να δειχθεί ότι

$$\mathcal{L}\left\{\int_a^t \int_a^t f(\tau)\, d\tau\, d\tau\right\} = \frac{1}{s^2}\mathcal{L}\{f(t)\} + \frac{1}{s^2}\int_a^0 f(\tau) d\tau + \frac{1}{s}\int_a^0 \int_a^t f(\tau)\, d\tau\, dt.$$

44. Αν η συνάρτηση f(t) ικανοποιεί τις συνθήκες του Θεωρήματος 6, εκτός του γεγονότος ότι παρουσιάζει άλμα προς τα πάνω μεγέθους c_0 στο $t=t_0$, να δειχθεί ότι $\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\,\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) - c_0\, e^{-st_0}$.

45. Ισχύει το Θεώρημα 9, αν η f παρουσιάζει άλμα στο $t=t_0$ πεπερασμένου μεγέθους;

46. Η συνάρτηση S_n, που ορίζεται από τη σχέση $S_n\{f(t)\} = \int_0^\pi f(t)\sin(nt)\,dt$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, ονομάζεται ***ημιτονικός μετασχηματισμός*** της f(t). Να δειχθεί ότι

$$S_n\{f'(t)\} = -n^2 S_n\{f(t)\} + n\left[f(0) - (-1)^n f(\pi)\right].$$

47. Η συνάρτηση C_n, που ορίζεται από τη σχέση $C_n\{f(t)\} = \int_0^\pi f(t)\cos(nt)\,dt$ $n = 0, 1, 2, \ldots$, ονομάζεται ***συνημιτονικός μετασχηματισμός*** της f(t). Να δειχθεί ότι $C_n\{f'(t)\} = -n^2 C_n\{f(t)\} + (-1)^n f'(\pi) - f'(0)$.

48. Έστω ο γενικός ολοκληρωτικός μετασχηματισμός $T\{f(t)\} = \int_a^b f(t) K(t, s)\, dt$, όπου K(t, s) ο *πυρήνας* του μετασχηματισμού. Να βρεθούν συνθήκες για τον πυρήνα K(t, s), ώστε οι $T\{f'\}$, $T\{f''\}$ να μην περιέχουν όρους που απαιτούν τον υπολογισμό της f(t) ή κάποιας παραγώγου αυτής.

49. Έστω ότι οι συναρτήσεις f(t), f΄(t), …, $f^{(k)}(t)$ είναι τμηματικά λείες και εκθετικής τάξης στο (0, +∞), με $f^{(k)}(t)$ την πρώτη παράγωγο, που είναι τμηματικά συνεχής. Έστω επίσης ότι $f(0^+) = f'(0^+) = \ldots = f^{(k)}(0^+) = 0$. Τότε να δειχθεί ότι $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} \approx c\, s^{-(k+1)}$ καθώς το $s \to \infty$.

7.4 ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

Όπως θα δούμε στη συνέχεια, κατά την αντιμετώπιση προβλημάτων διαφορικών εξισώσεων αρχικών ή συνοριακών συνθηκών με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace, πάντα καταλήγουμε στο ακόλουθο ζήτημα:

Γνωρίζοντας μια συνάρτηση F(s) να βρεθεί η συνάρτηση εκείνη f(t) που ικανοποιεί τη σχέση $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$. Εν ολίγοις το ερώτημα είναι: *πώς μπορεί να βρεθεί μια συνάρτηση της οποίας γνωρίζουμε το μετασχηματισμό Laplace;* Η f(t) ονομάζεται ***αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace*** της F(s) και γράφεται

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}.$$

Όσον αφορά το ερώτημα της *ύπαρξης*, η απάντηση δεν είναι πάντα καταφατική. Εξαρτάται από τη μορφή συνέχειας της F(s) και την ασυμπτωτική συμπεριφορά αυτής, καθώς το $|s| \to \infty$. Για την αναλυτικότερη αντιμετώπιση αυτού του ερωτήματος, όσο και τον *τρόπο εύρεσης* του αντίστροφου μετασχηματισμού, απαιτείται γνώση της Θεωρίας των *Μιγαδικών Συναρτήσεων*. Για το ερώτημα του *μονοσήμαντου* του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace, ισχύει το ακόλουθο θεώρημα, το οποίο δίδεται χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 1 (Lerch) *Έστω ότι οι συναρτήσεις f(t), g(t) είναι τμηματικά συνεχείς και εκθετικής τάξης. Αν υπάρχει μια σταθερά s_0 έτσι ώστε $\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{g(t)\}$, για όλα τα $s>s_0$, τότε $f(t) = g(t)$, για όλα τα $t>0$, εκτός πιθανόν από τα σημεία ασυνέχειας των συναρτήσεων f(t) και g(t).*

Απόδειξη Για την απόδειξη παραπέμπουμε στο βιβλίο του R.V. Churchill ([CH], Chapter 6.) ◆

Παρατήρηση 2 (a) Το παραπάνω Θεώρημα 1 αναφέρει ότι υπάρχει μια *αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία* μεταξύ των (συνεχών) συναρτήσεων και του μετασχηματισμού Laplace αυτών.

(b) Αυτό το γεγονός μας οδηγεί στη διαμόρφωση ενός *Πίνακα Μετασχηματισμών Laplace* βασικών συναρτήσεων (βλέπε στο τέλος του Κεφαλαίου, Παράρτημα Β).

(c) Η χρήση αυτού του πίνακα σε συνδυασμό με τις *ιδιότητες* του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace, που διατυπώνονται στα επόμενα δύο θεωρήματα, μας οδηγούν στην εύρεση του $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ των περισσότερων συναρτήσεων F(s), που προκύπτουν από τις εφαρμογές.

(d) Έτσι παρακάμπτονται οι δυσκολίες που συναντιούνται κατά τον *απευθείας προσδιορισμό* του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace με τη χρήση της Θεωρίας των Μιγαδικών Συναρτήσεων.

(e) Ας σημειωθεί ότι, όπως θα φανεί και από τα παραδείγματα, σημαντικό ρόλο παίζει η Θεωρία Ανάλυσης Ρητών Συναρτήσεων σε *απλά κλάσματα*, όπως

$$\frac{1}{s}, \quad \frac{1}{s-a}, \quad \frac{s}{s^2+\omega^2}, \quad \frac{\omega}{s^2+\omega^2}, \quad \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad \text{κ.α.}$$

Θεώρημα 3 *(Γραμμικότητα) Αν c_1, c_2 είναι σταθερές και υπάρχει ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace των συναρτήσεων $F_1(s)$, $F_2(s)$, τότε*

$$\mathcal{L}^{-1}\{c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)\} = c_1 \mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\} + c_2 \mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\}.$$

Απόδειξη Η απόδειξη είναι απόρροια της γραμμικότητας του $\mathcal{L}$ και του Θεωρήματος 1. ◆

Θεώρημα 4 *(Αντίστροφη Μετατόπιση) Αν η συνάρτηση F(s) δέχεται αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace, τότε* $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = e^{-at}\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\}$.

Απόδειξη Αν $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$, τότε γνωρίζουμε ότι

$$F(s-a) = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} f(t)\,dt = \int_0^{\infty} e^{-st}\{e^{at} f(t)\}\,dt = \mathcal{L}\{e^{at} f(t)\}.$$

Επομένως $\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at} f(t)$ ή $e^{-at}\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$. ◆

Παράδειγμα 5 Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace των συναρτήσεων

(i) $F(s) = \dfrac{s^3 - s^2 + 2s - 1}{(s^2+1)(s^2+2)}$ (ii) $F(s) = \dfrac{2s+3}{s^2+4s+7}$.

Λύση (i) Η μέθοδος των απλών κλασμάτων δίδει $F(s) = \dfrac{s}{s^2+1} - \dfrac{1}{s^2+2}$.
Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα 3

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2}\right\}.$$

Από τα παραδείγματα της προηγούμενης ενότητας προκύπτει τελικά ότι

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \cos t - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}\,t).$$

(ii) Έχουμε ότι $F(s) = \dfrac{2(s+2)}{(s+2)^2+3} - \dfrac{1}{(s+2)^2+3}$. Επομένως

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = e^{-2t}\left[2\cos(\sqrt{3}\,t) - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}\,t)\right].$$

```
In[1]:= InverseLaplaceTransform[(s^3 - s^2 + 2 s - 1) / ((s^2 + 1) (s^2 + 2)), s, t]

Out[1]= Cos[t] - Sin[√2 t]/√2

In[2]:= InverseLaplaceTransform[(2 s + 3) / (s^2 + 4 s + 7), s, t]

Out[2]= 1/3 e^(-2 t) (6 Cos[√3 t] - √3 Sin[√3 t])
```

Παράδειγμα 5 ■

Παράδειγμα 6 Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης

$$F(s) = \frac{3\,s + 1}{s^2 + 2\,s + 10}.$$

Λύση Κάνουμε χρήση των τύπων

$$L\left\{e^{at}\cos bt\right\} = \frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2} \quad \text{και} \quad L\left\{e^{at}\sin bt\right\} = \frac{b}{(s-a)^2 + b^2}.$$

Η συνάρτηση F γράφεται

$$F(s) = \frac{3s+1}{(s+1)^2 + 3^2} = \frac{3(s+1) - 2}{(s+1)^2 + 3^2} = 3\,\frac{s+1}{(s+1)^2 + 3^2} - \frac{2}{3}\,\frac{3}{(s+1)^2 + 3^2}.$$

Επομένως $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = 3\,e^{-t}\cos 3t - \frac{2}{3}\,e^{-t}\sin 3t$.

```
In[3]:= InverseLaplaceTransform[(3 s + 1) / (s^2 + 2 s + 10), s, t]
```

$$\text{Out[3]=}\ \frac{1}{6}\,e^{(-1-3\,i)\,t}\left((9-2\,i) + (9+2\,i)\,e^{6\,i\,t}\right)$$

```
In[4]:= FullSimplify[%]
```

$$\text{Out[4]=}\ \frac{1}{3}\,e^{-t}\,(9\,\mathrm{Cos}[3\,t] - 2\,\mathrm{Sin}[3\,t])$$

Παράδειγμα 6

■

Παράδειγμα 7 Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός της συνάρτησης

$$F(s) = \frac{s-1}{(s+1)\left(s^2 - 4s + 5\right)}.$$

Λύση Αναλύουμε την F σε απλά κλάσματα της μορφής

$$F(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{Bs + C}{s^2 - 4s + 5}$$

και βρίσκουμε ότι $A = -1/5$, $B = 1/5$, $C = 0$. Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} F(s) &= -\frac{1}{5}\,\frac{1}{s+1} + \frac{1}{5}\,\frac{s}{s^2 - 4s + 5} \\ &= -\frac{1}{5}\,\frac{1}{s+1} + \frac{1}{5}\,\frac{s-2}{(s-2)^2 + 1} + \frac{2}{5}\,\frac{1}{(s-2)^2 + 1}. \end{aligned}$$

Επομένως, $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = -\frac{1}{5}\,e^{-t} + \frac{1}{5}\,e^{2t}\cos t + \frac{2}{5}\,e^{2t}\sin t$. ■

Παράδειγμα 8 Να βρεθεί ο $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$, όπου $F(s)=\dfrac{1}{(s+2)^3(s+3)}$.

Λύση Το F(s) αναλύεται ως εξής: $F(s)=\dfrac{A}{(s+2)^3}+\dfrac{B}{(s+2)^2}+\dfrac{C}{(s+2)}+\dfrac{D}{s+3}$. Βρίσκεται ότι A=1, B=–1, C=1, D=–1, δηλαδή

$$F(s)=\frac{1}{(s+2)^3}-\frac{1}{(s+2)^2}+\frac{1}{s+2}-\frac{1}{s+3}.$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο (βλέπε Πρόβλημα 25)

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{(s+a)^{-n}\right\}=\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at},\quad n=1,2,3,\ldots,$$

έχουμε τελικά ότι $f(t)=\dfrac{t^2}{2!}e^{-2t}-t\,e^{-2t}+e^{-2t}-e^{-3t}$. ■

Παράδειγμα 9 Να υπολογισθεί ο $\mathcal{L}^{-1}\{(F(s)\}$, όπου $F(s)=\dfrac{3s-2}{s^3(s^2+4)}$.

Λύση Υποθέτουμε ότι $F(s)=\dfrac{A}{s}+\dfrac{B}{s^2}+\dfrac{C}{s^3}+\dfrac{Ds+E}{s^2+4}$. Έτσι προκύπτει $3s-2=As^2(s^2+4)+Bs(s^2+4)+C(s^2+4)+(Ds+E)s^2$. Υπολογίζεται ότι A=1/8, B=3/4, C=–1/2, D=–1/8, E=–3/4. Επομένως, έχουμε

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=\frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}+\frac{3}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}-\frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^3}\right\}$$

$$-\frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\}-\frac{3}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}=\frac{1}{8}+\frac{3}{4}t-\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{8}\cos 2t-\frac{3}{8}\sin 2t.$$

■

Θεώρημα 10 *Έστω $F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$, όπου η συνάρτηση $f(t)$ είναι τμηματικά συνεχής και εκθετικής τάξης s_0. Τότε* $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{d^n F}{ds^n}\right\}(t)=(-t)^n f(t)$.

Απόδειξη Η απόδειξη είναι άμεση απόρροια του Πορίσματος 15 της Ενότητας 7.3 και του Θεωρήματος Lerch. ◆

7.4 Προβλήματα

• Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace των ακόλουθων συναρτήσεων:

1. $\dfrac{2}{(s^2+3)^2}-\dfrac{4}{s^7}$ **2.** $\dfrac{1}{(s-3)(s+3)}-\dfrac{7s}{s^2+15}$ **3.** $\dfrac{s^2-2s+4}{s^6}$

4. $\dfrac{s+1}{(s-3)(s+3)}-\dfrac{1}{s}$ **5.** $\dfrac{s-5}{s^2+6}$ **6.** $\dfrac{-3}{(s+2)^3}+\dfrac{4s}{s^2+6}$

7. $\dfrac{4}{s^2+9} - \dfrac{1}{(s-3)^2}$ **8.** $\dfrac{4}{s^2-s-2}$ **9.** $\dfrac{s-3}{(s-2)^2+2(s-2)+1}$

10. $\dfrac{2s-3}{s^2+s-2}$ **11.** $\dfrac{2s-4}{(s-1)^4}$ **12.** $\dfrac{s-2}{s^2-4s+19}$

13. $\dfrac{s^2+1}{(s-1)(s^2+2)}$ **14.** $\dfrac{8s^3-3s+2}{s^4-3s^3-20s^2+84s-80}$ **15.** $\dfrac{2n\pi T}{T^2 s^2+(2n\pi)^2}$

16. $\dfrac{3}{4} s^{-5/2}$ **17.** $\dfrac{1}{(s^2+\omega^2)^2}$ **18.** $\dfrac{s^2}{(s^2+\omega^2)^2}$

19. $\operatorname{arc\,cot}(s+1)$ **20.** $\ln \dfrac{s}{s-1}$ **21.** $\ln \dfrac{s+a}{s+b}$

22. $\dfrac{s+3}{(s^2+4)^2}$ **23.** $\dfrac{2s+7}{(s+3)^4}$ **24.** $\dfrac{7s+12}{s^2+9}$

- Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

25. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s-r)^{n+1}}\right\} = \dfrac{1}{n!} t^n e^{rt}$, $n = 0, 1, 2, ..$

(*Υπόδ.* Να αποδειχθεί επαγωγικά ότι $\mathcal{L}\{t^n e^{rt}\} = n!\,(s-r)^{-1-n}$).

26. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{cs+d}{\left[(s-a)^2+b^2\right]^n}\right\} = e^{at}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{cs+ac+d}{(s^2+b^2)^n}\right\}$, για $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}$.

27. Να βρεθεί ο $\mathcal{L}\{f_i(t)\}$, $i = 1, 2, 3$, όπου

$$f_1(t) = \begin{cases} 0, & t = 2, \\ t, & t \neq 2, \end{cases} \qquad f_2(t) = \begin{cases} 3, & t = 2, \\ 8, & t = 1, \\ t, & t \neq 1, 2, \end{cases} \qquad f_3(t) = t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ποια από τις $f_i(t)$, $i=1, 2, 3$, είναι η συνάρτηση $\mathcal{L}^{-1}\{s^{-2}\}$;

28. Να βρεθεί ο $\mathcal{L}\{(f_i(t)\}$, $i = 1, 2, 3$, όπου

$$f_1(t) = \begin{cases} t^2, & t = 1, 2, 3, ..., \\ e^t, & t \neq 1, 2, 3, ..., \end{cases} \qquad f_2(t) = \begin{cases} e^t, & t \neq 1, 5, \\ 8, & t = 1, \\ 13, & t = 5, \end{cases} \qquad f_3(t) = e^t, \ t \in \mathbb{R}.$$

Ποια από τις $f_i(t)$, $i=1, 2, 3$, είναι η συνάρτηση $\mathcal{L}^{-1}\{(s-1)^{-1}\}$;

29. (*Υπολογισμός **Υπολοίπων***) Έστω $P(s) = \alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \ldots + \alpha_1 s + \alpha_0$, πραγματικό πολυώνυμο βαθμού n και $Q(s) = \beta_m s^m + \beta_{m-1} s^{m-1} + \ldots + \beta_1 s + \beta_0$, πραγματικό πολυώνυμο βαθμού m, όπου $m>n$. Υποθέτουμε ότι το $Q(s)$ έχει m διακριτές ρίζες $\{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$ και ότι $P(s_j) \neq 0$, για όλα τα $j = 1, 2, \ldots, m$. Τότε υπάρχουν σταθερές A_j έτσι ώστε

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \sum_{s=1}^{m} \frac{A_j}{s-s_j} .$$

Να δειχθεί ότι (i) $A_j = \lim_{s \to s_j} (s - s_j) \dfrac{P(s)}{Q(s)}$ και (ii) $A_j = \dfrac{P(s_j)}{Q'(s_j)}$.

• Με τη βοήθεια του Προβλήματος 29 να βρεθούν οι $\mathcal{L}^{-1}\{(F(s)\}$ των ακόλουθων συναρτήσεων:

30. $F(s) = \dfrac{3s+4}{s(s+1)(s-1)(s-3)}$ **31.** $F(s) = \dfrac{4-s^2}{(s+1)(s-2)(s-3)}$

32. $F(s) = \dfrac{s^2+3s+2}{s(s-1)(s+1)(s+3)}$ **33.** $F(s) = \dfrac{s^2-s+3}{s^3+6s^2+11s+6}$

34. $F(s) = \dfrac{s+2}{s^4+4s^3+4s^2-4s-5}$

35. (***Ανάπτυγμα Heaviside***)* Έστω $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{P(s)/Q(s)\}$ όπου P(s) και Q(s) είναι πολυώνυμα βαθμών n και m αντίστοιχα με n<m.

(i) Έστω ότι $Q(s) = (s - r_1)(s - r_2)\ldots(s - r_m)$, όπου r_j είναι m διακριτές πραγματικές ρίζες του Q(s). Να αποδειχθεί ότι

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{P(s)}{Q(s)}\right\} = \sum_{j=1}^{m} \frac{P(r_j)}{Q'(r_j)} e^{r_j t} = \sum_{j=1}^{m} \frac{P(r_j)}{q_j(r_j)} e^{r_j t},$$

όπου $q_j(s)$ είναι το γινόμενο όλων των παραγόντων του Q(s) εκτός του $s - r_j$.

(ii) Αν το r_j είναι ρίζα του Q(s) πολλαπλότητας k, τότε οι όροι του f(t), που αντιστοιχούν σ' αυτή είναι

$$\left[\frac{p^{(k-1)}(r_j)}{(k-1)!} + \frac{p^{(k-2)}(r_j)}{(k-2)!}\frac{t}{1!} + \ldots + \frac{p'(r_j)}{1!}\frac{t^{k-2}}{(k-2)!} + \frac{p(r_j)\,t^{k-1}}{(k-1)!}\right] e^{r_j t},$$

όπου p(s) είναι το πηλίκον του P(s) και όλων των παραγόντων του Q(s) εκτός του $(s-r_j)^k$.

(iii) Αν το Q(s) έχει ένα μη-επαναλαμβανόμενο μη-αναγώγιμο παράγοντα $(s + a)^2 + b^2$, τότε οι αντίστοιχοι όροι της συνάρτησης f(t) είναι

$$\frac{e^{-at}}{b}\left[p_i \cos bt + p_r \sin bt\right],$$

όπου p_r και p_i είναι αντίστοιχα το πραγματικό και φανταστικό μέρος του $p(-a + ib)$, όπου p(s) είναι το πηλίκον του P(s) και όλων των παραγόντων του Q(s) εκτός του $(s + a)^2 + b^2$.

(*Υπόδειξη* Για την απόδειξη παραπέμπουμε στο βιβλίο των C. R. Wylie and L.C. Barrett [WB], σελ. 434-438).

* *Ιστορική υποσημείωση:* Ο τύπος του αναπτύγματος Heaviside είχε διαδραματίσει σημαντικότατο ρόλο στη θεωρία του Oliver Heaviside κατά τη δεκαετία του 1890, για την επίλυση συνήθων διαφορικών εξισώσεων με τη χρήση του μετασχηματισμού Laplace.

- Κάνοντας χρήση του αναπτύγματος Heaviside να βρεθούν οι $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(F(s)\}$ των ακόλουθων συναρτήσεων:

36. $F(s) = \dfrac{3s^2 - 16s + 5}{(s+1)(s-3)(s-2)}$ **37.** $F(s) = \dfrac{s^2+2}{s(s+1)(s+2)}$ **38.** $F(s) = \dfrac{s}{(s+2)^2(s^2+2s+10)}$

39. $F(s) = \dfrac{s}{(s+2)^2(s^2+1)}$ **40.** $F(s) = \dfrac{1}{(s^2-s-6)^4}$

41. Έστω $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ και $c \in \mathcal{C}$. (i) Υποθέτουμε ότι $h'(t) = e^{ct} f(t)$, $h(0) = 0$ και $H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}$. Να δειχθεί ότι $H(s) = F(s-c)/_{s}$. (ii) Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $\int_0^t e^{-c(t-r)} f(r)\,dr = e^{-ct} h(t)$ έχει μετασχηματισμό Laplace $F(s)/(s+c)$.

42. Έστω $F(s) = \mathcal{L}\{(f(t)\}$. Με τη βοήθεια του Προβλήματος 41 να αποδειχθεί ότι για κάθε $a>0$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s+a}\right\} = \int_0^t e^{-a(t-r)} f(r)\,dr, \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s^2+a^2}\right\} = \frac{1}{a}\int_0^t \sin[a(t-r)]\, f(r)\,dr$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s\,F(s)}{s^2+a^2}\right\} = \int_0^t \cos[a(t-r)]\, f(r)\,dr\,.$$

43. Έστω $f(t)$ συνεχής στο $[0, \infty)$ και εκθετικής τάξης, καθώς to $t \to \infty$. Έστω επίσης ότι $F(s) = \mathcal{L}\{(f(t)\}$ με

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{s^{n+k+1}},$$

όπου $0 \le k < 1$ και η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα για $s > c$. Τότε

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n t^{n+k}}{\Gamma(n+k+1)}.$$

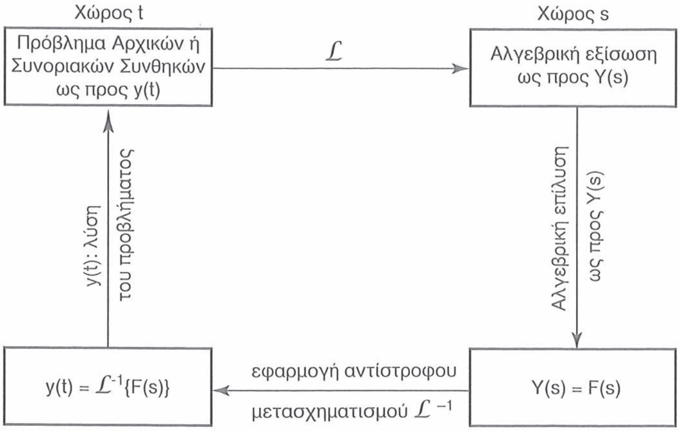
(*Υπόδειξη:* Παραπέμπουμε στο βιβλίο του R.V. Churchill [CH], Chapter 2).

- Εφαρμόζοντας το Πρόβλημα 43 να δειχθούν τα ακόλουθα:

44. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s}} e^{-1/s}\right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \cos 2\sqrt{t}$ **45.** $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} e^{-1/s}\right\} = J_0\{2\sqrt{t}\}$

7.5 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΙΣ ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Όπως έχει τονισθεί και στην εισαγωγή, με τη χρήση του μετασχηματισμού Laplace στην επίλυση προβλημάτων διαφορικών εξισώσεων ή συστημάτων επιτυγχάνεται αφενός η μετατροπή του προβλήματος σε αλγεβρικό και αφετέρου ο άμεσος προσδιορισμός της ειδικής λύσης του προβλήματος. Στο Σχήμα 1 απεικονίζεται η διαδικασία που ακολουθείται για την επίλυση ενός προβλήματος αρχικών ή συνοριακών συνθηκών διαφορικών εξισώσεων ή συστημάτων με τη χρήση του μετασχηματισμού Laplace.



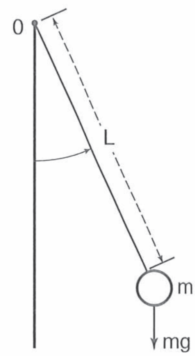
Σχήμα 1 *Εφαρμογή του Μετασχηματισμού Laplace*

Στη συνέχεια θα δοθούν χαρακτηριστικά παραδείγματα εφαρμογής του μετασχηματισμού Laplace στις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις και τα συστήματα.

Παράδειγμα 1 (*Ομογενής εξίσωση με Σταθερούς Συντελεστές*) Η εξίσωση που περιγράφει την κίνηση ενός μαθηματικού εκκρεμούς μάζας m και μήκους L, που περνά από τη θέση $\theta = \theta_0$ κατά το χρόνο t = 0 με γωνιακή ταχύτητα θ_1 (Σχήμα 2) δίδεται από τη σχέση

$$\theta'' + \frac{g}{L}\,\theta = 0\,,\ t>0,\ \theta(0) = \theta_0\,,\quad \theta'(0) = \theta_1\,,\quad (\alpha)$$

όπου εδώ έχει υποτεθεί ότι το θ(t) είναι μικρό. Ζητείται να βρεθεί η τιμή του θ(t) σε κάθε χρονική στιγμή t.



Σχήμα 2
Το εκκρεμές

Λύση Εφαρμόζουμε τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace. Θέτουμε $\Theta(s) = \mathcal{L}\{\theta(t)\}$, οπότε παίρνουμε

$$\mathcal{L}\left\{\theta'' + \frac{g}{L}\,\theta\right\} = \mathcal{L}\{\theta''\} + \frac{g}{L}\,\mathcal{L}\{\theta\} = s^2\,\Theta(s) - s\,\theta(0) - \theta'(0) + \frac{g}{L}\,\Theta(s) = 0\,.$$

Έτσι έχουμε

$$\left(s^2 + \frac{g}{L}\right)\Theta(s) = \theta_0\, s + \theta_1$$

ή

$$\Theta(s) = \frac{\theta_0\, s + \theta_1}{s^2 + \left(\sqrt{g/L}\right)^2} = \theta_0\,\frac{s}{s^2 + \left(\sqrt{g/L}\right)^2} + \theta_1\sqrt{\frac{L}{g}}\;\frac{\sqrt{g/L}}{s^2 + \left(\sqrt{g/L}\right)^2}\,.$$

Με τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace $\mathcal{L}^{-1}$ προκύπτει η λύση του (α)

$$\theta(t) = \mathcal{L}^{-1}\,\{\Theta(t)\} = \theta_0\cos\sqrt{\frac{g}{L}}\,t + \theta_1\sqrt{\frac{L}{g}}\,\sin\sqrt{\frac{g}{L}}\,t\,,\quad t>0\,.$$

```
In[1]:= eq = y''[t] + g / L y[t] == 0

Out[1]= g y[t]/L + y''[t] == 0

In[2]:= eqL = LaplaceTransform[eq, t, s]

Out[2]= g LaplaceTransform[y[t], t, s]/L + s^2 LaplaceTransform[y[t], t, s] - s y[0] - y'[0] == 0

In[3]:= sol = Solve[eqL, LaplaceTransform[y[t], t, s]]

Out[3]= {{LaplaceTransform[y[t], t, s] -> L (s y[0] + y'[0])/(g + L s^2)}}

In[4]:= yL[s_] = sol[[1, 1, 2]] /. y[0] -> y0 /. y'[0] -> y1

Out[4]= L (s y0 + y1)/(g + L s^2)

In[5]:= solution[t_] = InverseLaplaceTransform[yL[s], s, t]

Out[5]= (√g y0 Cos[√g t/√L] + √L y1 Sin[√g t/√L])/√g
```

Παράδειγμα 1 ■

Παράδειγμα 2 (Ανώτερης Τάξης) Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\left(D^2+4\right)\left(D^2-2D+1\right)y=0\,,\quad t>0,\quad y(0)=y'(0)=0\,,\quad y''(0)=1\,,\quad y'''(0)=3\,. \qquad (\alpha)$$

Λύση Η εξίσωση γράφεται $\left(D^4-2\,D^3+5\,D^2-8D+4\right)y=0$. Επομένως, έχουμε $\left(s^4\,Y-s-3\right)-2\left(s^3\,Y-1\right)+5\,s^2\,Y-8s\,Y+4Y=0$, όπου $Y(s)=\mathcal{L}\{y(t)\}$. Έτσι ισχύει $\left(s^4-2\,s^3+5\,s^2-8\,s+4\right)Y(s)=s+1$ ή

$$Y(s)=\frac{s+1}{s^4-2\,s^3+5\,s^2-8\,s+4}=\frac{s+1}{\left(s^2+4\right)(s-1)^2}$$
$$=\frac{A}{(s-1)^2}+\frac{B}{s-1}+\frac{Cs+D}{s^2+4} \qquad (\beta)$$

Όπως θα δούμε στη συνέχεια, βρίσκουμε ότι A = 2/5, B = 1/25, C = –(1/25), D = – (11/25). Επομένως,

$$Y(s)=\frac{2}{5}\,\frac{1}{(s-1)^2}+\frac{1}{25}\,\frac{1}{s-1}-\frac{1}{25}\,\frac{s+11}{s^2+4}\,.$$

Άρα η λύση του προβλήματος (α) είναι

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{Y(s)\right\}=\frac{2}{5}\,t\,e^t+\frac{1}{25}\,e^t-\frac{1}{25}\cos 2t-\frac{11}{50}\sin 2t\,.$$

Τώρα για την εύρεση των A, B, C, D ακολουθούμε την εξής διαδικασία: Από την εξίσωση (β) παίρνουμε

$$s+1=A\left(s^2+4\right)+B(s-1)\left(s^2+4\right)+(Cs+D)(s-1)^2\,.$$

Θέτοντας s=1 προκύπτει το A=2/5. Στη συνέχεια υπολογίζουμε το

$$Y(s)-\frac{2}{5}\frac{1}{(s-1)^2}=\frac{s+1}{(s-1)^2\left(s^2+4\right)}-\frac{2}{5}\frac{1}{(s-1)^2}=\frac{3-2s}{5(s-1)\left(s^2+4\right)}.$$

Έτσι θα ισχύει $\dfrac{3-2s}{5(s-1)\left(s^2+4\right)}=\dfrac{B}{s-1}+\dfrac{Cs+D}{s^2+4}$, δηλαδή $3-2s=5\,B\,(s^2+4)+5\,(Cs+D)\,(s-1)$. Θέτοντας πάλι $s=1$, έχουμε $3-2=5\,B\,(5)$ ή $B=\frac{1}{25}$. Υπολογίζουμε τώρα την παράσταση

$$\frac{3-2s}{5(s-1)\left(s^2+4\right)}-\frac{1}{25}\frac{1}{s-1}=\frac{5(3-2s)-\left(s^2+4\right)}{25(s-1)\left(s^2+4\right)}=\frac{-s^2-10s+11}{25(s-1)\left(s^2+4\right)}.$$

Έτσι θα έχουμε

$$\frac{-s^2-10s+11}{25(s-1)\left(s^2+4\right)}=\frac{Cs+D}{s^2+4},$$

δηλαδή

$$-s^2-10s+11=25\,C\,s^2+25(D-C)\,s-25D\,.$$

Άρα πράγματι έχουμε ότι $C=-\dfrac{1}{25}$ και $D=-\dfrac{11}{25}$.

```
In[6]:= eq = y''''[t] - 2 y'''[t] + 5 y''[t] - 8 y'[t] + 4 y[t] == 0
Out[6]= 4 y[t] - 8 y'[t] + 5 y''[t] - 2 y^(3)[t] + y^(4)[t] == 0

In[7]:= eqL = LaplaceTransform[eq, t, s]
Out[7]= 4 LaplaceTransform[y[t], t, s] + s^4 LaplaceTransform[y[t], t, s] -
        8 (s LaplaceTransform[y[t], t, s] - y[0]) - s^3 y[0] + 5 (s^2 LaplaceTransform[y[t], t, s] - s y[0] - y'[0]) -
        s^2 y'[0] - 2 (s^3 LaplaceTransform[y[t], t, s] - s^2 y[0] - s y'[0] - y''[0]) - s y''[0] - y^(3)[0] == 0

In[8]:= sol = Solve[eqL, LaplaceTransform[y[t], t, s]]
Out[8]= {{LaplaceTransform[y[t], t, s] ->
          (-8 y[0] + 5 s y[0] - 2 s^2 y[0] + s^3 y[0] + 5 y'[0] - 2 s y'[0] + s^2 y'[0] - 2 y''[0] + s y''[0] + y^(3)[0])
          / ((-1 + s)^2 (4 + s^2))}}

In[9]:= yL[s_] = sol[[1, 1, 2]] /. y[0] -> 0 /. y'[0] -> 0 /. y''[0] -> 1 /. y'''[0] -> 3
Out[9]= (1 + s) / ((-1 + s)^2 (4 + s^2))

In[10]:= solution[t_] = InverseLaplaceTransform[yL[s], s, t]
Out[10]= 1/50 (2 e^t + 20 e^t t - 2 Cos[2 t] - 11 Sin[2 t])
```

Παράδειγμα 2

■

Παράδειγμα 3 (Μη Ομογενής) Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών του ελατηρίου χωρίς απόσβεση, με εξωτερική περιοδική επίδραση

$$y''(t)+\beta^2\,y(t)=A\sin\omega t\,,\qquad t>0,\qquad y(0)=v_0\,,\qquad y'(0)=v_1\,. \qquad (\alpha)$$

Λύση Έστω $L\{y(t)\}=Y(s)$. Τότε από το πρόβλημα (α) προκύπτει

$$s^2\,Y(s)-s\,v_0-v_1+\beta^2\,Y(s)=\frac{A\omega}{s^2+\omega^2}\ \text{ ή }\ Y(s)=\frac{s\,v_0+v_1}{s^2+\beta^2}+\frac{A\omega}{\left(s^2+\beta^2\right)\left(s^2+\omega^2\right)}. \qquad (\beta)$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(i) **ω ≠ β** (*Μη Συντονισμός*). Τότε η εξίσωση (β) γίνεται

$$Y(s) = \frac{s\,v_0 + v_1}{s^2+\beta^2} + \frac{A\omega}{\omega^2-\beta^2}\left(\frac{1}{s^2+\beta^2} - \frac{1}{s^2+\omega^2}\right).$$

Κάνοντας χρήση του $\mathcal{L}^{-1}$ προκύπτει ότι η λύση του προβλήματος (α) είναι

$$y(t) = v_0 \cos\beta t + v_1\,\beta^{-1}\sin\beta t + \frac{A\omega}{\beta\left(\omega^2-\beta^2\right)}\sin\beta t - \frac{A}{\omega^2-\beta^2}\sin\omega t$$

Εδώ θα πρέπει να σημειωθεί ότι η λύση y(t) είναι *φραγμένη* και οι δύο τελευταίοι όροι προέρχονται από την εξωτερική επίδραση.

(ii) **ω = β** (*Συντονισμός*). Εφαρμόζουμε τον $\mathcal{L}$ στο πρόβλημα (α), οπότε έχουμε

$$Y(s) = \frac{s\,v_0 + v_1}{s^2+\beta^2} + \frac{A\beta}{\left(s^2+\beta^2\right)^2}. \tag{γ}$$

Για τον υπολογισμό του $\mathcal{L}^{-1}\left\{\left(s^2+\beta^2\right)^{-2}\right\}$ παρατηρούμε ότι, αν στη σχέση

$$\frac{s}{s^2+\beta^2} = \mathcal{L}\{\cos\beta t\},$$

εφαρμόσουμε τα Θεωρήματα 4 και 14 της Ενότητας 7.3, προκύπτει

$$\frac{\beta^2-s^2}{\left(s^2+\beta^2\right)^2} = \mathcal{L}\{-t\cos\beta t\}. \tag{δ}$$

Προσθέτουμε στα δύο μέλη της εξίσωσης (δ) τις συναρτήσεις

$$\frac{1}{s^2+\beta^2} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{\beta}\sin\beta t\right\},$$

οπότε παίρνουμε ότι

$$\frac{s^2+\beta^2+\beta^2-s^2}{\left(s^2+\beta^2\right)^2} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{\beta}\sin\beta t - t\cos\beta t\right\}.$$

Έτσι έχουμε

$$\frac{1}{\left(s^2+\beta^2\right)^2} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2\,\beta^3}(\sin\beta t - \beta t\cos\beta t)\right\} \text{ ή } \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s^2+\beta^2\right)^2}\right\} = \frac{1}{2\,\beta^3}(\sin\beta t - \beta t\cos\beta t).$$

Τέλος, εφαρμόζοντας τον $\mathcal{L}^{-1}$ στην εξίσωση (γ), έχουμε τη λύση του προβλήματος (α) $y(t) = v_0\cos\beta t + \frac{v_1}{\beta}\sin\beta t + \frac{A}{2\,\beta^2}(\sin\beta t - \beta t\cos\beta t)$. Παρατηρούμε ότι το $\lim_{t\to\infty} y(t)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, δηλαδή η λύση του προβλήματος (α) είναι *μη φραγμένη* όταν $\omega = \beta$. Αυτό είναι το ***φαινόμενο του συντονισμού.*** ■

Παράδειγμα 4 *(Μη Σταθεροί Συντελεστές - Ελλειπείς Συνθήκες)* Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$ty'' + (4t-2)\,y' - 4y = 0\,, \quad t>0, \quad y(0)=1\,. \qquad (\alpha)$$

Λύση Θέτουμε $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$, οπότε από το Πόρισμα 15, Ενότητα 7.3 προκύπτει

$$\left(s^2+4s\right)Y'(s) + (4s+8)\,Y(s) = 3 \quad \text{ή} \quad Y'(s) + \frac{4s+8}{s\,(s+4)}\,Y(s) = \frac{3}{s\,(s+4)}\,. \qquad (\beta)$$

Η εξίσωση (β) είναι γραμμική πρώτης τάξης και επιλυόμενη δίδει

$$Y(s) = \frac{s}{(s+4)^2} + \frac{6}{(s+4)^2} + \frac{c}{s^2\,(s+4)^2}\,. \qquad (\gamma)$$

Εφαρμόζουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace στη (γ), οπότε προκύπτει

$$y(t) = e^{-4t} + 2t\,e^{-4t} + c\left[-\frac{1}{32} + \frac{1}{16}\,t + \frac{1}{16}\,t\,e^{-4t} + \frac{1}{32}\,e^{-4t}\right],$$

με μια αυθαίρετη σταθερά c, όπως άλλωστε αναμένεται αφού απουσιάζει μια από τις αρχικές συνθήκες. ■

Παράδειγμα 5 (*Μη Σταθεροί Συντελεστές*) Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace της *συνάρτησης Bessel πρώτου είδους και μηδενικής τάξης* $J_0(t)$.

Λύση Η συνάρτηση $y(t) = J_0(t)$ αποτελεί (βλέπε Ενότητα 5.5Β) λύση της

$$ty'' + y' + ty = 0\,, \quad y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 0\,. \qquad (\alpha)$$

Ο μετασχηματισμός Laplace (βλέπε Πόρισμα 15 Ενότητα 7.3) του προβλήματος (α) δίδει

$$-\frac{d}{ds}\left(s^2\,Y - s - 0\right) + (s\,Y - 1) - \frac{d}{ds}\,Y(s) = 0\,,$$

όπου $Y(s) = \mathcal{L}\{J_0(t)\}$. Επομένως, έχουμε

$$-2s\,Y - s^2\,\frac{dY}{ds} + 1 + s\,Y - 1 - \frac{dY}{ds} = 0 \qquad \text{ή} \qquad \left(s^2+1\right)\frac{dY}{ds} + sY = 0\,.$$

Λύνοντας την εξίσωση αυτή με χωρισμό μεταβλητών, βρίσκουμε ότι

$$Y(s) = \frac{k}{\sqrt{s^2+1}}\,, \qquad \text{όπου k σταθερά.}$$

Για τον υπολογισμό του k έχουμε

$$J_0(0) = \lim_{s\to\infty} s\,Y(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{sk}{\sqrt{s^2+1}} = k\,.$$

Επειδή δε $J_0(0) = 1$, έπεται ότι

$$Y(s) = \mathcal{L}\{J_0(t)\} = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}} \quad \text{ή αντίστροφα} \quad J_0(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}\right\}. \;■$$

Παρατήρηση 6 Εδώ παρατηρούμε ότι η επίλυση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με μεταβλητούς συντελεστές οδηγεί στην επίλυση μιας καινούριας διαφορικής εξίσωσης, κάτι που γενικά δεν είναι δυνατόν πάντα. Για παράδειγμα, θεωρούμε το πρόβλημα

$$y'' + ty' + t^3 y = 0\,, \quad y(0) = a_0\,, \quad y'(0) = a_1\,.$$

Ο μετασχηματισμός Laplace αυτού μας οδηγεί στο πρόβλημα

$$\left(s^2 Y - sa_0 - a_1\right) - \frac{d}{ds}\left(sY - a_0\right) - \frac{d^3 Y}{d s^3} = 0 \text{ ή } \frac{d^3 Y}{d s^3} + s\frac{dY}{ds} + \left(1 - s^2\right) Y = -a_1 - sa_0,$$

το οποίο είναι πιο δύσκολο να επιλυθεί απ' ότι το αρχικό. Για την επίλυση δε αμφοτέρων, θα πρέπει να γίνει χρήση της *Θεωρίας Σειρών* (βλέπε Κεφάλαιο 5).

Παράδειγμα 7 (*Πρόβλημα Συνοριακών Συνθηκών*) Να λυθεί το πρόβλημα συνοριακών συνθηκών*

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = t\,, \quad 0 < t < 1\,, \quad y(0) = -3\,, \quad y(1) = -1\,. \qquad (\alpha)$$

```
In[1]:= eq = y''[t] + 2 y'[t] + y[t] == t
Out[1]= y[t] + 2 y'[t] + y''[t] == t

In[2]:= eqL = LaplaceTransform[eq, t, s]
Out[2]= LaplaceTransform[y[t], t, s] + s^2 LaplaceTransform[y[t], t, s] +
          2 (s LaplaceTransform[y[t], t, s] - y[0]) - s y[0] - y'[0] == 1/s^2

In[3]:= sol = Solve[eqL, LaplaceTransform[y[t], t, s]]
Out[3]= {{LaplaceTransform[y[t], t, s] -> (1 + 2 s^2 y[0] + s^3 y[0] + s^2 y'[0])/(s^2 (1 + s)^2)}}

In[4]:= yL[s_] = sol[[1, 1, 2]] /. y[0] -> y0 /. y'[0] -> y1
Out[4]= (1 + 2 s^2 y0 + s^3 y0 + s^2 y1)/(s^2 (1 + s)^2)

In[5]:= solution[t_] = InverseLaplaceTransform[yL[s], s, t]
Out[5]= -2 - t + e^-t (2 + y0) + e^-t t (1 + y0 + y1)

In[6]:= Solve[{solution[0] == -3, solution[1] == -1}, {y0, y1}]
Out[6]= {{y1 -> 3, y0 -> -3}}

In[7]:= solution[t] /. y0 -> -3 /. y1 -> 3
Out[7]= -2 - e^-t + t + e^-t t
```

Παράδειγμα 7

---

* Τα προβλήματα συνοριακών συνθηκών μελετώνται αναλυτικά στο Κεφάλαιο 10.

Λύση Έστω $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$. Θεωρούμε τη *βοηθητική αρχική συνθήκη* $y'(0) = a$ και εφαρμόζουμε τον $\mathcal{L}$ στο πρόβλημα (α), οπότε έχουμε

$$s^2 Y(s) - s(-3) - a + 2(s Y(s) - (-3)) + Y(s) = s^{-2}$$

ή

$$Y(s) = \frac{-3(s+1) + a - 3}{(s+1)^2} + \frac{1}{s^2 (s+1)^2} = \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{a-2}{(s+1)^2}.$$

Η εφαρμογή του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace $\mathcal{L}^{-1}$ στην τελευταία, δίδει $y(t) = t - 2 - e^{-t} + (a-2)t\,e^{-t}$. Για τον προσδιορισμό του a χρησιμοποιούμε τη συνοριακή συνθήκη $y(1) = -1$, οπότε προκύπτει $-1 = 1 - 2 - e^{-1} + (a-2)e^{-1}$, δηλαδή $a = 3$. Έτσι, η λύση του προβλήματος (α) είναι $y(t) = t - 2 - e^{-t} + t\,e^{-t}$. ■

Παράδειγμα 8 (*Πρόβλημα Συνοριακών Συνθηκών*) Να λυθεί το ακόλουθο πρόβλημα συνοριακών συνθηκών

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 0, \quad 0 < t < 1, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 2. \qquad (\alpha)$$

Λύση Έστω $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$. Εισάγουμε τη βοηθητική αρχική συνθήκη $y'(0) = a$ και εφαρμόζουμε τον $\mathcal{L}$ στο πρόβλημα (α), οπότε προκύπτει

$$\{s^2 Y(s) - s\,y(0) - a\} + 2\{s\,Y(s) - y(0)\} + Y(s) = 0.$$

Επιλύοντας ως προς Y(s), παίρνουμε $Y(s) = \frac{a}{(s+1)^2}$. Επομένως, η εφαρμογή του $\mathcal{L}^{-1}$ μας δίδει τη λύση του (α) ως συνάρτηση του a, που είναι $y(t) = a\,t\,e^{-t}$. Επειδή δε $y(1) = a\,e^{-1} = 2$ ή $a = 2e$, έχουμε τελικά τη λύση του προβλήματος (α), που είναι $y(t) = 2\,e\,t\,e^{-t} = 2t\,e^{1-t}$. ■

Παρατήρηση 9 Στα παραπάνω Παραδείγματα 7 και 8 θεωρούμε ότι το Πρόβλημα ορίζεται για $t \in [0, +\infty]$ αλλά συγχρόνως ικανοποιεί τις συνοδεύουσες «συνοριακές συνθήκες».

Παράδειγμα 10 (*Μετατοπισμένες Αρχικές Συνθήκες*) Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών συνθηκών

$$y'' + 4y = 1, \quad t > 0, \quad y(2) = 0, \quad y'(2) = 3. \qquad (\alpha)$$

Λύση Θέτουμε $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$ και εισάγουμε τις βοηθητικές αρχικές συνθήκες $y(0) = a$ και $y'(0) = b$, οπότε προκύπτει $s^2 Y(s) - sa - b + 4\,Y(s) = s^{-1}$. Λύνοντας ως προς Y(s) παίρνουμε

$$Y(s) = \frac{1}{s(s^2+4)} + \frac{as+b}{s^2+4} = \frac{1}{4}\frac{1}{s} - \frac{1}{4}\frac{s}{s^2+4} + \frac{as}{s^2+4} - \frac{b}{s^2+4}.$$

Εφαρμόζουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό $\mathcal{L}^{-1}$ και έχουμε

$$y(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos(2t) + a\cos(2t) - \frac{b}{2}\sin(2t).$$

Για να βρούμε τα a, b διαμορφώνουμε το σύστημα

$$y(2) = 0 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos 4 + a\cos 4 - \frac{b}{2}\sin 4,\ \ y'(2) = 3 = \frac{1}{2}\sin 4 - 2\,a\sin 4 - b\cos 4\,.$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα βρίσκουμε $a = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos 4 - \frac{3}{2}\sin 4 \approx 1.5486$ και $b = 3\cos 4 - \frac{1}{2}\sin 4 \approx -1.5825$. Άρα η λύση του προβλήματος (α) είναι

$$y(t) \approx 0.25 + 1.2986\cos(2t) - 0.7913\sin 2(t)\,.$$

```
In[16]:= eq = y''[t] + 4 y[t] == 1
Out[16]= 4 y[t] + y''[t] == 1

In[17]:= eqL = LaplaceTransform[eq, t, s]
Out[17]= 4 LaplaceTransform[y[t], t, s] + s^2 LaplaceTransform[y[t], t, s] - s y[0] - y'[0] == 1/s

In[18]:= sol = Solve[eqL, LaplaceTransform[y[t], t, s]]
Out[18]= {{LaplaceTransform[y[t], t, s] -> (1 + s^2 y[0] + s y'[0])/(s (4 + s^2))}}

In[19]:= yL[s_] = sol[[1, 1, 2]] /. y[0] -> y0 /. y'[0] -> y1
Out[19]= (1 + s^2 y0 + s y1)/(s (4 + s^2))

In[20]:= solution[t_] = InverseLaplaceTransform[yL[s], s, t]
Out[20]= 1/4 (1 - Cos[2 t] + 4 y0 Cos[2 t] + 2 y1 Sin[2 t])

In[21]:= Solve[{solution[2] == 0, solution'[2] == 3}, {y0, y1}]
Out[21]= {{y0 -> -(Cos[4] - Cos[4]^2 + 6 Sin[4] - Sin[4]^2)/(4 (Cos[4]^2 + Sin[4]^2)), y1 -> -(-6 Cos[4] + Sin[4])/(2 (Cos[4]^2 + Sin[4]^2))}}

In[22]:= solution[t] /. y0 -> %[[1, 1, 2]] /. y1 -> %[[1, 2, 2]]
Out[22]= 1/4 (1 - Cos[2 t] - (Cos[2 t] (Cos[4] - Cos[4]^2 + 6 Sin[4] - Sin[4]^2))/(Cos[4]^2 + Sin[4]^2) - ((-6 Cos[4] + Sin[4]) Sin[2 t])/(Cos[4]^2 + Sin[4]^2))

In[23]:= FullSimplify[%]
Out[23]= 1/4 (1 - Cos[4 - 2 t] - 6 Sin[4 - 2 t])
```

Παράδειγμα 10 ■

Παράδειγμα 11 (*Γραμμικά Συστήματα*) Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{aligned} &x'(t) - 2y(t) = 4t\,, && t > 0, && x(0) = 4\,,\\ &y'(t) + 2y(t) - 4x(t) = -4t - 2\,, && t > 0, && y(0) = -5\,. \end{aligned} \qquad (\alpha)$$

Λύση Έστω $X(s) = \mathcal{L}(x(t))$, $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$. Τότε ο μετασχηματισμός Laplace του προβλήματος (α) δίδει το σύστημα

$$s\,X(s) - 2\,Y(s) = \frac{4\,s^2 + 4}{s^2},\quad -4\,X(s) + (s+2)\,Y(s) = -\frac{5\,s^2 + 2s + 4}{s^2}\,. \qquad (\beta)$$

Απαλείφουμε το Y(s) από τις δύο εξισώσεις του συστήματος (β), οπότε προκύπτει

$$X(s) = \frac{4s-2}{(s+4)(s-2)} \quad \text{ή} \quad X(s) = \frac{3}{s+4} + \frac{1}{s-2}\,. \tag{γ}$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{L}^{-1}$ εφαρμοζόμενος στη (γ) δίδει

$$x(t) = 3\,e^{-4t} + e^{2t} \tag{δ}$$

Για την εύρεση του y(t), μπορούμε να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό του Y(s), αφού αντικαταστήσουμε τη (γ) σε μια εκ των εξισώσεων (β). Όμως είναι απλούστερο να αντικαταστήσουμε τη $x'(t)$ στην πρώτη των εξισώσεων (α) και να λύσουμε ως προς y(t) την εξίσωση που προκύπτει. Πράγματι, έχουμε

$$y(t) = \frac{1}{2}x'(t) - 2t = -6\,e^{-4t} + e^{2t} - 2t\,. \tag{ε}$$

Οι συναρτήσεις (δ) και (ε) αποτελούν τη (μοναδική) λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (α). ■

Παράδειγμα 12 (*Γραμμικά Συστήματα*) Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών συνθηκών

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ όπου } x = (x_1(t),\ x_2(t))^T. \tag{α}$$

Λύση Θέτουμε $\mathcal{L}\{x(t)\} = Z(s)$ και εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό Laplace $\mathcal{L}$ στο πρόβλημα (α), οπότε προκύπτει

$$s\,Z(s) - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} Z(s) + \frac{1}{s-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ή $$(s-1)X_1(s) - 4X_2(s) = 2 + \frac{1}{s-1}, \quad -X_1(s) + (s-1)X_2(s) = 1 + \frac{1}{s-1}, \tag{β}$$

όπου $Z(s) = \left(X_1(s), X_2(s)\right)^T$. Λύνοντας το σύστημα (β) προκύπτει

$$X_1(s) = \frac{2}{s-3} + \frac{1}{s^2-1} \quad \text{και} \quad X_2(s) = \frac{1}{s-3} + \frac{s}{(s-1)(s+1)(s-3)}\,.$$

Η ανάλυση σε απλά κλάσματα δίδει

$$X_1(s) = \frac{2}{s-3} + \frac{1}{2}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{s+1} \quad \text{και} \quad X_2(s) = -\frac{1}{4}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{8}\frac{1}{s+1} + \frac{3}{8}\frac{1}{s-3}\,. \tag{γ}$$

Εφαρμόζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό $\mathcal{L}^{-1}$ στις σχέσεις (γ) προκύπτει η λύση του προβλήματος (α), που είναι

$$x_1(t) = 2\,e^{3t} + \frac{e^t - e^{-t}}{2}, \quad x_2(t) = -\frac{1}{8}e^{-t} - \frac{1}{4}e^t + \frac{11}{8}e^{3t}\,.$$

```
In[1]:= eq = {x'[t] == x[t] + 4 y[t] + Exp[t], y'[t] == x[t] + y[t] + Exp[t]}
```

Out[1]= $\{x'[t] = e^t + x[t] + 4\,y[t],\ y'[t] = e^t + x[t] + y[t]\}$

```
In[2]:= eqL = LaplaceTransform[eq, t, s]
```

Out[2]= $\Big\{s\,\text{LaplaceTransform}[x[t], t, s] - x[0] = \frac{1}{-1+s} + \text{LaplaceTransform}[x[t], t, s] + 4\,\text{LaplaceTransform}[y[t], t, s],$
$s\,\text{LaplaceTransform}[y[t], t, s] - y[0] = \frac{1}{-1+s} + \text{LaplaceTransform}[x[t], t, s] + \text{LaplaceTransform}[y[t], t, s]\Big\}$

```
In[3]:= sol = Solve[eqL, {LaplaceTransform[y[t], t, s], LaplaceTransform[x[t], t, s]}]
```

Out[3]= $\Big\{\Big\{\text{LaplaceTransform}[y[t], t, s] \to -\frac{-s + x[0] - s\,x[0] - y[0] + 2\,s\,y[0] - s^2\,y[0]}{(-1+s)\,(-3-2\,s+s^2)},$
$\text{LaplaceTransform}[x[t], t, s] \to -\frac{-3 - s - x[0] + 2\,s\,x[0] - s^2\,x[0] + 4\,y[0] - 4\,s\,y[0]}{(-1+s)\,(-3-2\,s+s^2)}\Big\}\Big\}$

```
In[4]:= yL[s_] = sol[[1, 1, 2]] /. y[0] → y0 /. x[0] → x0
```

Out[4]= $-\frac{-s + x0 - s\,x0 - y0 + 2\,s\,y0 - s^2\,y0}{(-1+s)\,(-3-2\,s+s^2)}$

```
In[5]:= xL[s_] = sol[[1, 2, 2]] /. y[0] → y0 /. x[0] → x0
```

Out[5]= $-\frac{-3 - s - x0 + 2\,s\,x0 - s^2\,x0 + 4\,y0 - 4\,s\,y0}{(-1+s)\,(-3-2\,s+s^2)}$

```
In[6]:= solutionx[t_] = InverseLaplaceTransform[xL[s], s, t] /. x0 → 2 /. y0 → 1
```

Out[6]= $\frac{e^{-t}}{4} - e^t + \frac{11\,e^{3t}}{4}$

```
In[7]:= solutiony[t_] = InverseLaplaceTransform[yL[s], s, t] /. x0 → 2 /. y0 → 1
```

Out[7]= $-\frac{e^{-t}}{8} - \frac{e^t}{4} + \frac{11\,e^{3t}}{8}$

Παράδειγμα 12 ■

7.5 Προβλήματα

• Με τη χρήση του μετασχηματισμού Laplace να λυθούν τα ακόλουθα προβλήματα αρχικών τιμών (όλα τα προβλήματα θεωρούμε ότι ορίζονται για t>0).

1. $N'' + N' + 12N = t\,,\quad N(0) = 0\,,\quad N'(0) = 0$

2. $y'' - 4y' - 21y = 3t\,,\quad y(0) = 0\,,\quad y'(0) = -1$

3. $y''' - y = e^{-2t}\,,\quad y(0) = 1\,,\quad y'(0) = y''(0) = 0$

4. $x'' + x' + 4x = 0\,,\quad x(0) = 1\,,\quad x'(0) = -1$

5. $y'' - 2y' - y = 0\,,\quad y(0) = -1\,,\quad y'(0) = 0$

6. $y'' - 2y' - 8y = \cos t\,,\quad y(0) = 1\,,\quad y'(0) = 0$

7. $y'' + y = \sin t\,,\quad y(0) = y'(0) = 0$

(*Υπόδ.* Επειδή $\mathcal{L}\{-t\cos t\} = \frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) = \frac{2}{(s^2+1)^2} - \frac{1}{s^2+1}$, τότε

$(s^2+1)^{-2} = \mathcal{L}\left\{-\frac{t}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t\right\}$

8. $R'' + R = e^{-t} \sin h\, 2t\,, \quad R(0) = 0\,, \quad R'(0) = 1$

9. $y'' + 3y' + 2y = \sin 3t\,, \quad y(0) = 2\,, \quad y'(0) = 0$

10. $y'' - 4y = e^{-t} \cos t\,, \quad y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 0$

11. $y'' - y' - 2y = 18\, e^{-t} \sin 3t, \quad y(0) = 0\,,\ y'(0) = 3$

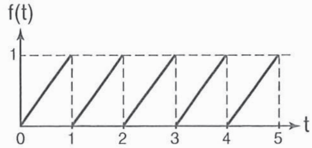
12. $y'' + 7y' + 10y = 4t\, e^{-3t}, \quad y(0) = 0\,,\ y'(0) = -1$

13. $y''' - 5y' + 7y' - 3y = 20 \sin t, \quad y(0) = y'(0) = 0\,,\ y''(0) = -2$

14. $y'' - 2y' + 2y = \sin t, \quad y(0) = y'(0) = 0\,,\ y''(0) = -2$

15. $\left.\begin{array}{l} y'' + 4y' = f(t)\,, \\ y(0) = y'(0) = 0\,, \end{array}\right\}$ όπου f(t) είναι η ***οδοντωτή κυματική συνάρτηση*** περιόδου T = 1 του Σχήματος 3 και ισχύει

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{a\, s^2} - \frac{e^{-as}}{s(1 - e^{-as})}\,.$$



Σχήμα 3 Οδοντωτή Κυματική συνάρτηση

• Με τη χρήση του μετασχηματισμού Laplace να λυθούν τα ακόλουθα συστήματα αρχικών συνθηκών (όλα τα προβλήματα θεωρούμε ότι ορίζονται για το t>0).

16. $\begin{array}{lll} y''_1 = y_1 + 3y_2\,, & y_1(0) = 2\,, & y'_1(0) = 3 \\ y''_2 = 4y_1 - 4\, e^t\,, & y_2(0) = 1\,, & y'_2(0) = 2 \end{array}$

17. $\begin{array}{ll} y'_1 + y'_2 = 2 \sin h\, t\,, & y_1(0) = 1\,, \\ y'_2 + y'_3 = e^t\,, & y_2(0) = 1\,, \\ y'_3 + y'_1 = 2\, e^t + e^{-t}\,, & y_3(0) = 0\,, \end{array}$

18. $\begin{array}{ll} 2\,x' + y' - x - y = e^{-t}\,, & x(0) = 2\,, \\ x' + y' + 2x + y = e^t\,, & y(0) = 1\,, \end{array}$

19. $\begin{array}{ll} 2\,x' + 4y' + x - y = 3\, e^t\,, & x(0) = 1\,, \\ x' + y' + 2x + 2y = e^t\,, & y(0) = 0\,, \end{array}$

20. $\begin{array}{ll} x' + y = 3\, e^{2t}\,, & x(0) = 2\,, \\ y' + x = 0\,, & y(0) = 0\,, \end{array}$

21. $\begin{array}{ll} 3x' - y = 2t\,, & x(0) = 0\,, \\ x' + y' - y = 0\,, & y(0) = 0\,, \end{array}$

22. $\begin{array}{ll} x' + y' + x = 0\,, & x(0) = 0\,, \\ x' + 2y' = 1\,, & y(0) = 0\,, \end{array}$

23. $\begin{array}{ll} x' + 2y' - x = 0, & x(0) = -1\,, \\ 4x' + 3y' + y = -6\,, & y(0) = 1\,, \end{array}$

24. $\begin{array}{ll} x'' - 2x' + 3y' + 2y = 4\,, & x(0) = x'(0) = 0\,, \\ 2y' - x' + 3y = 0\,, & y(0) = 0\,, \end{array}$

25. $\begin{array}{l} x' - 2y' + x - y = 1\,, \\ 3x' + 4y' - 3x = t\,, \\ x(0) = y(0) = 0\,, \end{array}$

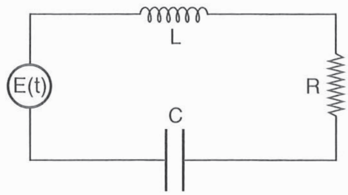
26. $x' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} x\,, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

27. $x' = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^t\,, \quad x(0) = (0\ \ 0\ \ 0)^T$

28. $x' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} x\,,\ x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **29.** $x' = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 4\,e^t \cos t \\ 0 \end{pmatrix},\ x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

30. Αν η f(t) είναι εκθετικής τάξης, να αποδειχθεί ότι κάθε λύση της εξίσωσης L[y] = f(t), όπου L είναι ο διαφορικός τελεστής με σταθερούς συντελεστές, είναι επίσης εκθετικής τάξης.

31. Το φορτίο στον πυκνωτή του κυκλώματος L–R–C στο Σχήμα 4, δίδεται από την εξίσωση $L\,\dfrac{d^2q}{d\,t^2} + R\,\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{1}{C}\,q = E\,(t)$. Με χρήση του μετασχηματισμού Laplace να βρεθεί το φορτίο q(t), όταν L = 1 henry, R = 20 ohms, C = 0.01 farad, E(t) = 120 sin (10t) volts, q(0) = 0, i(0) = 0. Ποιο είναι το στάσιμο ρεύμα;

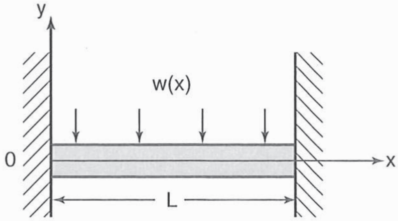


Σχήμα 4 *Ένα κύκλωμα L–R–C*

32. Θεωρούμε συσσωρευτή σταθερού δυναμικού E_0, που φορτίζει τον πυκνωτή του Σχήματος 5. Αν θέσουμε $\lambda = R/2L$ και $\omega^2 = 1/LC$, τότε η εξίσωση του Προβλήματος 31 γίνεται $\dfrac{d^2\,q}{d\,t^2} + 2\lambda\,\dfrac{dq}{dt} + \omega^2\,q = \dfrac{E_0}{L}$. Με χρήση μετασχηματισμού Laplace να δειχθεί ότι η λύση της εξίσωσης, που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες q(0) = 0, i(0) = 0, είναι

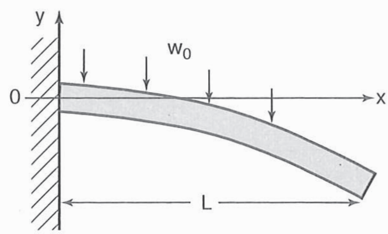
$$q\,(t) = \begin{cases} E_0\,C\left[1 - e^{-\lambda t}\left(\cos h\,\sqrt{\lambda^2 - \omega^2}\;t + \dfrac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - \omega^2}}\,\sin h\,\sqrt{\lambda^2 - \omega^2}\,t\right)\right], & \lambda > \omega\,, \\ E_0\,C\left[1 - e^{-\lambda t}\,(1 + \lambda t)\right], & \lambda = \omega\,, \\ E_0\,C\left[1 - e^{-\lambda t}\left(\cos\,\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\;t + \dfrac{\lambda}{\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}}\,\sin\,\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\;t\right)\right], & \lambda < \omega\,. \end{cases}$$

33. Η ελαστική γραμμή y(x) μιας ομοιογενούς ευθύγραμμης δοκού μήκους L, που καταπονείται από ένα συνεχές φορτίο w(x) (Σχήμα 5) δίδεται από την εξίσωση $E\,I\,y^{(4)}(x) = w\,(x)$, όπου E είναι το μέτρο ελαστικότητας Young και I είναι η ροπή αδράνειας μιας εγκάρσιας διατομής της ράβδου. Να βρεθεί η y(x) όταν y(0)= 0, y(L)= 0, y΄(0) = 0, y(L) = 0 και w(x) = w_0, 0<x<L, w_0 σταθερό.



Σχήμα 5 *Εξίσωση της Δοκού*

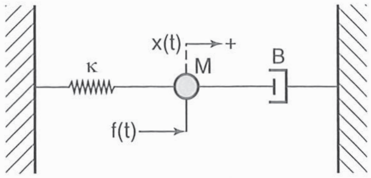
34. Για μια πρόβολο δοκό (Σχήμα 6) η ελαστική γραμμή ικανοποιεί το πρόβλημα συνοριακών συνθηκών $EI\,y^{(4)}(x) = w(x)$, $y\,(0) = 0\,,\ y'\,(0) = 0\,,\ y''\,(L) = 0\,,\ y'''(L) = 0\,.$



Σχήμα 6 *Εξίσωση Προβόλου Δοκού*

Να λυθεί το πρόβλημα, όταν η δοκός καταπονείται από ένα συνεχές φορτίο $w(x) = w_0$, $0<x<L$, w_0 σταθερό.

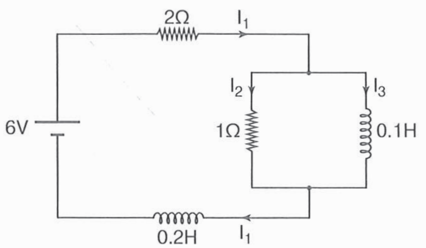
35. Έστω το σύστημα μάζας-ελατηρίου του Σχήματος 7. Το σύστημα αποτελείται από τη μάζα M και ένα γραμμικό ελατήριο σταθεράς κ. Υφίσταται ιξώδη τριβή σταθεράς B και εξωτερική επίδραση f(t). Έστω x η απόκλιση της μάζας M από τη θέση ισορροπίας (με θετικό x προς τα δεξιά). Σύμφωνα με το δεύτερο νόμο του Newton, θα έχουμε $M\,x''(t) + B\,x'(t) + \varkappa\, x\,(t) = f(t)$, όπου $M>0$, $\kappa>0$, $B>0$. Να λυθεί το πρόβλημα με χρήση του μετασχηματισμού Laplace στις ακόλουθες περιπτώσεις (i) $x(0) = a_1$, $x'(0) = a_2$, $f(t) \equiv 0$, $B^2 - 4M\varkappa<0$, (ii) $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$, $f(t) = F_0 \sin(\omega t)$, $M = \varkappa = B = 1$.



Σχήμα 7 *Σύστημα Μάζας - Ελατηρίου*

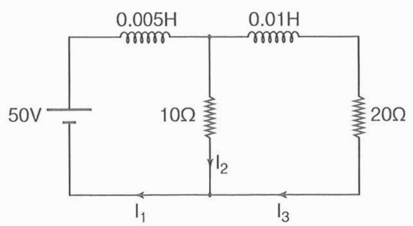
● Να διατυπωθεί το σύστημα διαφορικών εξισώσεων που διέπει τη λειτουργία των κυκλωμάτων των Σχημάτων 8 και 9 και στη συνέχεια να βρεθεί το ρεύμα σε κάθε κλάδο των κυκλωμάτων αυτών. Θεωρούμε ότι οι αρχικές τιμές όλων των ρευμάτων είναι μηδέν.

36.



Σχήμα 8 *Πρόβλημα 36*

37.



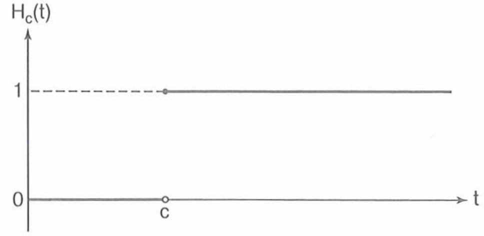
Σχήμα 9 *Πρόβλημα 37*

7.6 ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΟΝΑΔΙΑΙΟΥ ΒΗΜΑΤΟΣ (HEAVISIDE)

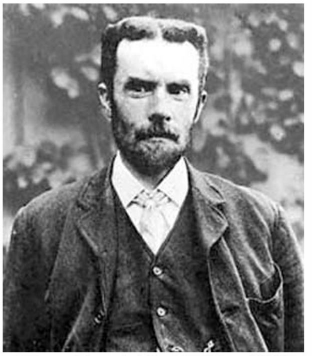
Ένας σημαντικός αριθμός μηχανικών και ηλεκτρικών φαινομένων περιγράφεται από γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με ασυνεχή τον μη-ομογενή όρο. Έτσι είναι χρήσιμο να μελετηθούν οι ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace συναρτήσεων συνεχών κατά τμήματα, πράγμα που γίνεται ευκολότερα με τη βοήθεια της ***συνάρτησης μοναδιαίου βήματος*** ή ***συνάρτησης Heaviside****, η οποία συμβολίζεται με $H_c(t)$ και ορίζεται από τη σχέση (βλέπε Σχήμα 1).

$$H_c(t) = \begin{cases} 0\,, & t<c \\ 1\,, & t\geq c \end{cases}\,, \quad c\geq 0\,. \tag{1}$$

* *Oliver Heaviside* (1850-1925) Άγγλος ηλεκτρολόγος-μηχανικός, με σημαντική συνεισφορά στην ανάπτυξη και τις εφαρμογές του ηλεκτρομαγνητισμού και του διανυσματικού λογισμού. Εξελέγη μέλος της Βασιλικής Εταιρείας το 1891.



Σχήμα 1 Συνάρτηση Heaviside



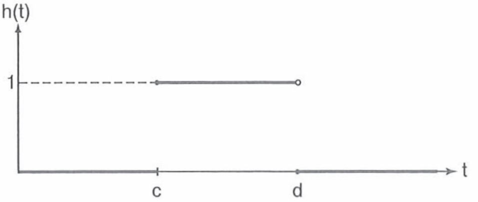
Oliver Heaviside (1850 - 1925)

Εύκολα υπολογίζεται ο μετασχηματισμός Laplace της $H_c(t)$. Πράγματι, έχουμε

$$\mathcal{L}\{H_c(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} H_c(t)\,dt = \int_0^c e^{-st} H_c(t)\,dt + \int_c^\infty e^{-st}\,dt = \frac{e^{-cs}}{s}, \quad s > 0\,.$$

Όπως θα φανεί από τις εφαρμογές, ιδιαίτερα χρήσιμη είναι η *συνάρτηση-διαφορά* δύο συναρτήσεων Heaviside, δηλαδή η $h(t) = H_c(t) - H_d(t)$, $0 < c < d$, η οποία από τον ορισμό της $H_c(t)$ δίδεται από τον τύπο

$$h(t) = \begin{cases} 0 - 0 = 0\,, & 0 \le t < c\,, \\ 1 - 0 = 1\,, & c \le t < d\,, \\ 1 - 1 = 0\,, & d \le t < \infty \end{cases}$$

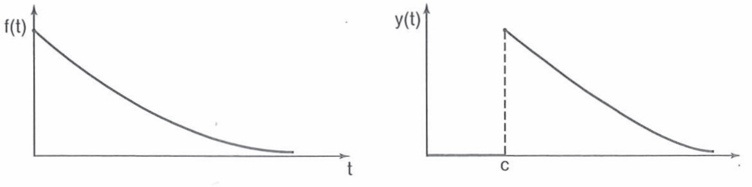


Σχήμα 2 Η συνάρτηση h(t)

και η γραφική παράσταση δίδεται στο Σχήμα 2. Προφανώς ισχύει $\mathcal{L}\{h(t)\} = \mathcal{L}\{H_c(t)\} - \mathcal{L}\{H_d(t)\}$. Η σύνθεση της συνάρτησης Heaviside $H_c(t)$ και μιας τυχαίας συνάρτησης $f(t)$, ορισμένης για $t \geq 0$, οδηγεί στη *μετατόπιση* της $f(t)$ κατά c. Πράγματι, έχουμε

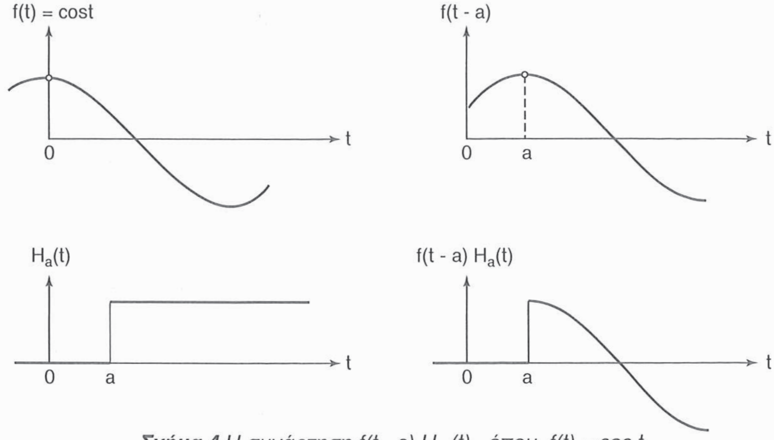
$$y(t) = H_c(t)\, f(t-c) = \begin{cases} 0\,, & 0 \le t < c\,, \\ f(t-c)\,, & t \ge c\,, \end{cases}$$

που γραφικά παρίσταται από το ακόλουθο Σχήμα 3.



Σχήμα 3 Η συνάρτηση $y(t) = H_c(t)\, f(t-c)$

Στο επόμενο Σχήμα 4 απεικονίζεται η διαδοχική επενέργεια της συνάρτησης Heaviside $H_a(t)$ στη συνάρτηση $f(t) = \cos t$.



Σχήμα 4 *Η συνάρτηση f(t - a) H_a (t) , όπου f(t) = cos t*

Το επόμενο θεώρημα συνδέει τους μετασχηματισμούς Laplace των συναρτήσεων f(t) και y(t). Αποτελεί δε τη βάση για τις εφαρμογές της συνάρτησης Heaviside στις διάφορες εξισώσεις.

Θεώρημα 1 *(2ο Θεώρημα Μετατόπισης) Αν υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace F(s) της f(t), για s>a≥0 και c είναι μια θετική σταθερά, τότε*

$$\mathcal{L}\left\{H_c(t)\,f(t-c)\right\} = e^{-cs}\,\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = e^{-cs}\,F(s)\,, \quad s > a\,.$$

Αντίστροφα, αν $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$, τότε $H_c(t)\,f(t-c) = \mathcal{L}^{-1}\,\{e^{-cs}F(s)\}$.

Απόδειξη Εύκολα φαίνεται ότι

$$\mathcal{L}\left\{\mathrm{H_c}(t)\,f(t-c)\right\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\,\mathrm{H_c}(t)\,f(t-c)\,dt = \int_c^{\infty} e^{-st}\,f(t-c)\,dt.$$

Με το μετασχηματισμό $\xi = t - c$ προκύπτει

$$\mathcal{L}\left\{\mathrm{H_c}(t)\,f(t-c)\right\} = \int_0^{\infty} e^{-(\xi+c)s}\,f(\xi)\,d\xi = e^{-cs}\int_0^{\infty} e^{-s\xi}\,f(\xi)\,d\xi = e^{-cs}\,F(s)\,.$$

Η απόδειξη του αντίστροφου είναι προφανής. ◆

Παράδειγμα 2 Να υπολογισθεί ο $\mathcal{L}\{f(t)\}$, όπου

$$f(t) = \begin{cases} 0\,, & \text{για } \ 0 \le t < 1\,, \\ 2\,, & \text{για } \ 1 \le t < \pi\,, \\ -1\,, & \text{για } \ \pi \le t < 2\pi\,, \\ t\,, & \text{για } \ 2\pi \le t < +\infty\,. \end{cases}$$

Λύση Κατ' αρχάς εκφράζουμε την f(t) ως άθροισμα μετατοπισμένων συναρτήσεων, ξεκινώντας από το t = 0. Στο 0≤t<π έχουμε f(t) = 2 H_1(t). Στο π≤t<2π θα πρέπει να αφαιρέσουμε το 3 από το $2H_1(t)$, ώστε να προκύψει -1 και συγχρόνως θα πρέπει να μείνει αμετάβλητο το $f(t)$ στο $0 \le t < \pi$. Έτσι θα έχουμε $f(t) = 2H_1(t) - 3H_\pi(t)$, στο $0 \le t < 2\pi$. Για $t \ge 2\pi$ θέλουμε να προσθέσουμε το $1+t$, ενώ θα παραμένει το $f(t)$ αμετάβλητο στο $[0, 2\pi]$. Επομένως, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} f(t) &= 2H_1(t) - 3\,H_\pi(t) + (t+1)\,H_{2\pi}(t) \\ &= 2H_1(t) - 3\,H_\pi(t) + (t-2\pi)\,H_{2\pi}(t) + (2\pi+1)\,H_{2\pi}(t)\,. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= 2\,\mathcal{L}\{H_1(t)\} - 3\,\mathcal{L}\{H_\pi(t)\} + \mathcal{L}\{(t-2\pi)\,H_{2\pi}(t)\} + (2\pi+1)\,\mathcal{L}\{H_{2\pi}(t)\} \\ &= \frac{2\,e^{-s}}{s} - \frac{3\,e^{-\pi s}}{s} + \frac{e^{-2\pi s}}{s^2} + \frac{(2\pi+1)\,e^{-2\pi s}}{s}\,. \end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 3 Να υπολογισθεί ο $\mathcal{L}\{f(t)\}$, όπου

$$f(t) = \begin{cases} 1\,, & \text{για} \quad 0 \le t < 2\,, \\ -3\,, & \text{για} \quad 2 \le t < 3\,, \\ t^2\,, & \text{για} \quad 3 \le t < \infty\,. \end{cases}$$

Λύση Κατ' αρχάς γράφουμε την $f(t)$ ως άθροισμα συναρτήσεων της μορφής $H_c(t)h(t-c)$. Ξεκινώντας από το $t=0$, έχουμε $f(t) = 1 = H_0(t)$, στο $[0, 2)$. Στο $[2, 3)$ πρέπει να προστεθεί το -4 στο $H_0(t)$ και να παραμείνει αμετάβλητη η $f(t)$ στο $[0, 2)$. Έτσι θα έχουμε $H_0(t) - 4H_2(t)$, στο $[0, 3)$. Ομοίως στο $[3, +\infty)$ θα προστεθεί το $3+t^2$ και θα παραμείνει αμετάβλητη η $f(t)$ στο $[0, 3)$. Επομένως, προκύπτει η μορφή

$$f(t) = H_0(t) - 4\,H_2(t) + \left(3+t^2\right)H_3(t)\,, \qquad \text{στο} \quad [0, +\infty)\,.$$

Ο τελευταίος όρος $(3+t^2)\,H_3(t)$ μπορεί να εκφραστεί ως μια μετατοπισμένη συνάρτηση ως εξής:

$$\begin{aligned} \left(3+t^2\right)H_3(t) &= 3\,H_3(t) + t^2\,H_3(t) = 3\,H_3(t) + \left[(t-3)^2\,H_3(t) + (6t-9)\,H_3(t)\right] \\ &= 3\,H_3(t) + \left[(t-3)^2\,H_3(t) + 6\,(t-3)\,H_3(t) + 9\,H_3(t)\right] \\ &= \left\{(t-3)^2 + 6\,(t-3) + 12\right\}H_3(t) \end{aligned}$$

Επομένως, η τελική μορφή της $f(t)$ είναι

$$f(t) = 1 - 4\,H_2(t) + \left[(t-3)^2 + 6\,(t-3) + 12\right]H_3(t)\,.$$

Έτσι έχουμε

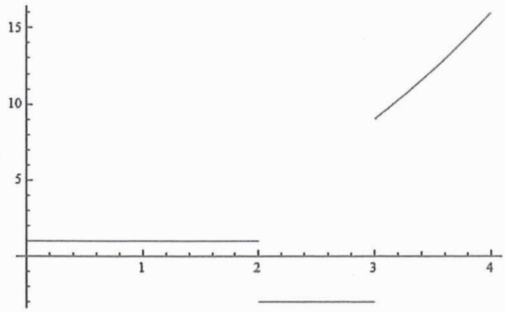
$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s} - \frac{4\,e^{-2s}}{s} + e^{-3s}\left\{\frac{2}{s^3} + \frac{6}{s^2} + \frac{12}{s}\right\}.$$

```
In[11]:= f[t_] = UnitStep[t] - 4 UnitStep[t - 2] + (3 + t^2) UnitStep[t - 3]
```

Out[11]= $(3+t^2)\,\text{UnitStep}[-3+t] - 4\,\text{UnitStep}[-2+t] + \text{UnitStep}[t]$

```
In[12]:= Plot[f[t], {t, 0, 4}]
```

Out[12]=




```
In[13]:= LaplaceTransform[f[t], t, s]
```

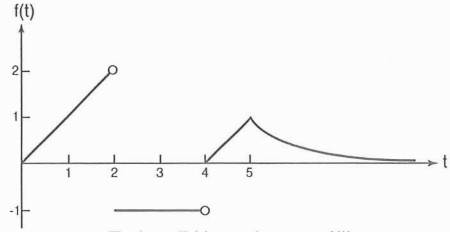
Out[13]= $\frac{1}{s} + \frac{3\,e^{-3s}}{s} - \frac{4\,e^{-2s}}{s} + \frac{e^{-3s}\,(2+6s+9s^2)}{s^3}$

Παράδειγμα 3

■

Παράδειγμα 4 Να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 2, \\ -1, & 2 \le t < 4, \\ t-4, & 4 \le t < 5, \\ e^{5-t}, & t \ge 5, \end{cases}$$



Σχήμα 5 *Η συνάρτηση f(t)*

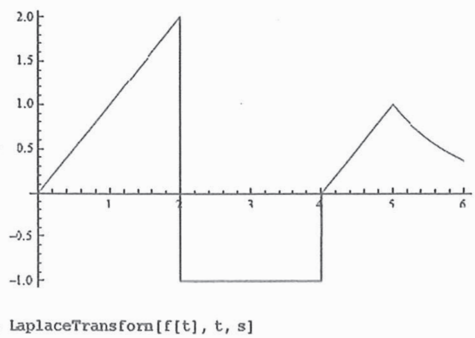
και στη συνέχεια να εκφρασθεί η f(t) με τη βοήθεια της συνάρτησης Heaviside.

```
In[14]:= f[t_] = Which[0 ≤ t < 2, t, 2 ≤ t < 4, -1, 4 ≤ t < 5, t - 4, t ≥ 5, Exp[5 - t]]
```

Out[14]= $\text{Which}[0 \le t < 2,\ t,\ 2 \le t < 4,\ -1,\ 4 \le t < 5,\ t-4,\ t \ge 5,\ e^{5-t}]$

```
In[15]:= Plot[f[t], {t, 0, 6}]
```

Out[15]=




```
In[16]:= LaplaceTransform[f[t], t, s]
```

Out[16]= $\frac{e^{-5s}\,(-1+e^{s}-e^{3s}+e^{5s}-2s+2e^{s}s-4e^{3s}s+e^{5s}s+e^{s}s^2-3e^{3s}s^2)}{s^2\,(1+s)}$

Παράδειγμα 4

Λύση Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f(t) φαίνεται στο Σχήμα 5. Κάνοντας χρήση της συνάρτησης Heaviside και των συλλογισμών που αναπτύχθηκαν στα Παραδείγματα 2 και 3, μπορούμε να δούμε ότι η f(t) δέχεται την ακόλουθη έκφραση:

$$f(t) = t\left[1 - H_2(t)\right] - \left[H_2(t) - H_4(t)\right] + (t-4)\left[H_4(t) - H_5(t)\right] + e^{5-t} H_5(t). \quad ■$$

Στα προηγούμενα Παραδείγματα 2 έως 4, μπορέσαμε να υπολογίσουμε το μετασχηματισμό Laplace κατευθείαν από τον ορισμό. Όμως για τον αντίστροφο μετασχηματισμό $\mathcal{L}^{-1}$ δεν υπάρχει απλός τύπος υπολογισμού, αλλά πρέπει να γίνει χρήση μιγαδικού ολοκληρώματος. Έτσι το Θεώρημα 1 είναι ιδιαίτερα χρήσιμο, όταν υπάρχει ο παράγοντας e^{-as} στη συνάρτηση F(s), όπως αυτό φαίνεται στο επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 5 Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s-4)e^{-3s}}{s^2-4s+5}\right\}.$$

Λύση Έχουμε ότι

$$F(s) \equiv \frac{(s-4)e^{-3s}}{s^2-4s+5} = \frac{(s-4)e^{-3s}}{(s-2)^2+1} = e^{-3s}\left[\frac{s-2}{(s-2)^2+1} - \frac{2}{(s-2)^2+1}\right].$$

Επομένως

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-3s}\mathcal{L}\left\{e^{2t}\cos t - 2e^{2t}\sin 2t\right\}\right\}\\ &= H_3(t)\left[e^{2(t-3)}\cos(t-3) - 2e^{2(t-3)}\sin(t-3)\right]\\ &= e^{2(t-3)}H_3(t)\left[\cos(t-3) - 2\sin(t-3)\right].\end{aligned}$$

■

Ακολουθούν παραδείγματα εφαρμογής της συνάρτησης Heaviside στην επίλυση συνήθων διαφορικών εξισώσεων με ασυνεχή εξωτερική επίδραση.

Παράδειγμα 6 Η κίνηση ενός ελατηρίου χωρίς απόσβεση περιγράφεται από την εξίσωση

$$x''(t) + 4x(t) = 16 f(t)/3 \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0, \qquad (\alpha)$$

όπου f(t) παριστάνει δύναμη 1,5 μονάδων, που εφαρμόζεται στο σύστημα για 4 sec και μετά αποσύρεται, δηλαδή f(t)=1,5, για $0 \le t < 4$ και f(t)=0, για $4 \le t$. Να μελετηθεί η συμπεριφορά του ελατηρίου.

Λύση Θέτουμε $\mathcal{L}\{x(t)\} = Y(s)$, οπότε με βάση τα προηγούμενα έχουμε

$$\frac{6}{32}\left\{s^2 Y(s) - s\,x(0) - x'(0)\right\} + \frac{3}{4}Y(s) = 1.5\left(\frac{1}{s} - \frac{e^{-4s}}{s}\right), \quad s > 0,$$

αφού f (t) = 1,5 (1 – H_4(t)). Έτσι προκύπτει

$$\frac{3}{8}\, s^2\, Y(s) + \frac{3}{2}\, Y(s) = 3\left(\frac{1}{s} - \frac{e^{-4s}}{s}\right), \quad s > 0, \qquad \text{ή}$$

$$3\, s^2\, Y(s) + 12\, Y(s) = 24\left(\frac{1}{s} - \frac{e^{-4s}}{s}\right), \quad s > 0, \qquad \text{ή}$$

$$s^2\, Y(s) + 4\, Y(s) = 8\left(\frac{1}{s} - \frac{e^{-4s}}{s}\right), \quad s > 0 \quad \text{και τελικά}$$

$$Y(s) = \frac{8\left(1 - e^{-4s}\right)}{s\left(s^2+4\right)} = 2\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}\right)\left(1 - e^{-4s}\right) = 2\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}\right) - 2\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}\right)e^{-4s}.$$

Εφαρμόζουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό $\mathcal{L}^{-1}$, οπότε παίρνουμε

$$x(t) = 2 - 2\cos 2t - 2\, H_4(t) + 2\, H_4(t)\cos 2\,(t-4)$$

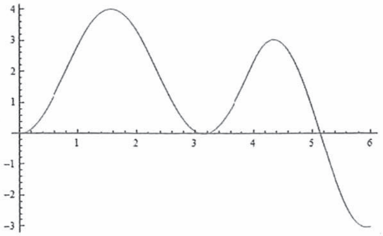
$$= 2\,(1 - \cos 2t) - 2\,(1 - \cos 2\,(t-4))\, H_4(t),$$

η οποία αποτελεί τη λύση του προβλήματος (α) και γράφεται επίσης στη μορφή

$$x(t) = \begin{cases} 2\,(1 - \cos 2t), & 0 \le t \le 4, \qquad (\beta) \\ 2\,(\cos 2(t-4) - \cos 2t), & t > 4. \qquad (\gamma) \end{cases}$$

Εύκολα βρίσκεται ότι $\lim\limits_{t \to 4^-} x(t) = \lim\limits_{t \to 4^+} x(t) = 2\,(1 - \cos 8) \approx 2.89$, $\lim\limits_{t \to 4^-} x'(t) = \lim\limits_{t \to 4^+} x'(t) = 4 \sin 8 \approx 3.86$. Άρα η λύση καθώς και η πρώτη παράγωγος αυτής είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $t = 4$, ενώ η δεύτερη παράγωγος παρουσιάζει το

```
In[1]:= eq = 6/32 x''[t] + 3/4 x[t] == 3/2 (1 - HeavisideTheta[t - 4])

Out[1]= 3 x[t]/4 + 3 x''[t]/16 == 3/2 (1 - HeavisideTheta[-4 + t])

In[2]:= eqL = LaplaceTransform[eq, t, s]

Out[2]= 3/4 LaplaceTransform[x[t], t, s] + 3/16 (s^2 LaplaceTransform[x[t], t, s] - s x[0] - x'[0]) == 3/2 (1/s - e^(-4 s)/s)

In[3]:= sol = Solve[eqL, LaplaceTransform[x[t], t, s]]

Out[3]= {{LaplaceTransform[x[t], t, s] -> e^(-4 s) (-8 + 8 e^(4 s) + e^(4 s) s^2 x[0] + e^(4 s) s x'[0]) / (s (4 + s^2))}}

In[4]:= xL[s_] = sol[[1, 1, 2]] /. x[0] -> x0 /. x'[0] -> x1

Out[4]= e^(-4 s) (-8 + 8 e^(4 s) + e^(4 s) s^2 x0 + e^(4 s) s x1) / (s (4 + s^2))

In[5]:= solution[t_] = InverseLaplaceTransform[xL[s], s, t] /. x0 -> 0 /. x1 -> 0

Out[5]= 2 - 2 Cos[2 t] - 4 HeavisideTheta[-4 + t] Sin[4 - t]^2

In[6]:= Plot[%, {t, 0, 6}]

Out[6]=
```



Παράδειγμα 6

είδος ασυνέχειας της f(t). Ακόμα βρίσκεται ότι στο διάστημα 0<t<4 ισχύει η εξίσωση (β) και η μέγιστη απομάκρυνση από το αρχικό σημείο είναι $x(t_0) = 4$ μονάδες και συμβαίνει στο $t_0=\pi/2 = 1{,}57$ sec. Για t>4 ισχύει η εξίσωση (γ) και η κίνηση είναι απλή αρμονική με μέγιστο $x_{max} = 3.03$ μονάδες. Πράγματι, για t>4 έχουμε

$$x_{max} = 2\sqrt{(1-\cos 8)^2 + \sin^2 8} = 2\sqrt{2}\,\sqrt{1-\cos 8} = 2\sqrt{2.\,2910} = 3.03\,. \qquad \blacksquare$$

Παράδειγμα 7 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y^{(4)}(t) - 5\,y''(t) + 4\,y(t) = f(t),\ \ t>0, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0\,, \qquad (\alpha)$$

όπου $f(t) = \begin{cases} \sin t\,, & \text{όταν} \quad t < \pi/2\,, \\ \cos t\,, & \text{όταν} \quad t > \pi/2\,. \end{cases}$

Λύση Με τη βοήθεια της συνάρτησης Heaviside η f(t) γράφεται $f(t) = \sin t + H_{\pi/2}(t)(\cos t - \sin t)$. Έτσι θέτοντας $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$ και παίρνοντας το μετασχηματισμό Laplace της εξίσωσης (α) προκύπτει

```
In[1]:= eq = y''''[t] - 5 y''[t] + 4 y[t] == Sin[t] + (Cos[t] - Sin[t]) HeavisideTheta[t - Pi / 2]
```

Out[1]= $4\,y[t] - 5\,y''[t] + y^{(4)}[t] == \text{HeavisideTheta}\left[-\frac{\pi}{2} + t\right] (\text{Cos}[t] - \text{Sin}[t]) + \text{Sin}[t]$

```
In[2]:= eqL = LaplaceTransform[eq, t, s]
```

Out[2]= $4\,\text{LaplaceTransform}[y[t], t, s] + s^4\,\text{LaplaceTransform}[y[t], t, s] - s^3\,y[0] - 5\left(s^2\,\text{LaplaceTransform}[y[t], t, s] - s\,y[0] - y'[0]\right) - s^2\,y'[0] - s\,y''[0] - y^{(3)}[0] == \frac{1}{1+s^2} - \frac{e^{-\frac{\pi s}{2}}}{1+s^2} - \frac{e^{-\frac{\pi s}{2}}\,s}{1+s^2}$

```
In[3]:= sol = Solve[eqL, LaplaceTransform[y[t], t, s]]
```

Out[3]= $\left\{\left\{\text{LaplaceTransform}[y[t], t, s] \to \frac{\frac{1}{1+s^2} - \frac{e^{-\frac{\pi s}{2}}}{1+s^2} - \frac{e^{-\frac{\pi s}{2}}\,s}{1+s^2} - 5\,s\,y[0] + s^3\,y[0] - 5\,y'[0] + s^2\,y'[0] + s\,y''[0] + y^{(3)}[0]}{4 - 5\,s^2 + s^4}\right\}\right\}$

```
In[4]:= yL[s_] = sol[[1, 1, 2]]
```

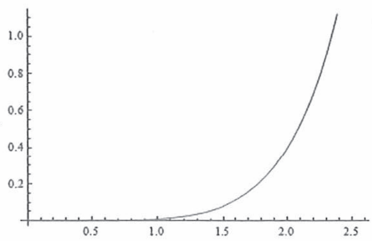
Out[4]= $\frac{\frac{1}{1+s^2} - \frac{e^{-\frac{\pi s}{2}}}{1+s^2} - \frac{e^{-\frac{\pi s}{2}}\,s}{1+s^2} - 5\,s\,y[0] + s^3\,y[0] - 5\,y'[0] + s^2\,y'[0] + s\,y''[0] + y^{(3)}[0]}{4 - 5\,s^2 + s^4}$

```
In[5]:= solution[t_] = InverseLaplaceTransform[yL[s], s, t] /. y[0] → 0 /. y'[0] → 0 /. y''[0] → 0 /. y'''[0] → 0
```

Out[5]= $\frac{1}{60}\,e^{-\pi-2t}\left(e^{\pi}\left(-1 + 5\,e^{t} - 5\,e^{3t} + e^{4t} + 6\,e^{2t}\,\text{Sin}[t]\right) - \text{HeavisideTheta}\left[-\frac{\pi}{2} + t\right]\left(e^{2\pi} + 3\,e^{4t} - 10\,e^{\frac{\pi}{2}+3t} - 6\,e^{\pi+2t}\,\text{Cos}[t] + 6\,e^{\pi+2t}\,\text{Sin}[t]\right)\right)$

```
In[6]:= Plot[%, {t, 0, Pi / 2 + 1}]
```

Out[6]=



Παράδειγμα 7

$$s^4\, Y(s) - 5\, s^2\, Y(s) + 4\, Y(s) = \frac{1}{1+s^2} - \frac{(s+1)\, e^{-\pi s/2}}{s^2+1},$$

απ' όπου βρίσκεται ότι

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{(s^2+1)(s^2-1)(s^2-4)} - e^{-\pi s/2} \frac{1}{(s^2+1)(s-1)(s^2-4)} \\ &= \frac{1}{10(s^2+1)} - \frac{1}{6(s^2-1)} + \frac{1}{15(s^2-4)} \\ &\quad - e^{-\pi s/2}\left[-\frac{1}{6(s-1)} + \frac{1}{60(s+2)} + \frac{1}{20(s-2)} + \frac{s+1}{10(s^2+1)}\right]. \end{aligned}$$

Έτσι η λύση του προβλήματος (α) είναι

$$y(t) = \frac{1}{10}\sin t - \frac{1}{6}\sin ht + \frac{1}{30}\sin h\, 2t - H_{\pi/2}(t)\left[-\frac{1}{6} e^{t-\pi/2}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{60} e^{-2(t-\pi/2)} + \frac{1}{20} e^{2(t-\pi/2)} + \frac{1}{10}\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{10}\sin\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right] \quad \text{ή}$$

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{10}\sin t - \frac{1}{6}\sin ht + \frac{1}{30}\sin h\, 2t, & t < \frac{\pi}{2}, \\ \frac{1}{10}\cos t - \frac{1}{6}\sin h\, t + \frac{1}{30}\sin h\, 2t + \frac{1}{60}\left[10\, e^{t-\pi/2} - 3e^{2(t-\pi/2)} - e^{-2(t-\pi/2)}\right], & t > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Εύκολα διαπιστώνεται ότι, ενώ η f(t) είναι ασυνεχής στο $t = \pi/2$, η λύση y(t) και οι πρώτες τρεις παράγωγοι είναι συνεχείς, πράγμα που δε συμβαίνει με την τέταρτη παράγωγο, όπως άλλωστε αναμένεται. Γενικότερα, οι συναρτήσεις y(t), $y'(t)$ …, $y^{(n-1)}(t)$ είναι *παντού συνεχείς*, αν η f(t) είναι *τμηματικά συνεχής*, όπου y(t) λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$a_n\, y^{(n)}(t) + a_{n-1}\, y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1\, y'(t) + a_0\, y(t) = f(t),$$
$$y(t_0) = y_0, \ldots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1},$$

ενώ η $y^{(n)}(t)$ έχει ακριβώς τη μορφή ασυνέχειας της f(t). ■

7.6 Προβλήματα

• Να γίνει η γραφική παράσταση των ακόλουθων συναρτήσεων f(t). Στη συνέχεια να γραφούν με τη βοήθεια της συνάρτησης Heaviside.

1. $f(t) = \begin{cases} 0, & 10 \le t < 1 \\ 1, & 1 \le t < 3 \\ 2, & 3 \le t \end{cases}$ **2.** $f(t) = \begin{cases} 5, & 0 \le t < 3 \\ 2t-1, & 3 \le t \end{cases}$ **3.** $f(t) = \begin{cases} e^{-t}, & 0 \le t < 2 \\ 0, & 2 \le t \end{cases}$

4. $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 2 \\ 4, & 2 \le t < 5 \\ 0, & 5 \le t \end{cases}$ **5.** $f(t) = \begin{cases} \cos t, & 0 \le t < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} \le t \end{cases}$

6. $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 1 \\ t, & 1 \le t < 2 \\ 0, & 2 \le t \end{cases}$ **7.** $f(t) = \begin{cases} 4, & 0 \le t < 1 \\ 2, & 1 \le t < 2 \\ 0, & 2 \le t \end{cases}$ **8.** $f(t) = t\, H_1(t) - t$

9. $f(t) = H_2(t)\, e^{3t}$ **10.** $f(t) = H_1(t) + H_2(t) + H_3(t) - t\, H_\pi(t)$

• Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace των ακόλουθων συναρτήσεων, αφού γραφούν σε μορφή Heaviside (όσες εξ αυτών δε βρίσκονται ήδη).

11. $f(t) = 2\,(t-2)^4\, H_2(t)$ **12.** $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 4 \\ 2\,t^3, & 4 \le t \end{cases}$ **13.** $f(t) = \begin{cases} 2t, & 0 \le t < 5 \\ t + 2, & 5 \le t \end{cases}$

14. $f(t) = \begin{cases} h, & 2n \le t < 4n + 4, \quad h > 0 \\ -h, & 4n + 4 \le t < 4n + 8, \quad n = 0, 2, 4, 6, \ldots \end{cases}$

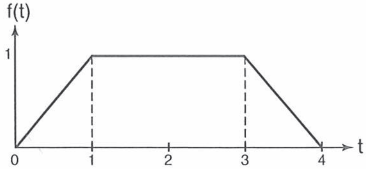
15. $f(s) = 8\,t^3\, H_5(t) - e^{-4t}\, t\, H_3(t), \; t > 0$ **16.** $f(t) = t - \left(7\,t^2 + 30\right) H_1(t), \; t > 0$

17. $f(t) = \left(t^4 - 3t^2 + 2\right) H_9(t), \; t > 0$ **18.** $f(t) = e^{-2(t-1)} \sin 3\,(t-1) H_1(t), \; t > 0$

19. $f(t) = (t-1)^2\, H_2(t), \; t > 0$ **20.** $f(t) = (t-1)^2\, H_1(t), \; t > 0$

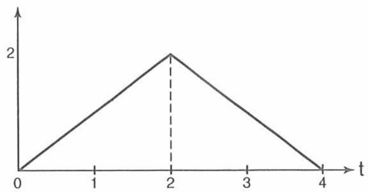
21. $f(t) = e^t\, H_3(t), \; t > 0$

22.



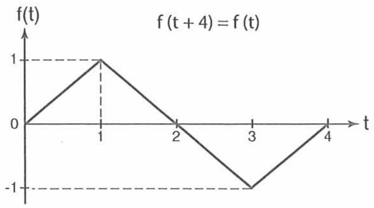
Σχήμα 6 *Πρόβλημα 22*

23.



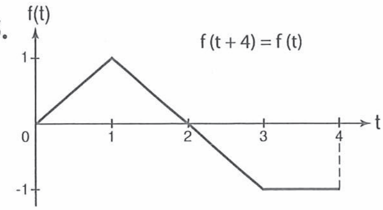
Σχήμα 7 *Πρόβλημα 23*

24.



Σχήμα 8 *Πρόβλημα 24*

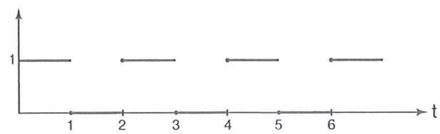
25.



Σχήμα 9 *Πρόβλημα 25*

26. $f(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k\, H_k(t)$

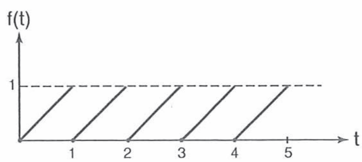
(*Υποδ.* Υποθέτουμε ότι μπορούμε να ολοκληρώσουμε όρο προς όρο)



Σχήμα 10 *Πρόβλημα 26*

27. $f(t) = t, \; 0 \le t < 1$

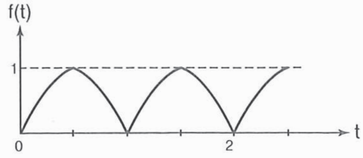
$f(t+1) = f(t)$



Σχήμα 11 *Πρόβλημα 27*
(Οδοντωτό Κύμα)

28. $f(t) = \sin t, \quad 0 \le t < \pi$

$f(t + \pi) = f(t)$



Σχήμα 12 Πρόβλημα 28 (Διορθωμένο Ημιτονικό Κύμα)

• Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace των ακόλουθων συναρτήσεων:

29. $F(s) = \dfrac{e^{-s}}{s^2 + 4}$

30. $F(s) = \dfrac{1 - e^{-\pi s}}{(s+1)^2 + 5}$

31. $F(s) = \dfrac{e^{-s/2}}{s^2 + 4s - 5}$

32. $F(s) = \dfrac{e^{-2s} + 3}{s(s^2 + 4s + 7)}$

33. $F(s) = \dfrac{-s}{(s-4)^2 (s-5)}$

34. $F(s) = \dfrac{s^3}{(s+3)^2 (s+2)^2}$

35. $F(s) = \dfrac{4}{(s-2)^2 (s+6)}$

36. $F(s) = \dfrac{2s^2}{(s+2)(s-3)^2}$

37. $F(s) = \dfrac{4s^2 + 5}{(s+3)(s^2 + 3s + 7)}$

38. $F(s) = \dfrac{2e^{-2s}}{(s^2 - 4)}$

39. $F(s) = \dfrac{e^{-s} + e^{-2s} - e^{-3s} - e^{-4s}}{s}$

40. Έστω ότι ο $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ υπάρχει για $s > b \ge 0$. Να αποδειχθεί ότι

(i) αν $c>0$, τότε $\mathcal{L}\{f(ct)\} = c^{-1} F(c^{-1}s)$, $s > bc$,

(ii) αν $k>0$, τότε $\mathcal{L}^{-1}\{F(ks)\} = k^{-1} f(k^{-1}t)$,

(iii) αν λ, μ σταθερές με $\lambda>0$, τότε $\mathcal{L}^{-1}\{F(\lambda s + \mu)\} = \lambda^{-1} e^{-\mu t/\lambda} f(\lambda^{-1}t)$.

• Με βάση το Πρόβλημα 40 να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace των ακόλουθων συναρτήσεων:

41. $F(s) = \dfrac{1}{(2s-1)^2}$

42. $F(s) = \dfrac{e^{-s}}{(2s-1)^2}$

43. $F(s) = \dfrac{e^2 e^{-4s}}{(2s-1)}$

44. $F(s) = \dfrac{3!}{(4s-3)^4}$

45. $F(s) = \dfrac{1}{9s^2 - 12s + 3}$

46. $F(s) = \dfrac{1}{s} \arctan\left(\dfrac{1}{2s+5}\right)$

47. Να αποδειχθεί ότι, αν $y=\varphi(t)$ είναι η λύση του προβλήματος

$$y^n + b_{n-1} y^{(n-1)} + b_{n-2} y^{(n-2)} + \ldots + b_1 y' + b_0 y = f(t), \quad t > 0,$$

$$y(0) = a_0, \quad y'(0) = a_1, \ldots, y^{(n-1)}(0) = a_{n-1},$$

τότε η y= φ(t–c) είναι λύση του προβλήματος

$$y^{(n)} + b_{n-1}\, y^{(n-1)} + \dots + b_1\, y' + b_0\, y = f\,(t-c)\,, \quad t > c,$$
$$y(c) = a_0\,,\ y'\,(c) = a_1\,,\ \dots\,,\ y^{(n-1)}\,(c) = a_{n-1}\,.$$

48. Υποθέτουμε ότι η y(t) είναι λύση του προβλήματος

$$y'' + ay' + by = H_2\,(t)\, f\,(t-2)\,, \quad y\,(2) = 1\,, \quad y'\,(2) = -2\,.$$

Τότε (a) να αποδειχθεί ότι η y(t+2) αποτελεί λύση του προβλήματος

$$y'' + ay' + by = H_0\,(t)\,, \quad y\,(0) = 1\,, \quad y'\,(0) = -2$$

(b) να βρεθεί η μορφή της λύσης του προβλήματος

$$z'' + az' + bz = H_5\,(t)\, f\,(t-5)\,, \quad z\,(5) = 1\,, \quad y'\,(5) = -2\,,$$

ως συνάρτηση της y(t).

49. Αφού διαπιστωθεί ότι η $y(t) = e^{-t^2}$ είναι λύση του προβλήματος

$$y'' + 2y = 4\,t^2\, e^{-t^2}\,, \quad y\,(0) = 1\,, \quad y'\,(0) = 0\,,$$

να λυθεί το πρόβλημα $w'' + 2w = 4\,(t-2)^2\, e^{-(t-2)^2}\, H_2\,(t)\,, \quad w(2) = 1, \quad w'\,(2) = 0.$

50. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace της $|\sin t|$
(*Υποδ.* Παρατηρήστε ότι $|\sin t| = \sin t + 2 \sum_{n=1}^{\infty} H_{n\pi}\,(t) \sin\,(t - n\pi)$.

● Να λυθούν τα ακόλουθα προβλήματα αρχικών τιμών:

51. $y'' + 2y' + y = 2\,(t-3)\, H_3\,(t),\ t > 0,\ \ y\,(0) = 2\,,\ \ y'\,(0) = 1$

52. $y'' + y = \begin{cases} \cos t\,, & 0 \le t < \pi/2\,, \\ 0\,, & \pi/2 < t < \infty\,, \end{cases} \quad y\,(0) = 3\,, \quad y'\,(0) = 1$

53. $y'' - 2y' + y = \begin{cases} 0\,, & 0 \le t < 1\,, \\ t\,, & 1 \le t < 2\,, \\ 0\,, & 2 \le t < \infty\,, \end{cases} \quad y\,(0) = 0\,, \quad y'\,(0) = 1$

54. $w'' + 2w' + 5w = 1 + H_\pi\,(t),\ t > 0, \quad w\,(0) = 1\,, \quad w'\,(0) = 0$

55. $\dfrac{dR}{dx} + 2R = \begin{cases} 1\,, & x \in [0\,,1)\,, \\ -1\,, & x \in [1\,,2)\,, \\ 0\,, & x \in [2\,,+\infty)\,, \end{cases} \quad R\,(0) = 0$

56. $y'' + y = \begin{cases} 0\,, & t \in [0\,,1)\,, \\ t\,, & t \in [1\,,+\infty)\,, \end{cases} \quad y\,(0) = 1\,, \quad y'\,(0) = 0\,.$

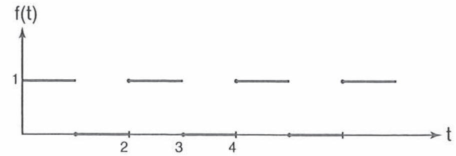
57. $N^{(4)}\,(t) + 4\,N^{(3)}\,(t) + 6\,N''\,(t) + 4\,N'\,(t) + N\,(t) = 1 - H_2\,(t), \quad t > 0,$
$N\,(0) = N'\,(0) = 0\,, \quad N''\,(0) = 1\,, \quad N'''\,(0) = 0$

58. $y'' + 2y' + 2y = h(t)\,,\ t>0,\ y(0)=0\,,\ \ y'(0)=1,\ \ h(t)=\begin{cases}1\,, & t\in[\pi, 2\pi)\,,\\ 0\,, & t\in[0\,,\pi)\cup[2\pi\,,+\infty)\,.\end{cases}$

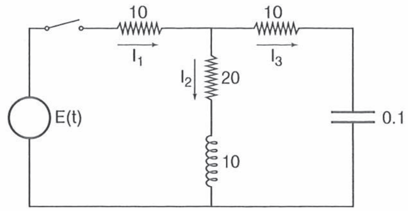
59. $y'' + 4y = \sin t - H_{2\pi}(t)\sin(t-2\pi),\ \ t>0\,,\ \ y(0)=0\,,\ \ y'(0)=0$

60. $y'' + 4y = \sin t + H_{\pi}(t)\sin(t-\pi),\ \ t>0\ \ ,\ \ y(0)=y'(0)=0$

61. $y'' + y = f(t) = \begin{cases}1\,, & t\in[0\,,\pi)\\ 0\,, & t\in[\,\pi, 2\pi)\end{cases}\ \ \ f(t+2\pi)=f(t)\,,\ \ y(0)=1\,,\ \ y'(0)=0$



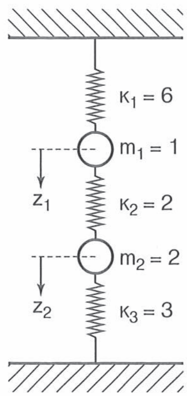
Σχήμα 13 *Πρόβλημα 61*



Σχήμα 14 *Πρόβλημα 62*

62. Να βρεθούν τα ρεύματα που διατρέχουν το κύκλωμα του Σχήματος 14, όταν οι αρχικές συνθήκες είναι μηδέν και $E(t) = E_0 \sin(\omega t)\, H_4(t)$.

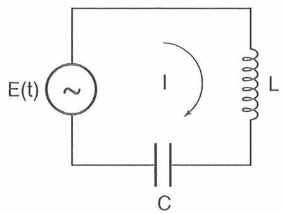
63. Να βρεθεί και να λυθεί το σύστημα διαφορικών εξισώσεων που περιγράφει την κίνηση των μαζών m_1, m_2 στο Σχήμα 15, όταν τα βάρη έχουν μηδενικές την αρχική μετατόπιση και την ταχύτητα, ενώ μόνο το κατώτερο βάρος δέχεται εξωτερική επίδραση $f(t) = 1 - H_1(t)$.



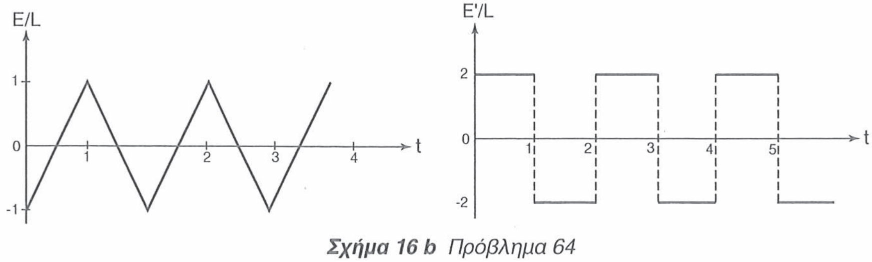
Σχήμα 15 *Πρόβλημα 63*

64. Το ρεύμα που διατρέχει το κύκλωμα του Σχήματος 16α δίδεται από το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$I''(t) + \omega^2 I(t) = \frac{E'(t)}{L}\,,\ \ I(0)=0\,,\ \ I'(0)=0\,,$$



Σχήμα 16 a *Πρόβλημα 64*



Σχήμα 16 b *Πρόβλημα 64*

όπου $\omega = {}^{1}/_{LC}$ και τα $E(t)/_{L}$, $E'(t)/_{L}$ δίδονται στο Σχήμα 16b. Να λυθεί το πρόβλημα.

7.7 ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΩΘΗΣΗΣ - ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ δ-Dirac

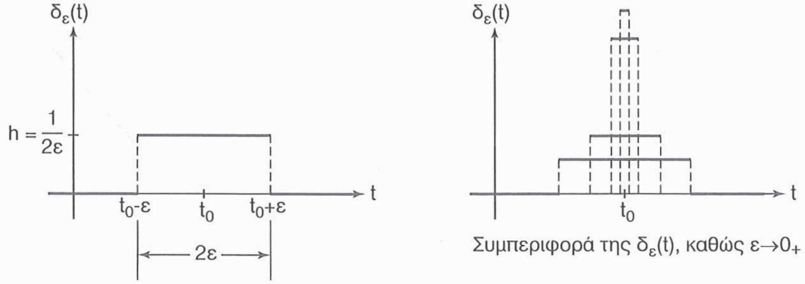
Υπάρχει σημαντικός αριθμός φυσικών και βιολογικών φαινομένων στα οποία η παρουσία εξωτερικών δυνάμεων αρκετά *μεγάλου μεγέθους*, ασκεί επίδραση για *πολύ μικρό χρονικό διάστημα*. Η μελέτη τέτοιου είδους φαινομένων οδηγεί συχνά στη διαμόρφωση διαφορικών εξισώσεων της μορφής

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = \delta_\varepsilon(t),$$

όπου η συνάρτηση $\delta_\varepsilon(t)$ ορίζεται από τη σχέση

$$\delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} h, & t_0 - \varepsilon < t < t_0 + \varepsilon, \\ 0, & t \le t_0 - \varepsilon,\ t \ge t_0 + \varepsilon, \end{cases} \tag{1}$$

$t_0 > 0$, $h >> 0$ και το ε είναι μια μικρή θετική σταθερά. Η $\delta_\varepsilon(t)$ ονομάζεται ***συνάρτηση ώθησης*** και απεικονίζεται στο ακόλουθο Σχήμα 1.



Σχήμα 1 *$\delta_\varepsilon(t)$: συνάρτηση ώθησης*

Ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης ώθησης $\delta_\varepsilon(t)$ είναι

$$\mathcal{L}\{\delta_\varepsilon(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\delta_\varepsilon(t)\,dt = \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} h\,e^{-st}\,dt = \frac{h\,e^{-t_0 s}}{s}\left(e^{\varepsilon s} - e^{-\varepsilon s}\right) = 2\,\frac{h\,e^{-t_0 s}}{s}\sinh(\varepsilon s). \tag{2}$$

Εάν δε θεωρήσουμε ότι $h = 1/2\varepsilon$, τότε ισχύει

$$I(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(t)\,dt = \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon}\,dt = 1. \tag{3}$$

Έτσι στο όριο για τη συγκεκριμένη αυτή συνάρτηση ώθησης έχουμε

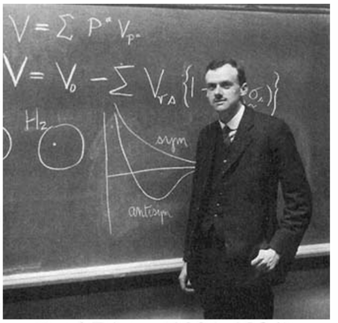
$$\lim_{\varepsilon\to 0} \delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} \infty, & t = t_0, \\ 0, & t \ne t_0, \end{cases} \quad t_0 > 0, \tag{4}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I(\varepsilon) = 1. \tag{5}$$

Το γεγονός αυτό μας οδηγεί στον ορισμό μιας πολύ χρήσιμης στις εφαρμογές σε σχετικά θέματα «συνάρτησης», της ***συνάρτησης δ-Dirac****, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις

$$\delta(t-t_0)=\lim_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon(t)=\begin{cases}\infty, & t=t_0,\\ 0, & t\neq t_0,\end{cases}\qquad t_0>0, \tag{6}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)\,dt=1,\quad t_0>0. \tag{7}$$



Paul Dirac (1904-1984)

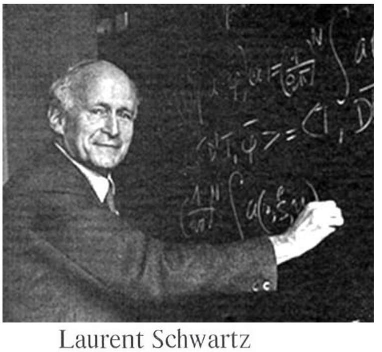
Έτσι μπορούμε να ορίσουμε το μετασχηματισμό Laplace της $\delta(t)$, ως το όριο του μετασχηματισμού της $\delta_\varepsilon(t)$, δηλαδή

$$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\}=\lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{L}\{\delta_\varepsilon(t)\}=\lim_{\varepsilon\to 0}e^{-t_0 s}\frac{\sinh(\varepsilon s)}{\varepsilon s}=e^{-t_0 s} \tag{8}$$

Επομένως, για $t_0=0$ έχουμε $\mathcal{L}\{\delta(t)\}=1$.

Παρατήρηση 1 Αν η συνάρτηση δ-Dirac ήταν μια συνήθης συνάρτηση, τότε η ιδιότητα (6) θα έδιδε $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)\,dt=0$ και όχι $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)\,dt=1$, όπως προκύπτει από την ιδιότητα (7). Το γεγονός ότι η συνάρτηση δ-Dirac παρουσιάζει μη-κανονική συμπεριφορά, προβλημάτισε τη μαθηματική κοινότητα για κάποιες δεκαετίες. Εντούτοις το 1940 ο *Laurent Schwartz***, στην κλασική μελέτη του *La Théorie de Distributions* θεμελίωσε με αυστηρούς μαθηματικούς όρους αυτή την αμφιλεγόμενη «συνάρτηση» του Dirac και οδήγησε στη δημιουργία ενός νέου κλάδου των μαθηματικών, αυτού της *Θεωρίας Κατανομών* ή *Γενικευμένων Συναρτήσεων*.

Στη σύγχρονη Θεωρία Κατανομών ο ορισμός (6) δεν είναι αποδεκτός, αφού δε νοείται να λέγεται ότι οι τιμές μιας συνάρτησης είναι 0 και ∞. Στα πλαίσια αυτού του συγγράμματος θα μπορούσαμε να πούμε



Laurent Schwartz
(1915-2002)

* *Paul Adrian Maurice Dirac* (1904-1984) Η συνάρτηση δ(t) έχει επινοηθεί από το Βρετανό φυσικό Paul Dirac. Μαζί με τους M. Planck, W. Heisenberg, E. Schrödinger και A. Einstein, ο Dirac υπήρξε ένας από τους πατέρες ενός νέου τρόπου περιγραφής της συμπεριφοράς των ατόμων, των μορίων και των στοιχειωδών σωματίων την περίοδο 1900-1930, αυτού που σήμερα αποτελεί την *κβαντομηχανική*. Ο Dirac και ο Schrödinger για την πρωτοποριακή εργασία τους μοιράστηκαν το βραβείο Nobel το 1933. Η συνάρτηση δ-Dirac χρησιμοποιήθηκε εκτενώς στην κλασική μελέτη του P. Dirac *The Principles of Quantum Mechanics* (1932).

** *Laurent Schwartz* (1915-2002). Γεννήθηκε στο Παρίσι. Υπήρξε καθηγητής στο Πανεπιστήμιο του Nancy (1945-1953), στην École Polytechnique (1959-1980), και στο Πανεπιστήμιο Paris VII (1980-1983). Μαθητές του υπήρξαν μεταξύ άλλων ο Alex. Grothendieck και ο Jacques-Louis Lions (1954). Βασικό του έργο ήταν η θεμελίωση της Θεωρίας Κατανομών, για το οποίο πήρε το Fields medal (1950). Σ' όλη του τη ζωή είχε έντονη πολιτική δράση.

ότι η συνάρτηση δ-Dirac (όπως και άλλες γενικευμένες συναρτήσεις) ορίζεται *από τη συνολική επίδραση που ασκεί σε άλλες συναρτήσεις μέσω της ολοκλήρωσης*. Για παράδειγμα έστω f(t) συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Τότε από το θεώρημα μέσης τιμής για ολοκληρώματα έχουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \delta_\varepsilon\left(t - t_0\right) dt = \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} f(t)\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right) dt = \frac{1}{2\varepsilon}\left(2\varepsilon\, f(c)\right) = f(c)\,,$$

όπου $c \in (t_0 - \varepsilon,\, t_0 + \varepsilon)$. Καθώς δε το $\varepsilon \to 0$, έχουμε ότι $c \to t_0$. Επομένως, ισχύει

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \delta\left(t - t_0\right) dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \delta_\varepsilon\left(t - t_0\right) dt = \lim_{\varepsilon \to 0} f(c) = f\left(t_0\right).$$

Έτσι έχουμε καταλήξει στο ακόλουθο αποτέλεσμα:

Θεώρημα 2 *(Ιδιότητα Διήθησης ή Κρησαρίσματος*) Έχουμε ότι*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \delta\left(t - t_0\right) dt = f\left(t_0\right). \tag{9}$$

Αν και χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό (6) για να αποδείξουμε την (9), εντούτοις αυτή η απόδειξη μπορεί να γίνει με αυστηρή μαθηματική διαδικασία. Η σχέση (9) μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελεί τον ορισμό της δ-Dirac. Η ιδιότητα (7) προκύπτει από την (9) στην ειδική περίπτωση που $f(t) \equiv 1$. Η σχέση (9) μας λέει ότι η δ-Dirac έχει την ιδιότητα να *ξεκαθαρίζει (κρησάρει)* την τιμή $f(t_0)$ από όλες τις τιμές f(t) της f, δηλαδή ορίζει ένα *γραμμικό συναρτησιακό*

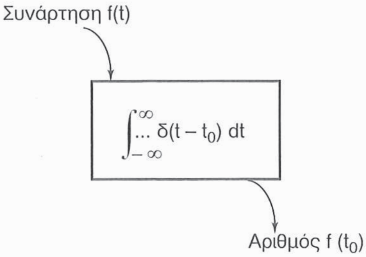
$$f \to f\left(t_0\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \delta\left(t - t_0\right) dt \qquad \text{(βλέπε Σχήμα 2).}$$

Η περαιτέρω ανάπτυξη του θέματος είναι αντικείμενο άλλου μαθηματικού επιπέδου, για το οποίο παραπέμπουμε στις αναφορές [L] και [SC].

Ως εφαρμογή της (9) μπορούμε εύκολα να δούμε ότι για κάθε $p \geq 0$, $a \geq 0$ και $b \in \mathbb{R}$ ισχύουν

$$\int_0^{\infty} \left(t^p \sin t\right) \delta(t - a)\, dt = a^p \sin a,$$

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} \cos bt\, \delta(t - a)\, dt = e^{-pa} \cos(ba).$$



***Σχήμα 2** Το κρησάρισμα της τιμής $f(t_0)$*

Παρατήρηση 3 Μια *φυσική εξήγηση* της συνάρτησης Dirac μπορεί να δοθεί με τη χρήση του *Νόμου του Newton*, στη μορφή

$$\frac{d}{dt}\{m\, v(t)\} = f(t)\,. \tag{10}$$

όπου v(t) η ταχύτητα ενός κινητού μάζας m στη χρονική στιγμή t, στο οποίο

* Απόδοση στα ελληνικά του όρου: Filtering or sifting property.

ασκείται συνολική εξωτερική δύναμη f(t). Ολοκληρώνοντας τη (10) μεταξύ των χρόνων t_0, t_1, έχουμε

$$m\,v(t_1) - m\,v(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} f(t)\,dt. \tag{11}$$

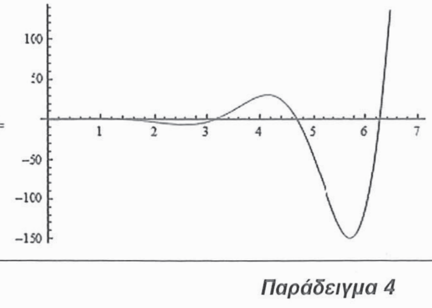
Το ολοκλήρωμα $\int_{t_0}^{t_1} f(t)dt$ ονομάζεται *ώθηση* της f(t) στο $[t_0, t_1]$. Η εξίσωση αυτή συνδέει τη *μεταβολή της ροπής* της μάζας m μεταξύ των χρόνων t_0, t_1 με το *ολοκλήρωμα (ώθηση) της εξωτερικής δύναμης* και όχι με τη δύναμη αυτή καθεαυτή.

Παράδειγμα 4 Να λυθεί το ακόλουθο πρόβλημα αρχικών τιμών με τη χρήση του μετασχηματισμού Laplace

$$y'' - 2y' + 5y = 2\delta(t-3), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \tag{α}$$

Λύση Εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό Laplace στο πρόβλημα (α) και έχουμε

```
In[1]:= eq = y''[t] - 2 y'[t] + 5 y[t] == 2 DiracDelta[t - 3]
Out[1]= 5 y[t] - 2 y'[t] + y''[t] == 2 DiracDelta[-3 + t]

In[2]:= eqL = LaplaceTransform[eq, t, s]
Out[2]= 5 LaplaceTransform[y[t], t, s] + s^2 LaplaceTransform[y[t], t, s] -
        2 (s LaplaceTransform[y[t], t, s] - y[0]) - s y[0] - y'[0] == 2 e^(-3 s)

In[3]:= sol = Solve[eqL, LaplaceTransform[y[t], t, s]]
Out[3]= {{LaplaceTransform[y[t], t, s] -> e^(-3 s) (2 - 2 e^(3 s) y[0] + e^(3 s) s y[0] + e^(3 s) y'[0]) / (5 - 2 s + s^2)}}

In[4]:= yL[s_] = sol[[1, 1, 2]] /. y[0] -> 0 /. y'[0] -> 1
Out[4]= e^(-3 s) (2 + e^(3 s)) / (5 - 2 s + s^2)

In[5]:= solution[t_] = InverseLaplaceTransform[yL[s], s, t]
Out[5]= -1/4 i e^((1-2 i) t) (-1 + e^(4 i t) + 2 e^(-3+6 i) (-1 + e^(4 i (-3+t))) HeavisideTheta[-3 + t])

In[6]:= FullSimplify[%]
Out[6]= 1/2 e^t (-(2 HeavisideTheta[-3 + t] Sin[6 - 2 t])/e^3 + Sin[2 t])

In[7]:= Plot[%, {t, 0, 7}]
Out[7]=
```



Παράδειγμα 4

$$\left[s^2\, Y(s) - 1\right] - 2\, \left[s\, Y(s)\right] + 5\, Y(s) = 2\, e^{-3s} \quad ή \quad Y(s) = \frac{1 + 2\, e^{-3s}}{s^2 - 2s + 5} = \frac{1 + 2\, e^{-3s}}{(s-1)^2 + 4} \; .$$

Επειδή δε
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\left[(s-1)^2 + 4\right]^{-1}\right\} = \frac{1}{2}\, e^t \sin 2t = y_0(t) \, ,$$

θα έχουμε επίσης

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2\, e^{-3\,s}}{(s-1)^2 + 4}\right\} = H_3(t)\, e^{t-3} \sin 2\,(t - 3\,) = y_1(t) \, .$$

Επομένως, η λύση του προβλήματος (α) είναι

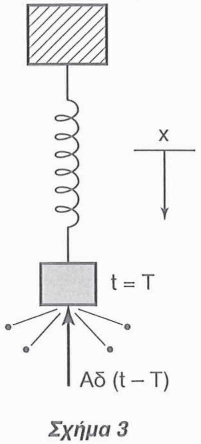
$$y(t) = y_0(t) + y_1(t) = \frac{1}{2}\, e^t \sin 2t + H_3(t)\, e^{t-3} \sin(2t - 6) \, . \qquad (β)$$

Ο πρώτος όρος $y_0(t)$ της (β) είναι η ειδική λύση του ομογενούς μέρους του προβλήματος αρχικών τιμών (α). Ο δεύτερος όρος $y_1(t)$ στη (β) είναι η ανταπόκριση του συστήματος στην εξωτερική επίδραση $2\delta(t–3)$, η οποία είναι μηδέν παντού εκτός του χρονικού σημείου $t = 3$, όμως επηρεάζει τη λύση για όλο το χρόνο $t \geq 3$. Ο όρος $y_1(t)$ είναι συνεχής ως προς t παρά την ισχυρή ασυνέχεια της εξωτερικής επίδρασης $2\delta(t–3)$. Η πρώτη παράγωγος $y_1'(t)$ είναι ασυνεχής στο $t=3$. Αυτή ακριβώς η ασυνέχεια οφείλεται στην ώθηση $2\delta(t–3)$. Η δεύτερη παράγωγος $y_1''(t)$ έχει τις ίδιες ιδιότητες με την ώθηση $\delta(t–3)$. ■

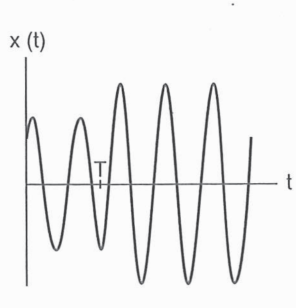
Παράδειγμα 5 Το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$x'' + \omega^2\, x = A\, \delta\,(t - T) \, , \quad x(0) = a \, , \quad x'(0) = b \, , \qquad (α)$$

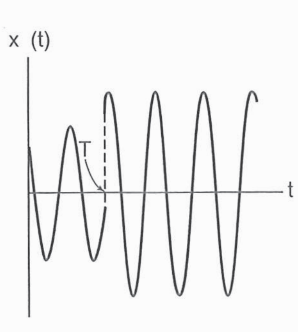
περιγράφει τη συμπεριφορά ενός ελατηρίου που ταλαντώνεται και δέχεται ξαφνικά τη χρονική στιγμή $t = T$ μια ώθηση από μια εξωτερική επίδραση μεγέθους $A\delta(t - T)$. Τα a, b αποτελούν τις αρχικές συνθήκες. (βλέπε Σχήμα 3).



Σχήμα 3



Σχήμα 4



Σχήμα 5

Λύση Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό Laplace στα δύο μέρη της (α), έχουμε

$$\left(s^2 + \omega^2\right) Y(s) - sa - b = A\, e^{-Ts} \, , \quad όπου \quad Y(s) = \mathcal{L}\,\{x(t)\} \, .$$

Επομένως, προκύπτει ότι

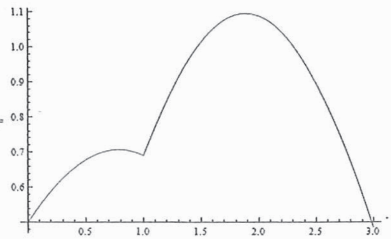
$$Y(s) = \frac{sa + b}{s^2 + \omega^2} + \frac{A\, e^{-Ts}}{s^2 + \omega^2}\,. \tag{β}$$

Η εφαρμογή του $\mathcal{L}^{-1}$ στη (β) δίδει τη λύση του προβλήματος (α), που είναι

$$x(t) = a \cos \omega t + \frac{b}{\omega} \sin \omega t + \frac{A}{\omega} H_T(t) \sin \omega (t - T)\,.$$

Ας σημειωθεί ότι η x(t) είναι συνεχής παντού, ενώ η x′(t) παρουσιάζει ένα άλμα ασυνέχειας στο t = T, όπως φαίνεται στα Σχήματα 4 και 5. Η δε x″(t) έχει τη μορφή ασυνέχειας της δ(t – T).

```
In[1]:= eq = y''[t] + w^2 y[t] == A DiracDelta[t - T]
Out[1]= w^2 y[t] + y''[t] == A DiracDelta[t - T]

In[2]:= eqL = LaplaceTransform[eq, t, s]
Out[2]= s^2 LaplaceTransform[y[t], t, s] + w^2 LaplaceTransform[y[t], t, s] - s y[0] - y'[0] == A e^(-s T) HeavisideTheta[T]

In[3]:= sol = Solve[eqL, LaplaceTransform[y[t], t, s]]
Out[3]= {{LaplaceTransform[y[t], t, s] -> (e^(-s T) (A HeavisideTheta[T] + e^(s T) s y[0] + e^(s T) y'[0]))/(s^2 + w^2)}}

In[4]:= yL[s_] = sol[[1, 1, 2]] /. y[0] -> a /. y'[0] -> b
Out[4]= (e^(-s T) (b e^(s T) + a e^(s T) s + A HeavisideTheta[T]))/(s^2 + w^2)

In[5]:= solution[t_] = InverseLaplaceTransform[yL[s], s, t] /. A -> 1 /. w -> 1 /. T -> 1 /. a -> 1/2 /. b -> 1/2
Out[5]= Cos[t]/2 - HeavisideTheta[-1 + t] Sin[1 - t] + Sin[t]/2

In[6]:= FullSimplify[%]
Out[6]= 1/2 (Cos[t] - 2 HeavisideTheta[-1 + t] Sin[1 - t] + Sin[t])

In[7]:= Plot[solution[t], {t, 0, 3}]
Out[7]=
```

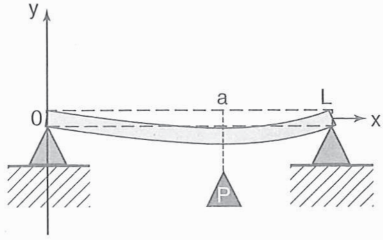


Παράδειγμα 5 ■

Παράδειγμα 6 Θεωρούμε μια απλή *αμφιέρειστη δοκό* μήκους L αμελητέου βάρους, στην οποία εφαρμόζεται φορτίο P στο σημείο x = a μεταξύ των άκρων. Η διαφορική εξίσωση της ελαστικής γραμμής της δοκού είναι

$$y^{(4)}(x) = \frac{1}{EI} P\, \delta(x - a)\,, \tag{α}$$

όπου E είναι η σταθερά του Young και I η ροπή αδράνειας της διατομής στο x ως προς την οριζόντια γραμμή διαμέσου του γεωμετρικού κέντρου. Οι συνθήκες στα



Σχήμα 6 *Αμφιέρειστη δοκός*

άκρα x = 0, x = L είναι

$$y(0) = y''(0) = y(L) = 0, \quad y'''(0) = Q, \tag{β}$$

όπου Q είναι η τέμνουσα δύναμη στο αριστερό άκρο x = 0 (βλέπε Σχήμα 6).

Λύση Η εφαρμογή του μετασχηματισμού Laplace στο πρόβλημα (α) και (β) δίδει

$$s^4\,Y(s) - s^3\,y(0) - s^2\,y'(0) - s\,y''(0) - y^{(3)}(0) = \frac{P}{EI}\,e^{-as}, \text{ όπου } Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\},$$

$$\text{ή } s^4\,Y(s) - s^2\,y'(0) - Q = \frac{P}{EI}\,e^{-as} \text{ ή } Y(s) = \frac{P}{EI}\,\frac{e^{-as}}{s^4} + \frac{y'(0)}{s^2} + \frac{Q}{s^4}\,. \tag{γ}$$

Εφαρμόζοντας τώρα τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace $\mathcal{L}^{-1}$ στη (γ) προκύπτει η λύση του προβλήματος (α) και (β), που είναι

$$y(x) = \frac{P}{EI}\,\frac{(x-a)^3}{6}\,H_a(x) + y'(0)\,x + \frac{Q\,x^3}{6}\;.$$

In[1]:= `eq = y''''[t] == A DiracDelta[t - a]`

Out[1]= $y^{(4)}[t] == A\,\mathrm{DiracDelta}[-a+t]$

In[2]:= `eqL = LaplaceTransform[eq, t, s]`

Out[2]= $s^4\,\mathrm{LaplaceTransform}[y[t], t, s] - s^3\,y[0] - s^2\,y'[0] - s\,y''[0] - y^{(3)}[0] == A\,e^{-a\,s}\,\mathrm{HeavisideTheta}[a]$

In[3]:= `sol = Solve[eqL, LaplaceTransform[y[t], t, s]]`

Out[3]= $\left\{\left\{\mathrm{LaplaceTransform}[y[t], t, s] \to \dfrac{e^{-a\,s}\left(A\,\mathrm{HeavisideTheta}[a] + e^{a\,s}\,s^3\,y[0] + e^{a\,s}\,s^2\,y'[0] + e^{a\,s}\,s\,y''[0] + e^{a\,s}\,y^{(3)}[0]\right)}{s^4}\right\}\right\}$

In[4]:= `yL[s_] = sol[[1, 1, 2]] /. y[0] → 0 /. y''[0] → 0 /. y'''[0] → Q /. y'[0] → y1`

Out[4]= $\dfrac{e^{-a\,s}\left(e^{a\,s}\,Q + e^{a\,s}\,s^2\,y1 + A\,\mathrm{HeavisideTheta}[a]\right)}{s^4}$

In[5]:= `solut[t_] = InverseLaplaceTransform[yL[s], s, t]`

Out[5]= $\dfrac{1}{6}\left(Q\,t^3 + 6\,t\,y1 + A\,(-a+t)^3\,\mathrm{HeavisideTheta}[a]\,\mathrm{HeavisideTheta}[-a+t]\right)$

In[6]:= `Solve[solut[L] == 0, y1]`

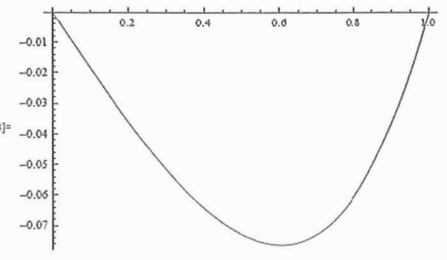
Out[6]= $\left\{\left\{y1 \to \dfrac{-\frac{L^3 Q}{6} - \frac{1}{6}\,A\,(-a+L)^3\,\mathrm{HeavisideTheta}[a]\,\mathrm{HeavisideTheta}[-a+L]}{L}\right\}\right\}$

In[7]:= `solution[t_] = solut[t] /. y1 → %[[1, 1, 2]] /. A → 1 /. Q → 1 /. L → 1 /. a → 1/2`

Out[7]= $\dfrac{1}{6}\left(-\dfrac{9\,t}{8} + t^3 + \left(-\dfrac{1}{2} + t\right)^3 \mathrm{HeavisideTheta}\left[-\dfrac{1}{2} + t\right]\right)$

In[8]:= `Plot[solution[t], {t, 0, 1}]`

Out[8]=



Παράδειγμα 6

Για τον προσδιορισμό του $y'(0)$ χρησιμοποιούμε τη συνθήκη $y(L) = 0$, η οποία δίδει

$$0 = y(L) = \frac{P}{EI}\frac{(L-a)^3}{6} + y'(0)\,L + \frac{Q\,L^3}{6} \quad \text{ή} \quad y'(0) = -\frac{P}{LEI}\frac{(L-a)^3}{6} - \frac{Q\,L^2}{6}\,.$$

Έτσι η λύση του προβλήματος (α) και (β) είναι τελικά

$$y(x) = \frac{P}{EI}\frac{(x-a)^3}{6} H_a(x) - \left(\frac{P}{LEI}\frac{(L-a)^3}{6} - \frac{Q\,L^2}{6}\right)x + \frac{Q\,x^3}{6}\,.$$

■

7.7 Προβλήματα

1. Να αποδειχθεί ότι, αν $a \neq 0$, τότε $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$.

2. Να αποδειχθεί ότι, αν $ad \neq bc$, τότε $\delta(at + b\tau)\,\delta(ct + d\tau) = \frac{1}{|ad - bc|}\delta(t)\,\delta(\tau)$.

3. Έστω a σταθερά. Να αποδειχθεί ότι κάθε λύση της διαφορικής εξίσωσης $y'' + 2a\,y' + a^2\,y = 0$ μπορεί να γραφεί με τη μορφή $y(t) = [c_1 + c_2\,(t-a)]\,e^{-a(t-a)}$.

4. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών $y'' + 4y' + 5y = f(t)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, όπου η $f(t)$ είναι μια δύναμη ώθησης, που δρα στο πολύ μικρό διάστημα χρόνου $[1, 1+\tau]$ και ικανοποιεί τη σχέση

$$\int_1^{1+\tau} f(t)\,dt = 2\,.$$

5. (a) Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών $y'' - 3y' + 2y = f(t)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, όπου $f(t)$ είναι η μια δύναμη ώθησης που δρα στο πολύ μικρό χρονικό διάστημα $[2, 2+\tau]$ και ικανοποιεί τη σχέση $\int_2^{2+\tau} f(t)\,dt = -1$.

(b) Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών συνθηκών $y'' - 3y' + 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, στο διάστημα $0 \le t \le 2$. Να υπολογισθεί το $z_0 = y(2)$ και το $z_1 = y'(2)$. Στη συνέχεια να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών: $y'' - 3y' + 2y = 0$, $y(2) = z_0$, $y'(2) = z_1 - 1$, στο $2 \le t < \infty$. Να συγκριθούν αυτή η λύση και η λύση του μέρους (a).

6. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών $y''(t) + y(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \delta(t - j\pi)$ $y(0) = y'(0) = 0$ και να αποδειχθεί ότι

$$y(t) = \begin{cases} \sin t\,, & n \text{ άρτιος}\,, \\ 0\,, & n \text{ περιττός}\,, \end{cases}$$

στο διάστημα $t \in (n\pi, (n+1)\pi)$ $\left(\text{ή} \quad y(t) = \sum_{j=0}^{\infty} H_{j\pi}(t)\sin(t - j\pi)\right)$.

7. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών $y'' + y = \sum_{j=0}^{\infty} \delta(t - 2j\pi)$, $y(0) = y'(0) = 0$ και να αποδειχθεί ότι $y(t) = (n+1)\sin t$, για $t \in (2n\pi, 2(n+1)\pi)$. (Το πρόβλημα αυτό δείχνει γιατί στρατιωτικά αγήματα θα πρέπει να αποσυγχρονίσουν το βηματισμό τους, όταν διέρχονται από γέφυρες!!!).

8. Έστω η

$$f(t) = \begin{cases} 1/2\,, & \text{για } t > t_0\,, \\ 0\,, & \text{για } t = t_0\,, \\ -1/2\,, & \text{για } t < t_0\,, \end{cases}$$

και το γραμμικό συναρτησιακό $k[\varphi] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, f(t)\, dt$. Να αποδειχθεί ότι $k'[\varphi] \equiv k[-\varphi'] = \varphi(t_0)$. Έτσι η $\delta(t - t_0)$ μπορεί να θεωρηθεί ως η $f'(t)$.

9. (a) Να αποδειχθεί με τη μέθοδο μεταβολής των σταθερών ότι η μοναδική λύση του προβλήματος αρχικών τιμών $y'' + 2y' + 2y = f(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, είναι $y(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)} f(\tau) \sin(t - \tau)\, d\tau$. (b) Να αποδειχθεί στη συνέχεια ότι, αν $f(t) = \delta(t - \pi)$, τότε η λύση του μέρους (a) παίρνει τη μορφή $y(t) = H_\pi(t)\, e^{-(t-\pi)} \sin(t - \pi)$.

10. Να αποδειχθούν τα ακόλουθα για κάποιο a>0:

(a) $\mathcal{L}\{H'_a(t)\} = s\,\mathcal{L}\{H_a(t)\} - H_a(0) = e^{-as} = \mathcal{L}\{\delta(t-a)\}$,

(b) $\mathcal{L}\{\delta'(t-a)\} = s\, e^{-as}$,   (c) $\mathcal{L}\{\delta''(t-a)\} = s^2 e^{-as}$,

(d) $\mathcal{L}\{(H_a(t) - H_d(t))'\} = s\{e^{-as} - e^{-bs}\}$, $0 < a < b$.

11. Γνωρίζουμε ότι $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$. Συμβολίζουμε με $h_k(x) = \sqrt{\frac{k}{\pi}}\, e^{-kx^2}$. Τότε (a) Να υπολογισθεί το $\int_{-\infty}^{\infty} h_k(x)\, dx$ και να γίνει η γραφική παράσταση για k = 1, 5, 10. (b) Να αποδειχθεί ότι για κάθε φραγμένη και συνεχή συνάρτηση f(x) ισχύει $\lim_{k\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, h_k(x-a)\, dx = f(a)$, για κάθε $a \in \mathbb{R}$. (c) Τέλος, να βρεθεί το $\lim_{k\to\infty} h_k(t-a)$.

12. Έστω $g(t, a, b) = \dfrac{[H_a(t) - H_b(t)]}{b - a}$, όπου a<c<b, για κάποιο c>0. (a) Να αποδειχθεί ότι για κάθε συνεχή συνάρτηση f(t), ισχύει

$$\lim_{b\to c^+,\, a\to c^-} \int_0^{\infty} g(t, a, b)\, f(t)\, dt = f(c).$$

(b) Να βρεθεί το όριο της g(t, a, b), καθώς τα $a \to c^-$, $b \to c^+$.

13. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών $y'' + \omega^2 y = \delta(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$. Η λύση y(t) ικανοποιεί τη συνθήκη $y'(0) = 0$;

14. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών $L\, i'(t) + R\, i(t) = \delta(t)$, $i(0) = 0$. Η λύση i(t) ικανοποιεί τη συνθήκη i(0) = 0;

15 Να αποδειχθεί ότι $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \delta'(t)\, dt = -f'(0)$ και γενικότερα ισχύει ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \delta^{(n)}(t)\, dt = (-1)^n f^{(n)}(0)\,.$$

• Να λυθούν τα ακόλουθα προβλήματα αρχικών τιμών με τη χρήση του μετασχηματισμού Laplace:

16. $y'' + y = \sin t + \delta(t-\pi)$, $t > 0$, $y(0) = y'(0) = 0$

17. $y'' + y' + y = 2\delta(t-1) - \delta(t-2)$, $t > 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

18. $y'' + 2y' + y = e^{-t} + 3\,\delta(t-3)$, $t > 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$

19. $y'' + 2y' + y = \delta(t) + H_{2\pi}(t)$, $t > 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

20. $y'' + 2y' + 3y = \sin t + \delta(t-\pi)$, $t > 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

21. $y'' + \omega^2 y = \delta(t - \pi/\omega)$, $t > 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

22. $y'' + y = \delta(t-\pi)\cos t$, $t > 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

23. $y'' - 4y' + 4y = 2\delta(t-1) - \delta(t-2)$, $t > 0$, $y(0) = y'(0) = 0$

24. $N''(x) - N(x) = \pi\,\delta(x-2) - \pi\,\delta(x-4)$, $x > 0$, $N(0) = N'(0) = 0$

25. $w'' + w = \sin t\,\delta\left(t - \frac{3\pi}{2}\right)$, $t > 0$, $w(0) = 2$, $w'(0) = 0$

26. $R'' + 9R = 3x\,\delta(x-\pi)$, $x > 0$, $R(0) = R'(0) = 0$

27. Η διαφορική εξίσωση της ελαστικής γραμμής μιας δοκού, στην οποία εφαρμόζεται φορτίο P στο σημείο x = a, είναι $EI\,y^{(4)}(x) = P\,\delta(x-a)$, $0 < x < 2a$ (βλέπε Παράδειγμα 6). Να λυθεί η εξίσωση, όταν ισχύουν οι συνοριακές συνθήκες: $y(0) = y'(0) = y''(2a) = y'''(2a) = 0$.

7.8 ΣΥΝΕΛΙΞΗ

Η θεωρία που θα αναπτυχθεί σ' αυτή την παράγραφο αναφέρεται στην έννοια ενός *γενικευμένου γινομένου συναρτήσεων*, το οποίο ονομάζεται *συνέλιξη*. Με τη μέθοδο αυτή είναι δυνατόν να υπολογισθεί άμεσα ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace συναρτήσεων, που μπορούν να αναλυθούν σε παράγοντες, των οποίων είναι γνωστοί οι αντίστροφοι μετασχηματισμοί.

Ορισμός 1 *Έστω f(t), g(t) δύο πραγματικές συναρτήσεις. Ορίζουμε ως* ***συνέλιξη*** *των f(t), g(t) και συμβολίζουμε με f∗g το ολοκλήρωμα*

$$(f*g)(t) = \int_0^t f(t-u)\,g(u)\,du. \qquad (1)$$

Παρατήρηση 2 Για την καλύτερη κατανόηση της έννοιας της συνέλιξης, επιβάλλεται να παρατηρήσουμε ότι **(i)** ο τύπος (1) αντιστοιχεί μια αριθμητική τιμή (f ∗ g) (t) σε κάθε t, δηλαδή το t δρα ως σταθερά σε σχέση με την ολοκλήρωση. Μεταβλητή της ολοκλήρωσης είναι το u με άκρα u = 0 και u = t. **(ii)** Η πρώτη συνάρτηση της ολοκλήρωσης εξαρτάται τόσο από το u όσο και από το t. Γι' αυτό γίνεται προσπάθεια να *διαχωρισθεί* η f(t - u) σε γινόμενο δύο συναρτήσεων των t και u, αντίστοιχα.

Παρατήρηση 3 Η συνέλιξη παρουσιάζεται κατά τη μελέτη κυρίως των φαινομένων εκείνων των οποίων η συμπεριφορά κατά τη χρονική στιγμή t εξαρτάται τόσο από το t όσο και από την *«προηγηθείσα ιστορία»* του συστήματος. Τέτοια συστήματα ονομάζονται *«κληρονομικά»* και παρουσιάζονται σε διάφορες περιοχές των εφαρμογών, όπως *βισκοελαστικότητα*, *δυναμική πληθυσμών*, *μεταφορά νετρονίων*, *μετάδοση θερμότητας*, *κυματική*, *μετατόπιση πετρωμάτων*, καθώς και σε διάφορες άλλες περιοχές της *μαθηματικής φυσικής*. Επίσης η συνέλιξη παίζει σπουδαίο ρόλο στην ανάπτυξη κλάδων των *θεωρητικών μαθηματικών*, όπως η *Θεωρία Κατανομών* και οι *Πιθανότητες*.

Είναι φανερό ότι η συνέλιξη $(f*g)(t)$ όπως ορίζεται έχει πολλές ομοιότητες με το γινόμενο των συναρτήσεων f, g. Επομένως, δεν αποτελεί καθόλου έκπληξη το γεγονός ότι η συνέλιξη ικανοποιεί κάποιες από τις ιδιότητες του γινομένου.

Θεώρημα 4 *(Ιδιότητες) Έστω $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$, τμηματικά συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[0, +\infty)$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα: (i) Μεταθετική ιδιότητα: $(f * g)(t) = (g * f)(t)$. (ii) Προσεταιριστική ιδιότητα: $(f * g) * h = f * (g * h)$. (iii) Επιμεριστική ιδιότητα: $f * (g + h) = f * g + f * h$. (iv) Μηδενικό στοιχείο: αν $g(t) \equiv 0$, τότε $(f * g)(t) \equiv 0$. (v) Μοναδιαίο στοιχείο:* $(f * \delta)(t) = f(t)$.

Απόδειξη (i) Από τον ορισμό της συνέλιξης έχουμε $(f * g)(t) = \int_0^t f(t-u)\,g(u)\,du$. Με την αντικατάσταση $t - u = s$ έχουμε

$$(f * g)(t) = -\int_t^0 f(s)\,g(t-s)\,ds = \int_0^t g(t-s)\,f(s)\,ds = (g * f)(t).$$

(ii)-(iv) Άμεσα από τον ορισμό.
(v) Από τον ορισμό της συνέλιξης και της δ-Dirac έχουμε

$$(f * \delta)(t) = \int_0^t f(t-u)\,\delta(u)\,du = f(t).$$

◆

Παρατήρηση 5 *(Διαφορές)* Η συνέλιξη όμως λόγω της φύσης της έχει αρκετές χαρακτηριστικές διαφορές με το γινόμενο, όπως φαίνεται στα ακόλουθα παραδείγματα.

(i) Αν $f(t) = t^n$, $g(t) \equiv 1$, τότε $(f * g)(t) = (g * f)(t) = \int_0^1 1\, r^n\, dr = \dfrac{t^{n+1}}{n+1} \neq t^n$ δηλαδή εδώ η συνέλιξη της $f(t) = t^n$ και της μονάδας $g(t) \equiv 1$ αντιστοιχεί στην ολοκλήρωση της $f(t)$!

(ii) Αν $f(t) = \cos t$, τότε έχουμε

$$(f * f)(t) = \int_0^1 \cos(t-u)\cos u\,du = \int_0^t \left(\cos t \cos^2 u + \sin t \sin u \cos u\right) du$$

$$= \cos t \int_0^t \frac{1+\cos 2u}{2}\,du + \sin t \int_0^t \sin u \cos u\,du$$

$$= \cos t \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right] + \frac{\sin^3 t}{2} = \frac{t\cos t + \sin t}{2}.$$

Παρατηρούμε ότι η τελευταία συνάρτηση είναι αρνητική, όταν $(2n+1)\pi \le t \le (2n+1)\pi + \frac{\pi}{2}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Επομένως, γενικά η $(f*f)(t)$ *δεν είναι θετική!*

(iii) Είναι δυνατόν να πολλαπλασιάσουμε δύο συνεχείς συναρτήσεις f(t) g(t) μη-μηδενικές ταυτοτικά και να προκύψει $f(t)\,g(t) \equiv 0$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Πράγματι, έστω

$$f(t) = \begin{cases} 5, & t \in (-1, 5), \\ 0, & \text{αλλού}, \end{cases} \quad \text{και} \quad g(t) = \begin{cases} 0, & t \in (-3, 8), \\ 10, & \text{αλλού}. \end{cases}$$

Τότε προφανώς $f(t)\,g(t) \equiv 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Όμως στη συνέλιξη, αν $f(t) \not\equiv 0$, $g(t) \not\equiv 0$ στο $\mathbb{R}$, τότε γενικά $(f * g)(t) \not\equiv 0$ στο $\mathbb{R}$. Αυτό συμβαίνει γιατί στη συνέλιξη έχουμε δράση της μιας συνάρτησης επί της άλλης μέσω της ολοκλήρωσης *σ' όλο το πεδίο* και *όχι σημειακά*, όπως συμβαίνει στο γινόμενο!

Για την εύρεση του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace το επόμενο θεώρημα είναι ιδιαίτερα χρήσιμο.

Θεώρημα 6 *Αν οι συναρτήσεις f(t) και g(t) έχουν μετασχηματισμό Laplace, τότε ισχύει* $\mathcal{L}\{(f*g)(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\,\mathcal{L}\{g(t)\}$.

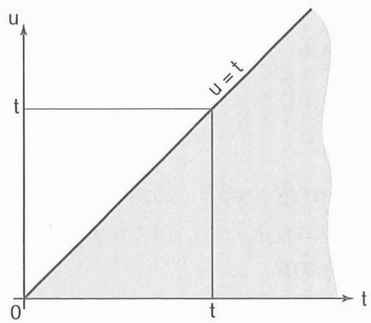
Απόδειξη Από τον ορισμό έχουμε

$$\mathcal{L}\{(f*g)(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\left[\int_0^t f(t-u)\,g(u)\,du\right]dt = \int_0^\infty \int_0^t e^{-st} f(t-u)\,g(u)\,du\,dt.$$

Στο Σχήμα 1 φαίνεται το πεδίο ολοκλήρωσης, που είναι $0 \le u \le t$, $0 \le t < \infty$ και το οποίο μπορεί να γραφεί στη μορφή $u \le t < \infty$, $0 \le u < \infty$. Επομένως, αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης προκύπτει

$$\mathcal{L}\{(f*g)(t)\} = \int_0^\infty \int_u^\infty e^{-st} f(t-u)\,g(u)\,dt\,du.$$

Με τις αντικαταστάσεις $\omega = t - u$, $v = u$ και τα αντίστοιχα όρια μεταβολής $0 \le \omega < \infty$, $0 \le v < \infty$, προκύπτει



Σχήμα 1

$$\mathcal{L}\{(f*g)\}(t) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(v+\omega)} f(\omega)\,g(v)\,d\omega\,dv$$

$$= \int_0^\infty e^{-s\omega} f(\omega)\,d\omega \int_0^\infty e^{-sv} g(v)\,dv = \mathcal{L}\{f(t)\}\,\mathcal{L}\{g(t)\}. \quad \blacklozenge$$

Εύκολα αποδεικνύεται το επόμενο:

Πόρισμα 7 *Αν οι F(s), G(s) έχουν αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace, τότε*

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\;G(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} * \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}.$$

Από τα επόμενα παραδείγματα θα γίνει φανερή η σπουδαιότητα του τελευταίου τύπου.

Παράδειγμα 8 Να βρεθεί η συνάρτηση $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s^2+1)^2}\right\}$.

Λύση Επειδή η συνάρτηση είναι γραμμένη ήδη με τη μορφή απλών κλασμάτων, γίνεται φανερό ότι δεν μπορεί να μας βοηθήσει η σχετική θεωρία της Ενότητας 7.4. Όμως εφαρμόζοντας το τελευταίο Πόρισμα προκύπτει

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\,\frac{1}{s^2+1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} * \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}$$

$$= \cos t * \sin t = \int_0^t \cos(t-u)\sin u\,du = \int_0^t (\cos t\cos u + \sin t\sin u)\sin u\,du$$

$$= (\cos t)\int_0^t \sin u\,d(\sin u) + (\sin t)\int_0^t \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos u\right)du$$

$$= \frac{1}{2}\cos t\,\sin^2 t + \frac{t}{2}\sin t - \frac{1}{4}\sin t\sin 2t$$

$$= \frac{1}{2}\cos t\sin^2 t + \frac{t}{2}\sin t - \frac{1}{2}\cos t\sin^2 t = \frac{t}{2}\sin t.$$

```
In[1]:= InverseLaplaceTransform[s / (s^2 + 1) ^2, s, t]

         1
Out[1]= - t Sin[t]
         2
```

Παράδειγμα 8

■

Παράδειγμα 9 Να βρεθεί η συνάρτηση $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(s^2+4)^{-2}\right\}$.

Λύση *1η Μέθοδος:* Θέτουμε

$$F(s) = \frac{1}{s^2+4}\,\frac{1}{s^2+4}, \quad \text{όπου} \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\} = \frac{1}{2}\sin 2t.$$

Επομένως, θα έχουμε $f(t) = \left(\frac{1}{2}\sin 2t\right) * \left(\frac{1}{2}\sin 2t\right) = \ldots$, όπου όμως η ολοκλήρωση παρουσιάζει κάποιες δυσκολίες (Προσπαθήστε!)

2η Μέθοδος: Έχουμε ότι $F(s) = \left(-\frac{1}{4s}\right)\left(\frac{-4s}{(s^2+4)^2}\right) = \left(-\frac{1}{4s}\right)\left(\frac{d}{ds}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}\right)$. Έτσι προκύπτει

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{4s}\right\} * \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-4s}{(s^2+4)^2}\right\} = \left(\frac{-1}{4}\right) * (-t\sin 2t)$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^t r\sin 2r\,dr = \frac{1}{4}\left[r\,\frac{\cos 2r}{-2}\Big|_0^t + \frac{1}{2}\int_0^t \cos 2r\,dr\right] = -t\,\frac{\cos 2t}{8} + \frac{1}{16}\sin 2t.$$

3η Μέθοδος: Μπορούμε τέλος να κάνουμε χρήση της ακόλουθης ανάλυσης

$$f(t)=\left[\frac{1}{2}*(\sin 2t)\right]*(\cos 2t)=\frac{1}{4}(1-\cos 2t)*(\cos 2t)\,.$$

```
In[2]:= InverseLaplaceTransform[(s^2 + 4)^(-2), s, t]

         1
Out[2]= ── (-2 t Cos[2 t] + Sin[2 t])
        16
```

Παράδειγμα 9 ■

Στο επόμενο παράδειγμα δίδεται ένας γενικός τρόπος υπολογισμού της λύσης *δευτεροβάθμιας μη-ομογενούς γραμμικής εξίσωσης* με σταθερούς συντελεστές, που ικανοποιεί δοσμένες αρχικές συνθήκες. Εδώ γίνεται χρήση των ιδιοτήτων τόσο του μετασχηματισμού Laplace όσο και της συνέλιξης.

Παράδειγμα 10 Να μελετηθεί το ακόλουθο γενικό πρόβλημα αρχικών τιμών

$$a\,y''+b\,y'+cy=f(t)\,,\qquad t>0 \tag{α}$$

$$y(0)=y_0\,,\quad y'(0)=y_1\,. \tag{β}$$

Λύση Ο μετασχηματισμός Laplace της εξίσωσης (α) είναι

$$\left(a\,s^2+b\,s+c\right)Y(s)-(as+b)\,y(0)-a\,y'(0)=F(s)\,, \tag{γ}$$

όπου $\mathcal{L}\{y(t)\}=Y(s)$ και $\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$. Χρησιμοποιώντας τη (β) η (γ) γίνεται

$$Y(s)=\frac{F(s)+(as+b)\,y_0+a\,y_1}{a\,s^2+bs+c}\,.$$

Έτσι η Y(s) μπορεί να θεωρηθεί γινόμενο των συναρτήσεων $G(s)=F(s)+(as+b)\,y_0+a\,y_1$ και $H(s)=\left(a\,s^2+bs+c\right)^{-1}$. Αξίζει να σημειωθεί εδώ ότι η συνάρτηση H(s) χαρακτηρίζεται πλήρως από το σύστημα. Γι' αυτό ονομάζεται ***συνάρτηση του συστήματος*** (α), (β). Ενώ η δεύτερη συνάρτηση G(s) εξαρτάται από την εξωτερική επίδραση f(t) και τις αρχικές συνθήκες, ονομάζεται δε ***συνάρτηση διέγερσης*** ή ***εξωτερική δράση*** του προβλήματος (α) και (β). Ειδικότερα, η συνάρτηση διέγερσης G(s) αποτελείται από τη συνάρτηση F(s) –το μετασχηματισμό της εξωτερικής επίδρασης f(t)– και τη συνάρτηση $(as+b)\,y_0+ay_1$, η οποία εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες. Έτσι έχουμε

$$Y(s)=H(s)\,F(s)+\frac{(as+b)\,y_0+a\,y_1}{as^2+bs+c}\,.$$

Εδώ παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $(as+b)\,y_0+ay_1$ δεν μπορεί να είναι μετασχηματισμός Laplace καμιάς από τις συνήθεις συναρτήσεις, αφού τείνει στο ∞, καθώς το $s\to\infty$ (βλέπε Πόρισμα 2, Ενότητα 7.2). Με τη χρήση των ιδιοτήτων της συνέλιξης (βλέπε Πόρισμα 7), θέτοντας $h(t)=\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$ έχουμε

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)F(s)\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(as+b)y_0 + ay_1}{as^2+bs+c}\right\}$$

$$= \int_0^t h(t-r)f(r)\,dr + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(as+b)y_0 + ay_1}{as^2+bs+c}\right\}$$

$$= \int_0^t h(t-r)f(r)\,dr + y_0\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{as+b}{as^2+bs+c}\right\} + y_1\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a}{as^2+bs+c}\right\}.$$

Αν θέσουμε $y_a(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{as+b}{as^2+bs+c}\right\}$ και $y_b(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a}{as^2+bs+c}\right\}$, τότε

$$y(t) = \int_0^t h(t-r)f(r)\,dr + y_0\,y_a(t) + y_1\,y_b(t).$$

Εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί ότι ο πρώτος όρος του δεύτερου μέλους παριστάνει την *ειδική λύση* της μη-ομογενούς, ενώ οι άλλοι δύο όροι αποτελούν τη *γενική λύση* της ομογενούς, όπου τα y_0, y_1 θεωρούνται οι αυθαίρετες σταθερές. ■

7.8 Προβλήματα

• Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace των ακόλουθων συναρτήσεων με τη χρήση της Θεωρίας Συνέλιξης:

1. $\dfrac{1}{(s^2+4)(s^2-4)}$ **2.** $\dfrac{s^2}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$ **3.** $\dfrac{s}{(s^2+a^2)(s^2-b^2)}$

4. $\dfrac{s}{(s^2-a^2)(s^2-b^2)}$ **5.** $\dfrac{1}{s(s^2+a^2)^2}$ **6.** $\dfrac{1}{(s+2)(s^2-9)}$

7. $\dfrac{e^{-4s}}{s(s+2)}$ **8.** $\dfrac{1}{(s-5)[(s-3)^2+8]}$ **9.** $\dfrac{1}{(s-a)^n}$

10. $\dfrac{1}{(s^2+4)^2}$ **11.** $\dfrac{s}{(s-1)(s+2)}$

• Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace των ακόλουθων συναρτήσεων:

12. $\int_0^t (t-r)^3 \sin 4r\,dr$ **13.** $\int_0^t \sin(t-r)(-r\cos 2r)\,dr$

14. $\int_0^t \sqrt{t-r}\,(-r)^3 \cos r\,dr$ **15.** $\int_0^t \cos a(t-r)\cos br\,dr$

16. $\int_0^t \sin a(t-r)\sin ar\,dr$

• Με τη χρήση της συνέλιξης να υπολογισθούν οι ακόλουθες παραστάσεις συναρτήσει της $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$:

17. $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}F(s)\right]$ **18.** $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}F(s)\right]$ **19.** $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{F(s)}{s^2+a^2}\right]$ **20.** $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{F(s)}{s^2-a^2}\right]$

● Για κάθε τμηματικά συνεχή και εκθετικής τάξης συνάρτηση f(t) να αποδειχθεί ότι ισχύουν τα ακόλουθα:

21. $\int_0^t \int_0^{r_1} f(r_2)\,dr_2\,dr_1 = \int_0^t (t-r)\,f(r)\,dr$

22. $\int_0^t \int_0^{r_1} \int_0^{r_2} f(r_3)dr_3\,dr_2\,dr_1 = \int_0^t \frac{(t-r)^2}{2} f(r)\,dr$

23. $(\overset{n-\text{φορες}}{1*1*\ldots*1})*f = \left[\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right]*f$

● Να υπολογισθούν τα ακόλουθα ολοκληρώματα:

24. $\int_0^t (t-r)^{1/3}\,r^{5/3}\,dr$ **25.** $\int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-r}}\frac{1}{\sqrt{r}}\,dr$

26. $\int_0^t \left(\int_0^{r_1} \sqrt{r_1-r_2}\,r_2^{3/2}\,dr_2\right)dr_1$ **27.** $t^a * t^b * t^c$, όπου $a, b, c > -1$

28. Έστω f(t) μια συνεχής πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $[0, +\infty)$. Ορίζουμε το ***1/2-ολοκλήρωμα*** της f(t) από τη σχέση

$$I_{1/2}(f) = \frac{1}{\Gamma(1/2)}\left(t^{-1/2} * f\right), \quad \text{όπου } \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$$

(a) Να αποδειχθεί ότι $I_{1/2}\left(I_{1/2}(f)\right)(t) = \int_0^t f(r)\,dr$.

(b) Να αποδειχθεί ότι $I_{1/2}\left(\int_0^t f(r)\,dr\right) = \int_0^t I_{1/2}(f)(r)\,dr = I_{1/2}\left(I_{1/2}\left(I_{1/2}(f)\right)\right)(t)$.

(c) Να υπολογισθεί το $I_{1/2}(p)$, όταν $p(t) = \sum_{j=0}^{n} a_j t^j$ είναι ένα αυθαίρετο πολυώνυμο.

29. Για κάθε ν>0 το ***ν-κλασματικό ολοκλήρωμα*** της συνάρτησης f(t) ορίζεται από τη σχέση

$$I_\nu(f) = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\left(t^{\nu-1} * f\right).$$

(a) Να αποδειχθεί ότι, αν ν=n είναι θετικός ακέραιος, τότε $I_n(f)$ είναι το ολοκλήρωμα της f(t) πολλαπλότητας n. (b) Να αποδειχθεί ότι για κάθε ν>0 και μ>0, ισχύουν $I_\nu\left(I_\mu(f)\right) = I_\mu\left(I_\nu(f)\right) = I_{\mu+\nu}(f)$. (c) Έστω $p(t) = \sum_{i=0}^{n} a_j t^j$, να υπολογισθεί το $I_\nu(p)$. (d) Γνωστού όντος ότι $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ να υπολογισθεί σε μορφή δυναμοσειράς το $I_\nu(e^{at})$, για κάθε $a \in \mathbb{R}$. (e) Τέλος για κάθε $b \in \mathbb{R}$ να υπολογισθούν τα $I_\nu(\sin bt)$, $I_\nu(\cos bt)$.

30. Η ***1/2-κλασματική παράγωγος*** ορίζεται από τον τύπο

$$D^{1/2} f(t) = \frac{d}{dt}\left(I_{1/2}(f(t))\right).$$

(i) Έστω το πολυώνυμο $p(t) = \sum_{j=0}^{n} a_j t^j$. Να δειχθεί ότι η $(D^{1/2}p)(t)$ μπορεί να μην ορίζεται στο $t = 0$. Να υπολογισθεί το $(D^{1/2}p)(t)$, για $t>0$. (ii) Να υπολογισθεί το $D^{1/2}(e^{bt})$, για $t > 0$, $b \in \mathbb{R}$.

● Με τη χρήση της συνέλιξης να λυθούν τα ακόλουθα προβλήματα αρχικών τιμών:

31. $y^{(4)} - 11y'' + 18y = f(t), \quad t > 0, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$

32. $y^{(3)} - 3y'' + 6y' - 18y = f(t), \quad t > 0, \quad y(0) = y'(0) = y'(0) = 0$

33. $y'' - 8y' - 9y = f(t), \quad t > 0, \quad y(0) = 0, \; y'(0) = -2$

34. $y^{(4)} - 7y^{(3)} + 14y'' - 14y' + 24y = f(t), \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$

35. $y'' + 10y' + 24y = f(t), \quad t > 0, \quad y(0) = 0, \; y'(0) = -2$

36. $y'' + 2y' + 2y = \sin at, \quad t > 0, \quad y(0) = y'(0) = 0$

37. $y'' + 2y' + 2y = 1 - H_{2\pi}(t), \quad y(0) = y'(0) = 0$

38. $y'' + y' = \frac{3}{2}\sin 2t, \quad t > 0, \quad y(0) = y'(0) = 0$

39. $y'' + 25y = 5.2\, e^{-t}$
$y(0) = 1.2, \; y'(0) = -10.2$

40. $y'' + 3y' + 2y = 1 - H_1(t), \; t > 0, \quad y(0) = 0, \; y'(0) = 1$

7.9 ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΕΣ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΟΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Α. Ολοκληρωτικές εξισώσεις

Ορισμένες μορφές ολοκληρωτικών εξισώσεων είναι τέτοιες ώστε η μέθοδος του μετασχηματισμού Laplace να οδηγεί άμεσα στη λύση τους. Οι εξισώσεις αυτές είναι ***γραμμικές εξισώσεις Volterra τύπου συνέλιξης***, δηλαδή έχουν μια από τις ακόλουθες μορφές:

$$\textbf{I)}\ \int_0^t k(t-r)\, y(r)\, dr = f(t) \quad (1) \qquad \textbf{II)}\ y(t) + \int_0^t k(t-r)\, y(r)\, dr = f(t). \quad (2)$$

Σε αμφότερες τις περιπτώσεις υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις $k(t)$, $f(t)$ είναι γνωστές και δέχονται μετασχηματισμό Laplace $K(s)$, $F(s)$ αντίστοιχα.

I) Για την εξίσωση (1) παρατηρούμε ότι, αν η $y(t)$ είναι συνεχής συνάρτηση στο $[0, +\infty)$, θα πρέπει $f(0) = 0$. Έστω $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(t)$. Εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό Laplace στα δύο μέρη της (1), οπότε έχουμε

$$\mathcal{L}\{k * y\}(t) = \mathcal{L}\{k(t)\}\,\mathcal{L}\{y(t)\} = K(s)\,Y(s) = F(s)\,.$$

Λύνοντας προκύπτει

$$Y(s) = \frac{F(s)}{K(s)}\,. \tag{3}$$

Εφαρμόζουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό $\mathcal{L}^{-1}$ στην (3) και έχουμε τη λύση της εξίσωσης (1), που είναι

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{K(s)}\right\}. \tag{4}$$

Αν $f(0) \neq 0$ τότε, όπως θα δούμε στο Παράδειγμα 2, η προκύπτουσα λύση $y(t)$ είναι μια γενικευμένη συνάρτηση.

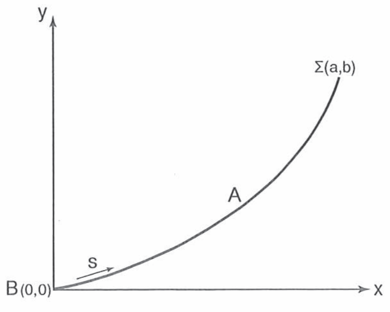
II) Ολοκληρωτικές Εξισώσεις του τύπου (2) αποτελούν το μαθηματικό πρότυπο φαινομένων, στα οποία συμβαίνει μια *συνεχής ανανέωση*. Για την επίλυση της (2) εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό Laplace στα δύο μέρη, οπότε προκύπτει

$$Y(s) + K(s)\,Y(s) = F(s) \quad \text{ή} \quad Y(s) = \frac{F(s)}{1 + K(s)}\,. \tag{5}$$

Η λύση της εξίσωσης (2) προκύπτει από την εφαρμογή του αντίστροφου μετασχηματισμού $\mathcal{L}^{-1}$ στην (5). Έτσι έχουμε

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{1 + K(s)}\right\}. \tag{6}$$

Παράδειγμα 1 (*Ταυτόχρονο*)* Ένα μαθηματικό πρόβλημα με ιδιαίτερο ιστορικό ενδιαφέρον, που παρουσιάστηκε κατά την κατασκευή ωρολογίων με εκκρεμές, είναι αυτό της εύρεσης του ***ταυτόχρονου***, δηλαδή *της καμπύλης εκείνης την οποία, όταν διαγράφει ένα κινητό χωρίς τριβές, φθάνει στο κατώτερο σημείο στον ίδιο χρόνο ανεξάρτητα από το σημείο εκκίνησης*. Η γεωμετρική αναπαράσταση δίδεται στο Σχήμα 1. Το σωματίδιο Σ έχει σημείο εκκίνησης το Σ(a, b) και καταλήγει στο B(0, 0) κινούμενο πάνω στο τόξο A. Το μήκος τόξου s μετριέται από την αρχή (0, 0). Ο λόγος μεταβολής του s συναρτήσει του ύψους y συμβολίζεται $f(y) = ds/dy$. Έχουμε ότι



Σχήμα 1 *Το πρόβλημα του Ταυτόχρονου*

$$f(y) = \frac{ds}{dy} = \left[1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]^{1/2}. \tag{α}$$

* Το πρόβλημα αυτό αποδείχτηκε γεωμετρικά το 1673 από τον Ch. Huygens (1629-1695) και αναλυτικά από τους G.W. Leibnitz και J. Bernoulli (1690). Αποτελεί μάλιστα μια από τις πρώτες περιπτώσεις πλήρους επίλυσης διαφορικής εξίσωσης.

Εξισώνοντας κινητική και δυναμική ενέργεια έχουμε $v = \sqrt{2g}\,(b-y)^{1/2}$. Από τον ορισμό της ταχύτητας $v = ds/dt$ παίρνουμε

$$dt = \frac{1}{v}\,ds \quad ή \quad T_0 = \int_0^b \frac{1}{v}\,ds = \int_0^b \frac{1}{v}\frac{ds}{dy}\,dy = \int_0^b \frac{1}{v}\,f(y)\,dy\,.$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι ο T_0 είναι σταθερός, ανεξάρτητος του b και αντικαθιστώντας το v έχουμε

$$T_0 = (2g)^{-1/2}\int_0^b f(y)\,(b-y)^{-1/2}\,dy \quad ή \quad \int_0^b (b-y)^{-1/2} f(y)\,dy = k\,, \tag{β}$$

όπου η σταθερά $k = T_0\,(2g)^{1/2}$. Η (β) ονομάζεται ***ολοκληρωτική εξίσωση Abel.*** Στο σημείο αυτό παρατηρούμε ότι έχουμε να λύσουμε μια ολοκληρωτική εξίσωση για τον προσδιορισμό της f(y), η οποία μάλιστα είναι της μορφής $(h * f)(b) = k$, όπου $h(b-y) = (b-y)^{-1/2}$. Επομένως, μπορούμε να πάρουμε το μετασχηματισμό Laplace των δύο μερών της (β) και να κάνουμε χρήση του Θεωρήματος 11, της Ενότητας 7.3 και του Θεωρήματος 6 της Ενότητας 7.8, οπότε έχουμε

$$\mathcal{L}\,\{f(y)\}\,\mathcal{L}\,\{y^{-1/2}\} = \mathcal{L}\,\{k\} \quad ή \quad \mathcal{L}\,\{f(y)\}\,\sqrt{\pi}\,s^{-1/2} = k\,s^{-1}\,.$$

Επομένως,

$$\mathcal{L}\,\{f(y)\} = \frac{k}{\sqrt{\pi}}\,s^{-1/2} = \frac{T_0\sqrt{2g}}{\sqrt{\pi}}\,s^{-1/2} \quad ή \quad \mathcal{L}\,\{f(y)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{T_0\sqrt{2g}}{\pi}\,y^{-1/2}\right\},$$

δηλαδή

$$f(y) = \frac{T_0\sqrt{2g}}{\pi}\,y^{-1/2}. \tag{γ}$$

Εδώ γίνεται εφαρμογή του Θεωρήματος Lerch, αφού η συνάρτηση του δεύτερου μέλους είναι συνεχής για $y>0$. Ο συνδυασμός των σχέσεων (α) και (γ) δίδει

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{2d-y}{y}}\,, \tag{δ}$$

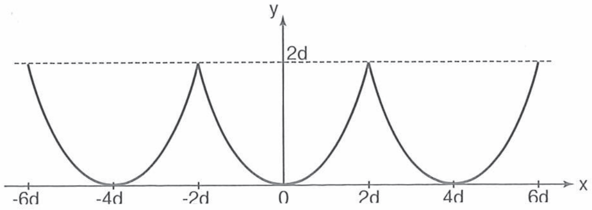
όπου $d = g\,T_0^2\,\pi^{-2}$. Θέτοντας στη (δ) $y = 2d\sin^2(\theta/2)$, θ παράμετρος προκύπτει

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{2d - 2d\sin^2(\theta/2)}{2d\sin^2(\theta/2)}} = \sqrt{\frac{1-\sin^2(\theta/2)}{\sin^2(\theta/2)}} = |\cot(\theta/2)|\,.$$

Επιπλέον, επειδή $\dfrac{dy}{d\theta} = d\sin\theta$ έχουμε $\dfrac{dx}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dy} = \cot(\theta/2)$ ή

$$\frac{dx}{d\theta} = 2\,d\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)\,\frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)} = 2d\cos^2(\theta/2) = d\,(1+\cos\theta)\,,$$

δηλαδή $x = d\,(\theta + \sin\theta)$. Επομένως η παραμετρική παράσταση της καμπύλης Α δίδεται από τις εξισώσεις $x = d\,(\theta+\sin\theta)$, $y = d\,(1-\cos\theta)$, οι οποίες αναγνωρίζονται ως οι *εξισώσεις του κυκλοειδούς* (βλέπε Σχήμα 2). Το ***κυκλοειδές*** ορίζεται *ως η καμπύλη, που γεννάται από ένα σταθερό σημείο, ευρισκόμενο πάνω σ' ένα κύκλο ακτίνας d, ο οποίος κυλίεται πάνω στον οριζόντιο άξονα των x (ή κάτω από την ευθεία y=2d)*. Επειδή δε έχουμε $d = gT_0^2\pi^{-2}$, συνάγουμε ότι η ακτίνα του κύκλου που προσδιορίζει το κυκλοειδές εξαρτάται από το χρόνο της καθόδου του κινητού. ■



Σχήμα 2 *Κυκλοειδές*

Το ερώτημα της εύρεσης της καμπύλης εκείνης η οποία *ελαχιστοποιεί* το χρόνο καθόδου του σωματιδίου από το Σ(a, b) στο B(0, 0), η οποία ονομάζεται ***βραχυστόχρονο***, αποτέλεσε την αφετηρία δημιουργίας μιας σημαντικότατης περιοχής των εφαρμοσμένων μαθηματικών, του ***Λογισμού Μεταβολών***.

Παράδειγμα 2 Να λυθεί η ολοκληρωτική εξίσωση τύπου Volterra

$$e^{-t} * y(t) = \int_0^t e^{-(t-r)} y(r)\,dr = f(t),\ t \geq 0 \tag{α}$$

Ειδική Περίπτωση: $f(t) = \sqrt{t}$.

Λύση Η εξίσωση (α) είναι του τύπου (I). Εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό Laplace με $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ και $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, οπότε έχουμε

$$\mathcal{L}\{e^{-t} * y(t)\} = \mathcal{L}\{e^{-t}\}\,\mathcal{L}\{y(t)\} = \frac{1}{s+1}Y(s) = F(s).$$

Επομένως, $Y(s) = (s+1)F(s) = sF(s) + F(s) = \mathcal{L}\{f'(t)\} + f(0) + F(s)$. Ο αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{L}^{-1}$ δίδει $y(t) = f'(t) + f(0)\,\delta(t) + f(t)$, αφού $\mathcal{L}^{-1}\{f(0)\} = f(0)$ και $\mathcal{L}^{-1}\{1\} = f(0)\,\delta(t)$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(i) Έστω $f(0) = 0$. Τότε το πρόβλημα (α) δέχεται την *κλασική λύση* $y(t) = f'(t) + f(t)$. Αν $f(t) = \sqrt{t}$, η $f'(t)$ δεν ορίζεται στο $t = 0$. Συνεπώς, η λύση $y(t)$ δεν ορίζεται στο $t = 0$ και είναι της μορφής $y(t) = \sqrt{t} + \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$, $t > 0$.

(ii) Έστω $f(0) \neq 0$. Τότε το πρόβλημα (α) δέχεται *γενικευμένη λύση*, αφού σ' αυτήν περιέχεται η συνάρτηση δ-Dirac.

```
In[1]:= eq = Integrate[Exp[-(t - r)] y[r], {r, 0, t}] == f[t]
```

Out[1]= $\int_0^t e^{r-t}\, y[r]\, dr == f[t]$

```
In[2]:= eqL = LaplaceTransform[eq, t, s]
```

Out[2]= $\frac{\text{LaplaceTransform}[y[t],\, t,\, s]}{1+s} == \text{LaplaceTransform}[f[t],\, t,\, s]$

```
In[3]:= sol = Solve[eqL, LaplaceTransform[y[t], t, s]]

Out[3]= {{LaplaceTransform[y[t], t, s] → (1 + s) LaplaceTransform[f[t], t, s]}}

In[4]:= yL[s_] = sol[[1, 1, 2]]

Out[4]= (1 + s) LaplaceTransform[f[t], t, s]

In[5]:= solution[t_] = InverseLaplaceTransform[yL[s], s, t]

Out[5]= DiracDelta[t] f[0] + f[t] + f'[t]

In[6]:= f[t_] = Sqrt[t]
```

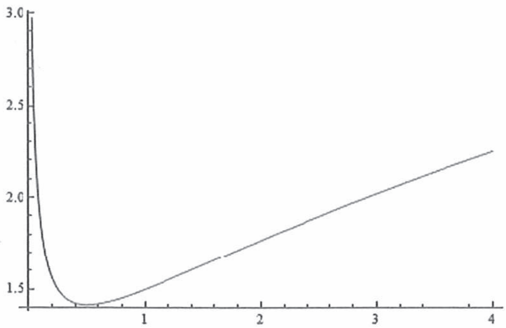
Out[6]= $\sqrt{t}$

```
In[7]:= solution[t]
```

Out[7]= $\frac{1}{2\sqrt{t}} + \sqrt{t}$

```
In[8]:= Plot[solution[t], {t, 0, 4}]
```

Out[8]=



Παράδειγμα 2

Παράδειγμα 3 Να λυθεί η ολοκληρωτική εξίσωση τύπου Volterra

$$y(t) = 1 - \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-r}}\, y(r)\, dr\,.$$

Λύση Θέτουμε $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$, οπότε έχουμε $Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}\, Y(s)$, ή

$$Y(s) = \left(1 + \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}\right)^{-1} \frac{1}{s} = \frac{\sqrt{s}}{(\sqrt{s}+\sqrt{\pi})\, s} = \frac{1}{\sqrt{s}\,(\sqrt{s}+\sqrt{\pi})} = \frac{\sqrt{s}-\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}\,(s-\pi)} = \frac{1}{s-\pi}\left(1 - \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}\right).$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace $\mathcal{L}^{-1}$ δίδει

$$\mathcal{L}^{-1}\,\{Y(s)\} = y(t) = e^{\pi t} - e^{\pi t} * \frac{1}{\sqrt{t}} = e^{\pi t} - \int_0^t e^{\,\pi(t-r)}\, r^{-1/2}\, dr\,.$$

Η αντικατάσταση $\pi r = u^2$ στο τελευταίο ολοκλήρωμα δίδει

$$e^{\pi t} \int_0^t e^{-\pi r}\, r^{-1/2} dr = e^{\pi t} \int_0^{\sqrt{\pi t}} e^{-u^2} \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, du\,.$$

Έτσι έχουμε

$$y(t) = e^{\pi t}\left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{\pi t}} e^{-u^2} du\right) = e^{\pi t}\left(1 - \mathrm{erf}\left(\sqrt{\pi t}\right)\right) = e^{\pi t}\, \mathrm{erfc}\left(\sqrt{\pi t}\right),$$

όπου η erf c(t) είναι, ως γνωστόν, η *συμπληρωματική συνάρτηση σφάλματος*.

```
In[1]:= eq = y[t] == 1 - Integrate[Sqrt[1/(t - r)] y[r], {r, 0, t}]
```

Out[1]= $y[t] == 1 - \int_0^t \sqrt{\frac{1}{-r+t}}\; y[r]\, dr$

```
In[2]:= eqL = LaplaceTransform[eq, t, s]
```

Out[2]= $\text{LaplaceTransform}[y[t], t, s] == \frac{1}{s} - \frac{\sqrt{\pi}\ \text{LaplaceTransform}[y[t], t, s]}{\sqrt{s}}$

```
In[3]:= sol = Solve[eqL, LaplaceTransform[y[t], t, s]]
```

Out[3]= $\left\{\left\{\text{LaplaceTransform}[y[t], t, s] \to \frac{1}{\left(\sqrt{\pi} + \sqrt{s}\right)\sqrt{s}}\right\}\right\}$

```
In[4]:= yL[s_] = sol[[1, 1, 2]]
```

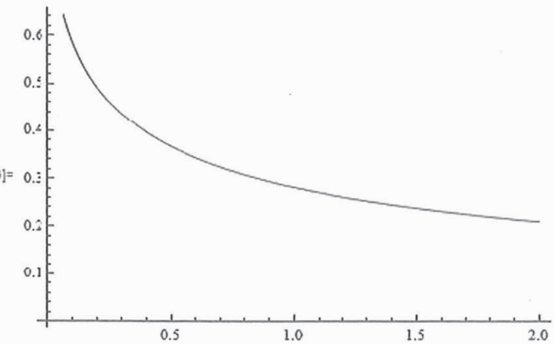
Out[4]= $\frac{1}{\left(\sqrt{\pi} + \sqrt{s}\right)\sqrt{s}}$

```
In[5]:= solution[t_] = InverseLaplaceTransform[yL[s], s, t]
```

Out[5]= $e^{\pi t}\sqrt{\frac{1}{t}}\ \sqrt{t}\ \text{Erfc}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\frac{1}{t}}}\right]$

```
In[6]:= Plot[solution[t], {t, 0, 2}, AxesOrigin -> {0, 0}]
```

Out[6]=



Παράδειγμα 3

Παράδειγμα 4 Να λυθεί η ολοκληρωτική εξίσωση τύπου Volterra

$$y(t) - 2\int_0^t e^{-3r}\, y(t-r)\, dr = e^{-t}\,.$$

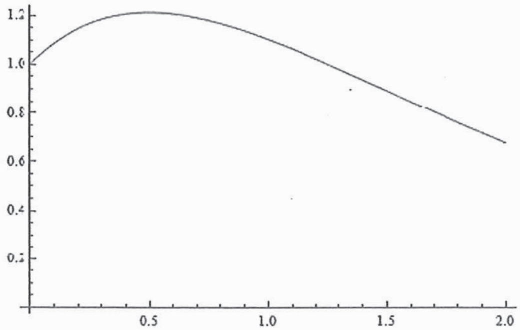
Λύση Εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό Laplace στα δύο μέρη, οπότε προκύπτει

$$Y(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{2}{s+3}\, Y(s) \qquad \text{ή} \qquad Y(s) = \frac{s+3}{(s+1)^2} = \frac{1}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2}\,.$$

Έτσι η εφαρμογή του αντίστροφου μετασχηματισμού $\mathcal{L}^{-1}$ στην τελευταία δίδει

$$y(t) = e^{-t} + 2t\, e^{-t}.$$

```
In[1]:= eq = y[t] - 2 Integrate[Exp[-3 r] y[t - r], {r, 0, t}] == Exp[-t]

Out[1]= -2 ∫_0^t e^(-3 r) y[-r + t] dr + y[t] == e^(-t)

In[2]:= eqL = LaplaceTransform[eq, t, s]

Out[2]= LaplaceTransform[y[t], t, s] - (2 LaplaceTransform[y[t], t, s])/(3 + s) == 1/(1 + s)

In[3]:= sol = Solve[eqL, LaplaceTransform[y[t], t, s]]

Out[3]= {{LaplaceTransform[y[t], t, s] -> (3 + s)/(1 + s)^2}}

In[4]:= yL[s_] = sol[[1, 1, 2]]

Out[4]= (3 + s)/(1 + s)^2

In[5]:= solution[t_] = InverseLaplaceTransform[yL[s], s, t]

Out[5]= e^(-t) (1 + 2 t)

In[6]:= Plot[solution[t], {t, 0, 2}, AxesOrigin -> {0, 0}]

Out[6]=
```



Παράδειγμα 4

■

Παράδειγμα 5 Να λυθεί η ολοκληρωτική εξίσωση τύπου Volterra

$$y(t) = 2\,t^2 + \int_0^t \sin(4r)\, y(t-r)\, dr\,.$$

Λύση Έχουμε ότι

$$Y(s) = \frac{4}{s^3} + \mathcal{L}\{\sin(4\,t)\}\,\mathcal{L}\{y(t)\} = \frac{4}{s^3} + \frac{4}{s^2+16}\,Y(s).$$

Έτσι προκύπτει ότι

$$Y(s) = \frac{4\left(s^2+16\right)}{s^3\left(s^2+12\right)} = -\frac{1}{9}\,\frac{1}{s} + \frac{16}{3}\,\frac{1}{s^3} + \frac{1}{9}\,\frac{s}{s^2+12}.$$

Επομένως, ο αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{L}^{-1}$ δίδει τη λύση

$$y(t) = -\frac{1}{9} + \frac{16}{3}\,\frac{t^2}{2} + \frac{1}{9}\cos\left(\sqrt{12}\,t\right) = -\frac{1}{9} + \frac{8\,t^2}{3} + \frac{1}{9}\cos\left(\sqrt{12}\,t\right).$$

In[1]:= `eq = y[t] == 2 t^2 + Integrate[Sin[4 r] y[t - r], {r, 0, t}]`

Out[1]= $y[t] == 2\,t^2 + \int_0^t \mathrm{Sin}[4\,r]\,y[-r+t]\,dr$

In[2]:= `eqL = LaplaceTransform[eq, t, s]`

Out[2]= $\mathrm{LaplaceTransform}[y[t],\,t,\,s] == \frac{4}{s^3} + \frac{4\,\mathrm{LaplaceTransform}[y[t],\,t,\,s]}{16+s^2}$

In[3]:= `sol = Solve[eqL, LaplaceTransform[y[t], t, s]]`

Out[3]= $\left\{\left\{\mathrm{LaplaceTransform}[y[t],\,t,\,s] \to \frac{4\left(16+s^2\right)}{s^3\left(12+s^2\right)}\right\}\right\}$

In[4]:= `yL[s_] = sol[[1, 1, 2]]`

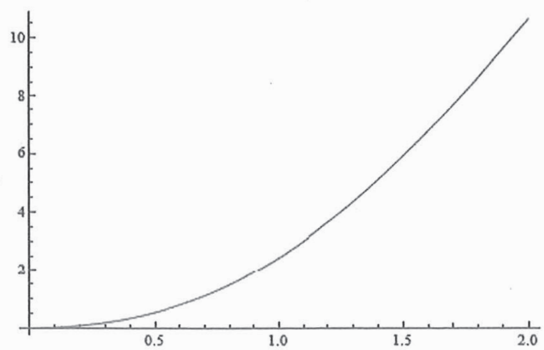
Out[4]= $\frac{4\left(16+s^2\right)}{s^3\left(12+s^2\right)}$

In[5]:= `solution[t_] = InverseLaplaceTransform[yL[s], s, t]`

Out[5]= $\frac{1}{9}\left(-1+24\,t^2+\mathrm{Cos}\left[2\sqrt{3}\,t\right]\right)$

In[6]:= `Plot[solution[t], {t, 0, 2}]`

Out[6]=



Παράδειγμα 5

Β. Ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις

Vito Volterra
(1860-1940)

Στις αρχές του 1900 ο Vito Volterra* διαμόρφωσε τις ***ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις*** για τη μελέτη προβλημάτων *πληθυσμιακής συμπεριφοράς*. Εξισώσεις αυτής της μορφής λαμβάνουν υπόψη τους την *«προϊστορία»* του υπό μελέτη εξελισσόμενου φαινόμενου. Σε ορισμένες περιπτώσεις αυτό το γεγονός οδηγεί σε ολοκληρώματα τύπου συνέλιξης, οπότε το *Θεώρημα Συνέλιξης* αποτελεί ιδιαίτερα χρήσιμο εργαλείο κατά τη διαδικασία επίλυσης αυτών.

Παράδειγμα 6 Να λυθεί το ακόλουθο ολοκληροδιαφορικό πρόβλημα αρχικών συνθηκών

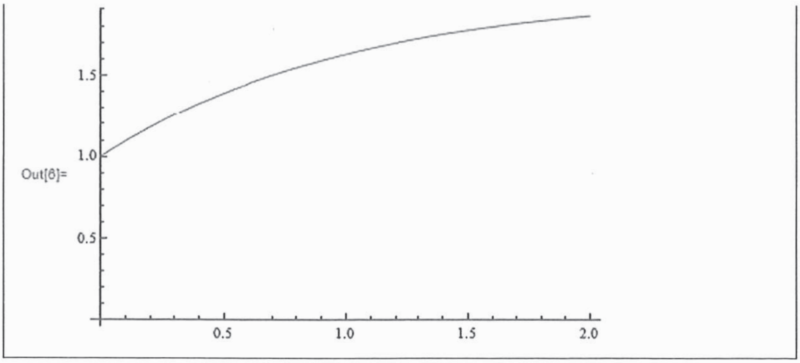
$$y'(t) = 1 - \int_0^t y\,(t-u)\,e^{-2u}\,du, \quad y(0) = 1\,. \qquad (\alpha)$$

Λύση Η εξίσωση (α) γράφεται επίσης $y'(t) = 1 - y(t) * e^{-2t}$. Έστω $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$. Τότε ο μετασχηματισμός Laplace δίδει

$$s\,Y(s) - 1 = \frac{1}{s} - Y(s)\left(\frac{1}{s+2}\right) \quad ή \quad Y(s) = \frac{s+2}{s\,(s+1)}\,.$$

```
In[1]:= eq = y'[t] == 1 - Integrate[Exp[-2 u] y[t - u], {u, 0, t}]

Out[1]= y'[t] == 1 - ∫_0^t e^(-2u) y[t - u] du

In[2]:= eqL = LaplaceTransform[eq, t, s]

Out[2]= s LaplaceTransform[y[t], t, s] - y[0] == 1/s - LaplaceTransform[y[t], t, s]/(2 + s)

In[3]:= sol = Solve[eqL, LaplaceTransform[y[t], t, s]]

Out[3]= {{LaplaceTransform[y[t], t, s] -> ((2 + s) (1 + s y[0]))/(s (1 + s)^2)}}

In[4]:= yL[s_] = sol[[1, 1, 2]]

Out[4]= ((2 + s) (1 + s y[0]))/(s (1 + s)^2)

In[5]:= solution[t_] = InverseLaplaceTransform[yL[s], s, t] /. y[0] -> 1

Out[5]= e^-t (-1 + 2 e^t)

In[6]:= Plot[solution[t], {t, 0, 2}, AxesOrigin -> {0, 0}]
```

* *Vito Volterra* (1860-1940) Σχεδόν αυτοδίδακτος μαθηματικός, γεννημένος στην Ancona της Ιταλίας, έγινε καθηγητής στο Πανεπιστήμιο της Ρώμης, απ' όπου παραιτήθηκε επειδή αρνήθηκε να ορκιστεί πίστη και αφοσίωση στο φασιστικό καθεστώς του Β. Moussolini. Πρόσφερε τεράστιο έργο σε δύο σημαντικούς κλάδους των σύγχρονων μαθηματικών, τις Ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις και τη μαθηματική βιολογία. Επίσης εργάσθηκε στις μερικές διαφορικές εξισώσεις και ειδικά στα κυλινδρικά κύματα. Υπήρξε καθηγητής στα Πανεπιστήμια της Ρίζας (1883) και της Ρώμης (1900).



Παράδειγμα 6

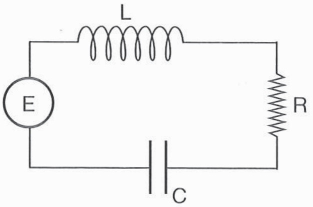
Εφαρμόζουμε στην τελευταία τον αντίστροφο μετασχηματισμό $\mathcal{L}^{-1}$, οπότε προκύπτει η λύση του προβλήματος (α), που είναι η $y(t) = 2 - e^{-t}$. ■

Μια άλλη περιοχή των εφαρμογών όπου εμφανίζονται οι ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις είναι αυτή των *ηλεκτρικών κυκλωμάτων.*

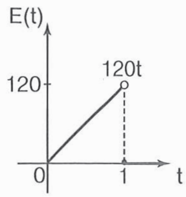
Παράδειγμα 7 Το κύκλωμα του Σχήματος 3 περιγράφεται από την ολοκληροδιαφορική εξίσωση

$$L\,\frac{d\,i(t)}{dt} + R\,i(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(r)\,dr = E(t). \qquad (\alpha)$$

Να βρεθεί το i(t) όταν L = 0.1 henry, R = 20 ohms, C = 10^{-3} farads, i(0) = 0 και το δυναμικό E(t) δίδεται από το Σχήμα 4.



Σχήμα 3



Σχήμα 4

Λύση Επειδή E(t) = 0, για t≥1, έχουμε ότι

$$E(t) = 120\,t - 120\,t\,H_1(t) = 120\,t - 120\,(t-1)\,H_1(t) - 120\,H_1(t). \qquad (\beta)$$

Οπότε η εξίσωση (α) γράφεται

$$0.1\,\frac{di(t)}{dt} + 20\,i(t) + 10^3\int_0^t i(r)\,dr = 120\,t - 120\,(t-1)\,H_1(t) - 120\,H_1(t). \qquad (\gamma)$$

Έστω $I(s) = \mathcal{L}\{i(t)\}$. Τότε από το Θεώρημα 9 της Ενότητας 7.3 έχουμε ότι

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \mathrm{i}(r)\,\mathrm{d}r\right\} = \frac{\mathrm{I}(s)}{s}\ .$$

Έτσι η εφαρμογή του μετασχηματισμού $\mathcal{L}$ στα δύο μέρη της (γ) δίδει

$$0.1\ s\ \mathrm{I}(s) + 20\ \mathrm{I}(s) + 10^3\ \frac{\mathrm{I}(s)}{s} = 120\left[\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2}\ e^{-s} - \frac{1}{s}\ e^{-s}\right]$$

ή

$$(s+100)^2\ \mathrm{I}(s) = 1200\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s}\ e^{-s} - e^{-s}\right]$$

ή

$$\mathrm{I}(s) = 1200\left[\frac{1}{s\,(s+100)^2} - \frac{1}{s\,(s+100)^2}\ e^{-s} - \frac{1}{(s+100)^2}\ e^{-s}\right].$$

```
In[1]:= L = 10^(-1);
        R = 20;
        c = 10^(-3);
        i[0] = 0;
        e[t_] = 120 t - 120 t HeavisideTheta[t - 1];

In[6]:= eq = L i'[t] + R i[t] + 1/c Integrate[i[r], {r, 0, t}] == e[t]
```

Out[6]= $20\,\mathrm{i}[t] + 1000\int_0^t \mathrm{i}[r]\,dr + \frac{\mathrm{i}'[t]}{10} = 120\,t - 120\,t\ \mathrm{HeavisideTheta}[-1+t]$

```
In[7]:= eqL = LaplaceTransform[eq, t, s]
```

Out[7]= $20\ \mathrm{LaplaceTransform}[\mathrm{i}[t], t, s] + \frac{1000\ \mathrm{LaplaceTransform}[\mathrm{i}[t], t, s]}{s} + \frac{1}{10}\ s\ \mathrm{LaplaceTransform}[\mathrm{i}[t], t, s] = \frac{120}{s^2} - \frac{120\,e^{-s}(1+s)}{s^2}$

```
In[8]:= sol = Solve[eqL, LaplaceTransform[i[t], t, s]]
```

Out[8]= $\left\{\left\{\mathrm{LaplaceTransform}[\mathrm{i}[t], t, s] \to \frac{1200\,e^{-s}(-1+e^s-s)}{s\,(100+s)^2}\right\}\right\}$

```
In[9]:= yL[s_] = sol[[1, 1, 2]]
```

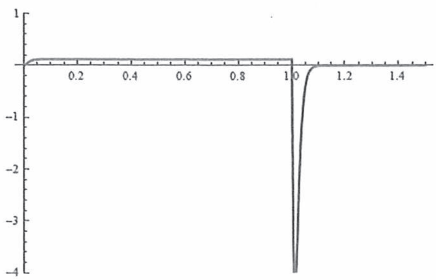
Out[9]= $\frac{1200\,e^{-s}(-1+e^s-s)}{s\,(100+s)^2}$

```
In[10]:= solution[t_] = InverseLaplaceTransform[yL[s], s, t] /. y[0] → 1
```

Out[10]= $\frac{3}{25}\,e^{-100t}\left(-1+e^{100t}-100\,t-\left(e^{100t}+e^{100}(-9901+9900\,t)\right)\mathrm{HeavisideTheta}[-1+t]\right)$

```
In[11]:= Plot[solution[t], {t, 0, 1.5}, AxesOrigin → {0, 0}, PlotRange → {-4, 1},
          PlotStyle → Thick]
```

Out[11]=



Παράδειγμα 7

Η ανάλυση σε απλά κλάσματα δίδει την παράσταση

$$I(s) = 1200\left[\frac{1}{10.000\,s} - \frac{1}{10.000\,(s+100)} - \frac{1}{100\,(s+100)^2} - \frac{1}{10.000\,s}\,e^{-s}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{10.000\,(s+100)}\,e^{-s} + \frac{1}{100\,(s+100)^2}\,e^{-s} - \frac{1}{(s+100)^2}\,e^{-s}\right].$$

Εφαρμόζοντας το *2ο Θεώρημα Μετατόπισης* (βλέπε Ενότητα 7.6) στην τελευταία, προκύπτει τελικά η λύση του προβλήματος, που είναι

$$i(t) = \frac{3}{25}\left[1 - H_1(t)\right] - \frac{3}{25}\left[e^{-100t} - e^{-100(t-1)}\,H_1(t)\right]$$
$$-\,12\,t\,e^{-100\,t} - 1188\,(t-1)\,e^{-100\,(t-1)}H_1(t).$$ ■

7.9 Προβλήματα

- Να λυθούν οι ακόλουθες ολοκληρωτικές εξισώσεις με χρήση μετασχηματισμού Laplace

1. $\int_0^t \sin 2\,(t-r)\,y(r)\,dr = \sin t$

2. $\int_0^t (t-r)^{1/3}\,y(r)\,dr = t^{3/2}$

3. $\int_0^t (t-r)^{3/2}\,y(r)\,dr = t^{1/2}$

4. $\int_0^t \sin \pi\,(t-r)\,y(r)\,dr = 1$

5. $\int_0^t e^{-2(t-r)}\,(t-r)^{-1/2}\,y(r)\,dr = 1$

6. $\int_0^t \sin(t-r)\,y(r)\,dr = t\,J_0(t)$

7. $\int_0^t \sin 2\,(t-r)\,y(r)\,dr = t - \sin t$

- Να λυθούν με χρήση μετασχηματισμού Laplace οι ολοκληρωτικές εξισώσεις τύπου Volterra

8. $y(t) + \int_0^t 2\cos(t-r)\,y(r)\,dr = \sin 2t$

9. $y(t) - \int_0^t \sin(t-r)\,y(r)\,dr = \sin t$

10. $y(t) - 2\int_0^t \cos(t-r)\,y(r)\,dr = t\,e^t$

11. $y(t) = e^{-t} + \int_0^t y(t-r)\,dr$

12. $y(t) = \cos t + \int_0^t y(t-r)\,e^{-2r}\,dr$

13. $y(t) = -2\,t + \int_0^t y(t-r)\,r\,dr$

14. $y(t) = 3t^2 + \int_0^t \sinh\,[3\,(t-r)]\,y(r)\,dr$

15. $y(t) = \int_0^t e^{2\,(t-r)}\sin[3\,(t-r)]\,y(r)\,dr$

16. $y(t) = 2t + e^{-t} + \int_0^t r\,y(t-r)\,dr$

17. $y(t) = \cos(2t) - \int_0^t y(r)\cos(2\,(t-r))\,dr$

18. $y(t) = -2\,t\,e^{-t} + \int_0^t y(t-r)\,dr$

19. $y(t) = 1 - t + \int_0^t (t-r)\,y(r)\,dr$

20. $y(t) = 4t - 3\int_0^t y(r)\sin(t-r)\,dr$

21. $y(t) + \int_0^t (t-r)\,y(r)\,dr = t^2$

22. $y(t) + \int_0^t (t-r)^2 y(r)\,dr = t^3 + 3$ **23.** $y(t) + \int_0^t e^{t-r} y(r)\,dr = \sin t$

24. $y(t) - \int_0^t (1+r) y(t-r)\,dr = 1 - \sin h\, t$ **25.** $y(t) + \frac{8}{3}\int_0^t (t-r)^3 y(r)\,dr = 1 + t$

- Να λυθούν με χρήση του μετασχηματισμού Laplace οι ακόλουθες ολοκληρο-διαφορικές εξισώσεις:

26. $y'(t) + y(t) - \int_0^t y(r)\sin(t-r)\,dr = -\sin t, \quad y(0) = 1$

27. $y' + \int_0^t y(r)\,dr = 1 - \sin t, \quad y(0) = 0$

28. $0.005\,\frac{di(t)}{dt} + i(t) + 50\int_0^t i(r)\,dr = 100[1 - H_1(t)], \quad i(0) = 0$

29. $\frac{di(t)}{dt} + 110\, i(t) + 1000\int_0^t i(r)\,dr = 90[1 - H_1(t)], \quad i(0) = 0$

30. $\frac{di(t)}{dt} + 10^4\int_0^t i(r)\,dr = 100[1 - H_{2\pi}(t)], \quad i(0) = 0$

31. $\frac{di(t)}{dt} + 150\, i(t) + 5000\int_0^t i(r)\,dr = 100\, t[1 - H_1(t)], \quad i(0) = 0$

32. $y'(t) = y(t) + 4\int_0^t e^{-2(t-r)} y(r)\,dr, \quad y(0) = 1$

33. $y'(t) = \sin t + \int_0^t y(t-r)\cos r\,dr, \quad y(0) = 0$

34. $y'(t) + 2y + \int_0^t y(r)\,dr = \sin t, \quad y(0) = 1$

- Να υπολογισθεί ο $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$ στις ακόλουθες ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις:

35. $y''(t) = \int_0^t J_0(2(t-r))\, y(r)\,dr, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

36. $y'(t) - 3y(t) = \int_0^t \ln(t-r)\, y(r)\,dr, \quad y(0) = 1$

37. Να δειχθεί ότι, αν οι συναρτήσεις $f(x, y)$ και $f_x(x, y)$ είναι συνεχείς, τότε

$$\frac{d}{dx}\int_0^x f(x, y)\,dy = f(x, x) + \int_0^x \frac{\partial f}{\partial x}(x, s)\,ds.$$

Στη συνέχεια κάνοντας χρήση αυτού του αποτελέσματος να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Κάθε λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης $y(t) + 2\int_0^t \cos(t-r)\, y(r)\,dr = 1$ είναι επίσης λύση των ακόλουθων εξισώσεων:

(a) $y'(t) + 2y(t) - 2\int_0^t \sin(t-r)\, y(r)\, dr = 1$ (b) $y'' + 2y' + y = t,\ \ y(0) = 0\,,\ \ y'(0) = 1$.

(ii) Έστω h(t) και f(t) συνεχώς διαφορίσιμες συναρτήσεις με f(0) = 0. Τότε κάθε συνεχής λύση της $\int_0^t h(t-r)\, y(r)\, dr = f(t)$ είναι επίσης λύση της

$$h(0)\, y(t) + \int_0^t h'(t-r)\, y(r)\, dr = f'(t).$$

Αντίστροφα, αν f(0) = 0 και y(t) είναι λύση της δεύτερης ολοκληρωτικής εξίσωσης, τότε είναι λύση και της πρώτης.

7.10 ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Α. Βασικοί Τύποι του Μετασχηματισμού Laplace

Τύπος	Όνομα	§
$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$	Ορισμός του $\mathcal{L}$	7.2
$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	Ορισμός του $\mathcal{L}^{-1}$	7.4
$\mathcal{L}\{a f(t) + bg(t)\} = a\,\mathcal{L}\{f(t)\} + b\,\mathcal{L}\{g(t)\}$	Γραμμικότητα	7.3
$\mathcal{L}(f') = s\,\mathcal{L}(f) - f(0)$ $\mathcal{L}(f'') = s^2\,\mathcal{L}(f) - s\,f(0) - f'(0)$ $\mathcal{L}(f^n) = s^n\,\mathcal{L}(f) - s^{n-1} f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$	Παραγώγιση της f(t)	7.3
$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\, d\tau\right\} = \frac{1}{s}\,\mathcal{L}(f)$	Ολοκλήρωση της f(t)	7.3
$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$ $\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at} f(t)$	1ο Θεώρημα Μετατόπιση	7.3
$\mathcal{L}\{f(t-a)\, H_a(t)\} = e^{-as} F(s)$ $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as} F(s)\} = f(t-a)\, H_a(t)$	2ο Θεώρημα Μετατόπιση	7.6
$\mathcal{L}\{t\, f(t)\} = -F'(s)$ $\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} F(\tilde{s})\, d\tilde{s}$	Παραγώγιση της F(s) Ολοκλήρωση της F(s)	7.3
$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau$ $= \int_0^t f(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau$ $\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f)\,\mathcal{L}(g)$	Συνέλιξη	7.8
$\mathcal{L}(f) = \frac{1}{1-e^{-ps}} \int_0^{p} e^{-st} f(t)\, dt$	f περιοδική περιόδου p	7.3

Β. Πίνακας Μετασχηματισμών Laplace

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$t\,e^{at}$	$\frac{1}{(s-a)^2}$
$t^n\,e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$\frac{1}{a-b}\left(e^{at}-e^{bt}\right)$	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$
$\frac{1}{a-b}\left(ae^{at}-b\,e^{bt}\right)$	$\frac{s}{(s-a)(s-b)}$
$\frac{(c-b)\,e^{at}+(a-c)\,e^{bt}+(b-a)\,e^{ct}}{(a-b)(b-c)(c-a)}$	$\frac{1}{(s-a)(s-b)(s-c)}$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$1-\cos(at)$	$\frac{a^2}{s\left(s^2+a^2\right)}$
$at-\sin(at)$	$\frac{a^3}{s^2\left(s^2+a^2\right)^2}$
$\sin(at)-at\cos(at)$	$\frac{2a^3}{\left(s^2+a^2\right)^2}$
$t\sin(at)$	$\frac{2as}{\left(s^2+a^2\right)^2}$
$t\cos(at)$	$\frac{(s-a)(s+a)}{\left(s^2+a^2\right)^2}$
$\frac{\cos(at)-\cos(bt)}{(b-a)(b+a)}$	$\frac{s}{\left(s^2+a^2\right)\left(s^2+b^2\right)}$

$e^{at}\sin(bt)$	$\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}$
$e^{at}\cos(bt)$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
$\sin h(at)$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}$
$\cos h(at)$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$
$\sin(at)\cos h(at)-\cos(at)\sin h(at)$	$\dfrac{4a^3}{s^4+4a^4}$
$\sin(at)\sin h(at)$	$\dfrac{2a^25}{s^4+4a^4}$
$\sin h(at)-\sin(at)$	$\dfrac{2a^3}{s^4-a^{4.}}$
$\cos h(at)-\cos(at)$	$\dfrac{2a^2 s}{s^4-a^4}$
$\dfrac{e^{at}(1+2at)}{\sqrt{\pi t}}$	$\dfrac{s}{(s-a)^{3/2}}$
$J_0(at)^*$	$\dfrac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$
$a^n J_n(at)^*$	$\dfrac{\left(\sqrt{s^2+a^2}-s\right)^n}{\sqrt{s^2+a^2}}$
$J_0(2\sqrt{at})$	$\dfrac{e^{-a/s}}{s}$
$\dfrac{1}{t}\sin(at)$	$\arctan\left(\dfrac{a}{s}\right)$
$\dfrac{2}{t}[1-\cos(at)]$	$\ln\left(\dfrac{s^2+a^2}{s^2}\right)$
$\dfrac{2}{t}[1-\cos h(at)]$	$\ln\left(\dfrac{s^2-a^2}{s^2}\right)$
$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}-ae^{a^2t}\,\mathrm{erfc}(a\sqrt{t})^{\ddagger}$	$\dfrac{1}{\sqrt{s}+a}$
$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}+ae^{a^2t}\,\mathrm{erf}(a\sqrt{t})^{\ddagger}$	$\dfrac{\sqrt{s}}{s-a^2}$
$e^{a^2t}\,\mathrm{erf}(a\sqrt{t})$	$\dfrac{a}{\sqrt{s}(s-a^2)}$

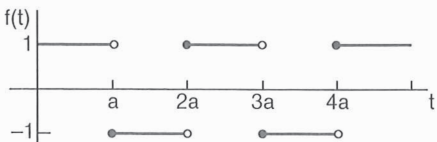
* $J^n(x)$ συνάρτηση Bessel πρώτου είδους τάξης n

‡ $\mathrm{erf}(x)=(2/\sqrt{\pi})\int_0^x e^{-r^2}dr$, *συνάρτηση σφάλματος*, erfc (x) = 1 – erf (x), *συμπληρωματική συνάρτηση σφάλματος*.

$e^{a^2 t}\operatorname{erfc}(a\sqrt{t})$	$\dfrac{1}{\sqrt{s}\,(\sqrt{s}+a)}$
$\operatorname{erfc}\left(\dfrac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\dfrac{1}{s}\,e^{-a\sqrt{s}}$
$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\,e^{-a^2/4t}$	$\dfrac{1}{\sqrt{s}}\,e^{-a\sqrt{s}}$
$\dfrac{1}{\sqrt{\pi\,(t+a)}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{s}}\,e^{as}\operatorname{erfc}(\sqrt{as})$
$\dfrac{1}{\pi t}\sin(2a\sqrt{t})$	$\operatorname{erf}\left(\dfrac{a}{\sqrt{s}}\right)$
$f\left(\dfrac{t}{a}\right)$	$aF(as)$
$e^{bt/a} f\left(\dfrac{t}{a}\right)$	$a\,F(as-b)$
$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots$ $\cdots - s\,f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$
$H_c(t)\,f(t-c)$	$e^{-cs}\,\mathcal{L}\{f(t)\}$
$\delta_\varepsilon(t)$	$\dfrac{e^{-t_0 s}(e^{\varepsilon s}-e^{-\varepsilon s})}{\varepsilon s}$
$\delta(t-t_0)$	$e^{-t_0 s}$

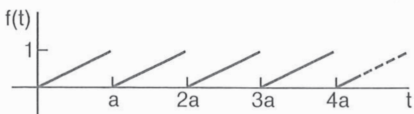
τριγωνικό κύμα

$$\frac{1}{as^2}\left[\frac{1-e^{-as}}{1+e^{-as}}\right]\ \left(=\frac{1}{as^2}\tanh\left(\frac{as}{2}\right)\right)$$



τετραγωνικό κύμα

$$\frac{1}{s}\tanh\left(\frac{as}{2}\right)$$



οδοντωτό κύμα

$$\frac{1}{as^2}-\frac{e^{-as}}{s(1-e^{-as})}$$

Για περισσότερους τύπους παραπέμπουμε στις αναφορές [ΕΜΟ] και [ΟΒ].