

1

Εισαγωγή στις Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

Περιεχόμενα

- 1.1 Γενικές Έννοιες, 1.1.1 Προβλήματα.
- 1.2 Μέθοδοι Επίλυσης Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων.
- 1.3 Καλά Τοποθετημένα Προβλήματα: Ευστάθεια.
- 1.4 Ταξινόμηση Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων Δεύτερης Τάξης: 1.4.1 Δύο Διαστάσεις, 1.4.2 N -Διαστάσεις, $N > 2$, 1.4.3 Προβλήματα.
- 1.5 Γραμμικές 2ης Τάξης με Σταθερούς Συντελεστές: 1.5.1 Γενική Θεωρία, 1.5.2 Η Λύση D'Alembert της Κυματικής Εξίσωσης, 1.5.3 Προβλήματα.
- 1.6 Επίλυση Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων με Μεθόδους Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων, 1.6.1 Προβλήματα.
- 1.7 Βιβλιογραφικές Αναφορές.

«Let us therefore cultivate with fervour the mathematical sciences, without wishing to extend them beyond their range; and let us not imagine that one could attack the problems of history with mathematical formulas, or that one could sanction the principles of morality by theorems of algebra and calculus.» **Augustin-Louis Cauchy**

1.1 Γενικές Έννοιες

Η εξέλιξη και συμπεριφορά των περισσότερων φαινομένων τόσο στη φύση όσο και στην κοινωνία (ηλεκτρισμός, μαγνητισμός, μηχανική, οπτική, θερμότητα, οικονομία, ψυχολογία, πολιτική, βιολογία, ιατρική, δημογραφία, κ.λ.π.) μπορούν να περιγραφούν με αρκετή ακρίβεια από τις μερικές διαφορικές εξισώσεις.

Είναι σίγουρο ότι η μελέτη επιμέρους προβλημάτων αυτών των φαινομένων μπορεί να γίνει με επίλυση αντίστοιχων συνήθων διαφορικών εξισώσεων (σ.δ.ε.). Ακόμα η γνώση της θεωρίας των συνήθων διαφορικών εξισώσεων είναι ιδιαίτερα απαραίτητη στην επίλυση προβλημάτων μερικών διαφορικών εξισώσεων με χρήση συγκεκριμένων μεθόδων, όπως για παράδειγμα, ο χωρισμός μεταβλητών, οι ολοκληρωτικοί μετασχηματισμοί, κλπ.

Με κάποια γενικότητα χωρίς ιδιαίτερη μαθηματική αυστηρότητα μπορούμε να πούμε ότι: **μερική διαφορική εξίσωση (μ.δ.ε.)** ή **εξίσωση μερικών παραγώγων (ε.μ.π.)** είναι κάθε εξίσωση, που περικλείει (άγνωστη) συνάρτηση δύο ή περισσότερων μεταβλητών και μερικές παραγώγους αυτής πρώτης ή ανώτερης τάξης. Ενδεικτικά αναφέρουμε μερικές από τις πολύ γνωστές μερικές διαφορικές εξισώσεις,

- $\Delta u(x) = \nabla^2 u(x) = 0, x \in D \subseteq \mathbb{R}^N, N \geq 2$, Εξίσωση Δυναμικού ή Εξίσωση Laplace,
- $\nabla^2 u(x) + k^2 u(x) = 0, x \in D \subseteq \mathbb{R}^N, N \geq 2$, Εξίσωση Helmholtz,
- $\Delta u(x) = -F(x), x \in D \subseteq \mathbb{R}^N, N \geq 2$, Εξίσωση Poisson,
- $u_t(x, t) = a^{-2} u_{xx}(x, t), t > 0, x \in D \subseteq \mathbb{R}, a > 0$, Εξίσωση Θερμότητας στη μια διάσταση,
- $u_{tt}(x, y, t) = c^{-2}(u_{xx}(x, y, t) + u_{yy}(x, y, t)), t > 0, (x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2, c > 0$, Κυματική εξίσωση στις 2 διαστάσεις,
- $u_{rr} + \frac{2}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} + \frac{\cot\varphi}{r^2}u_\varphi + \frac{1}{r^2\sin^2\varphi}u_{\theta\theta} = 0, (r, \varphi, \theta) \in (0, r_0) \times (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, Εξίσωση Laplace στις 3 διαστάσεις και σε σφαιρικές συντεταγμένες.

Το πεδίο ορισμού D θα θεωρηθεί γενικά ότι αποτελεί ένα ανοικτό (συνεκτικό) υποσύνολο του $\mathbb{R}^N, N \geq 1$. Το σύνορο του πεδίου D θα συμβολίζεται με ∂D .

Οι μερικές διαφορικές εξισώσεις **ταξινομούνται** με τρόπο όμοιο αυτού των συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε τις ακόλουθες έννοιες:

1.1.1 Προβλήματα

[1] Για κάθε μια από τις ακόλουθες μερικές διαφορικές εξισώσεις, να εξετασθεί αν είναι γραμμική, ημιγραμμική ή σχεδόν γραμμική. Γ' αυτές που είναι γραμμικές, να εξετασθεί αν είναι ομογενείς ή όχι και να βρεθεί η τάξη.

- (a) $u_{xx}(x, y) + 8xu_y(x, y) = 1243, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$
- (b) $u(x, y)u_x(x, y) + 2xyu_y(x, y) = 160, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$
- (c) $u_x^2(x, y) - u(x, y)u_y(x, y) = 15x^6y^7, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$
- (d) $u_{xxxx}(x, y) + 2u_{xxyy}(x, y) - u_{yyyy}(x, y) = 32u(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$
- (e) $u_{xx}(x, y) + 2u_{xy}(x, y) + u_{yy}(x, y) = y^2 \sin x, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2,$
- (f) $u_{xxx}(x, y) + u_{xyy}(x, y) + \log u = 2xy, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$
- (g) $u_{xx}^2(x, y) + u_x^2(x, y) + \cosh u = 9xye^{xy}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$

[2] Να επαληθευθεί ότι οι ακόλουθες συναρτήσεις αποτελούν κλασικές λύσεις των αντίστοιχων μερικών διαφορικών εξισώσεων

- (a) $u(x, y) = \sin kx \sinh ky, \quad u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad k \text{ σταθερά},$
- (b) $u(x, t) = \sin kxe^{-k^2t}, \quad u_{xx}(x, t) - u_t(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \quad k \text{ σταθερά},$
- (c) $u(x, y) = f(x) + g(y), \quad u_{xy}(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$
 f, g αυθαίρετες συναρτήσεις,
- (d) $u(x, y) = f(x+y) + g(x-y), \quad u_{xx}(x, y) - u_{yy}(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$
 f, g αυθαίρετες συναρτήσεις,
- (e) $u(x, t) = e^{-x} \cos(t-x), \quad u_{xx}(x, t) - 2u_t(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+.$

1.2 Μέθοδοι Επίλυσης Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων

Για τη μελέτη των μερικών διαφορικών εξισώσεων υπάρχει πλειάδα μεθόδων και τεχνικών, οι σημαντικότερες από τις οποίες μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι οι ακόλουθες

1. Χωρισμός Μεταβλητών. Με τη μέθοδο αυτή μια μερική διαφορική εξίσωση n μεταβλητών ανάγεται σε σύστημα n το πλήθος συνήθων διαφορικών εξισώσεων.

2. Αλλαγή Συντεταγμένων. Η μερική διαφορική εξίσωση ανάγεται, είτε σε συνήθη διαφορική εξίσωση ή σε απλούστερη μερική διαφορική εξίσωση σε ένα καινούργιο σύστημα συντεταγμένων. Η επιλογή του συστήματος εξαρτάται τόσο από το είδος της μερικής διαφορικής εξίσωσης, όσο και από το σχήμα του πεδίου (καρτεσιανές, πολικές, κυλινδρικές, σφαιρικές συντεταγμένες, κ.λ.π.).

3. Μετασχηματισμός της Εξαρτημένης Μεταβλητής. Αρκετές φορές μια κατάλληλη αλλαγή της άγνωστης συνάρτησης οδηγεί σε απλούστερη μερική διαφορική εξίσωση. Η μέθοδος αυτή είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στις μη ομογενείς γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις, όπως θα φανεί στις αντίστοιχες ενότητες. Η εφαρμογή της μεθόδου αυτής σε μη γραμμικά προβλήματα, όπως άλλωστε είναι αναμενόμενο, συνήθως απαιτεί τη μακρά εμπειρία και τις ιδιαίτερες ικανότητες του μελετητή.

4. Ανάπτυγμα Ιδιοσυναρτήσεων. Η τυπική λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης δίδεται ως ένα άπειρο άθροισμα ιδιοσυναρτήσεων. Οι ιδιοσυναρτήσεις αυτές προέρχονται από ένα πρόβλημα ιδιοτιμών, το οποίο συσχετίζεται με την εξίσωση.

5. Ολοκληρωτικοί Μετασχηματισμοί. Η μερική διαφορική εξίσωση n -μεταβλητών ανάγεται σε μερική διαφορική εξίσωση $(n - 1)$ -μεταβλητών. Για παράδειγμα, μια μερική διαφορική εξίσωση 2 μεταβλητών ανάγεται σε μια συνήθη διαφορική εξίσωση. Εκτός των μετασχηματισμών Laplace, Fourier και Hankel-Legendre, οι οποίοι θα χρησιμοποιηθούν αρκετές φορές στη συνέχεια, συχνά αποδεικνύονται ιδιαίτερα χρήσιμοι και αυτοί των Mellin, Hilbert, Z, Hermite, Jacobi, Gegenbauer, Laguerre, κλπ (Βλέπε, L. Debnath [28]).

6. Ολοκληρωτικές Εξισώσεις - Συναρτήσεις Green. Με τη βοήθεια μιας ειδικής συνάρτησης (συνάρτηση Green) η μερική διαφορική εξίσωση μετασχηματίζεται σε ολοκληρωτική εξίσωση, της οποίας η επίλυση οδηγεί στην εύρεση μιας τυπικής λύσης της εξίσωσης. Στη συνέχεια μια διαδικασία ομαλοποίησης της λύσης δίνει τις προϋποθέσεις, κάτω από τις οποίες η τυπική λύση αποτελεί μια κλασική λύση αυτής.

7. Λογισμός Μεταβολών ή Ενεργειακή Μέθοδος (Variational Methods). Η λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης βρίσκεται ως το ελάχιστο μιας συγκεκριμένης έκφρασης, η οποία σε ορισμένες περιπτώσεις παριστάνει τη συνολική ενέργεια του υπό μελέτη φαινομένου. Με άλλα λόγια η επίλυση της εξίσωσης ανάγεται σ' ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης.

8. Μέθοδοι Διαταραχών (Perturbation Methods). Η μη γραμμική μερική διαφορική εξίσωση προσεγγίζεται από μια ακολουθία γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων, για τις λύσεις των οποίων είτε είναι γνωστή η ακριβής αναλυτική έκφραση αυτών ή είναι δυνατόν να ελεγχθεί η ασυμπτωτική συμπεριφορά τους.

9. Μέθοδος Ώθησης-Απόκρισης (Impulse-Response). Οι αρχικές-συνοριακές συνθήκες του προβλήματος αναλύονται σε απλές ωθήσεις και βρίσκεται η απόκριση σε κάθε μια απ' αυτές. Η συνολική απόκριση αποτελεί το άθροισμα των

επιμέρους απλών αναδράσεων.



Εικόνα 1.1: Cauchy, Augustin (1789-1857)

10. Αριθμητικές Μέθοδοι. Η μερική διαφορική εξίσωση μετασχηματίζεται σ' ένα σύστημα εξισώσεων διαφορών, το οποίο μπορεί να επιλυθεί με διάφορες επαναληπτικές μεθόδους σε υπολογιστή. Ανάμεσα στις διάφορες άλλες αριθμητικές μεθόδους μπορεί να αναφερθεί η προσέγγιση μέσω πολυωνυμικών επιφανειών. Πρέπει να τονισθεί ότι σε πάρα πολλά προβλήματα (ιδίως μη γραμμικών) μερικών διαφορικών εξισώσεων οι αριθμητικές μέθοδοι αποτελούν τη μόνη δυνατή μέχρι σήμερα διαδικασία μελέτης.

1.3 Καλά Τοποθετημένα Προβλήματα: Ευστάθεια

Συνήθως τα φαινόμενα, τα οποία περιγράφονται από μια μερική διαφορική εξίσωση, επιβάλλουν κάποιους πρόσθετους περιορισμούς, που πρέπει να ικανοποιεί η λύση. Οι περιορισμοί αυτοί χωρίζονται στις ακόλουθες μεγάλες κατηγορίες:

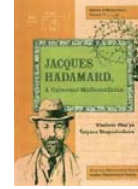
A. Συνθήκες Cauchy¹ ή Αρχικές Συνθήκες. Τιμές της άγνωστης συνάρτησης $u(x, t)$, πιθανόν και της $u_t(x, t)$, όπου $0 < t < \infty$, δίδονται στο σημείο $t = 0$, δηλαδή την αρχή μελέτης του εξεταζόμενου φαινομένου. Για παράδειγμα, το ακόλουθο

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= \Delta u(x, t), \quad x \in D, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= f_1(x), \quad u_t(x, 0) = f_2(x), \quad x \in D, \end{aligned}$$

όπου $D \times (0, \infty)$ το πεδίο ορισμού της $u(x, t)$ και $f_1(x), f_2(x)$ δοσμένες συναρτήσεις ορισμένες στο πεδίο D , αποτελεί ένα πρόβλημα αρχικών

¹Cauchy, Baron Augustin-Louis, FRS FRSE (21 August 1789-23 May 1857). Ήταν Γάλλος μαθηματικός, που θεωρείται ως ένας σημαντικός πρωτοπόρος της Μαθηματικής Ανάλυσης. Ήταν ένας από τους πρώτους που διατύπωσε και απόδειξε με μαθηματική αυστηρότητα θεωρήματα του Λογισμού, απορρίπτοντας το πνεύμα της γενικότητας της Άλγεβρας προηγούμενων συγγραφέων. Σχεδόν μόνος του θεμελίωσε τη Μιγαδική Ανάλυση και τις αντιμεταθετικές ομάδες στην Αφηρημένη Άλγεβρα. Ως ένας σημαντικός μαθηματικός, ο Cauchy είχε μεγάλη επιρροή πάνω τους συγχρόνους αλλά και τους διαδόχους του. Το έργο του εκτείνεται από τα θεωρητικά Μαθηματικά έως τη Μαθηματική Φυσική. Κάποιοι ισχυρίζονται ότι «με το όνομα Cauchy έχουν ονομαστεί περισσότερες έννοιες και θεωρήματα, απ' ό,τι για οποιονδήποτε άλλο μαθηματικό. Στην ελαστικότητα μόνο υπάρχουν δεκαέξι έννοιες και θεωρήματα με το όνομά του». Ο Cauchy ήταν ένας έντονα παραγωγικός συγγραφέας: έγραψε περίπου οκτακόσια ερευνητικά άρθρα και πέντε πλήρη συγγράμματα. Ήταν ένας αφοσιωμένος καθολικός, φανατικός βασιλόφρονας υποστηρικτής της δυναστείας των Bourbon, και στενός συνεργάτης της Τάξης των Ιησουιτών.

Η παραπάνω τριάδα προϋποθέσεων συνιστά την **αρχή Hadamard**. Οι δύο πρώτες αρχές εξασφαλίζουν την ύπαρξη μοναδικής συνάρτησης, η οποία ικανοποιεί τόσο τη μερική διαφορική εξίσωση όσον και τις επιμέρους περιοριστικές συνθήκες. Η τρίτη τοιαύτη (ευστάθεια) εξασφαλίζει την πρακτική χρησιμότητα μιας τέτοιας λύσης, αφού, εκτός των άλλων, για τη μελέτη αυτής μπορούν να χρησιμοποιηθούν αριθμητικές ή άλλες προσεγγιστικές μέθοδοι (διαταραχών, κλπ).



Εικόνα 1.2: Hadamard, Jacques (1865 - 1963)

Επειδή τα μαθηματικά πρότυπα, που περιγράφουν τα διάφορα φαινόμενα, είναι απόρροια απλουστεύσεων και/ή αυθαιρέτων παραδοχών, αρκετά συχνά συναντώνται προβλήματα, τα οποία δεν είναι καλά τοποθετημένα. Πρέπει να σημειωθεί ότι υπάρχει μια συνεχώς αναπτυσσόμενη θεωρία μελέτης μη καλά τοποθετημένων προβλημάτων, με την οποία δεν πρόκειται να ασχοληθούμε στα πλαίσια αυτού του συγγράμματος. Ενδεικτικά όμως θα παραθέσουμε δύο παραδείγματα **μη καλά τοποθετημένων προβλημάτων** κατά Hadamard¹.

Παράδειγμα 1.3.2. Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα υπερβολικού τύπου (βλέπε επόμενη Ενότητα 1.4) με συνοριακές συνθήκες τύπου *Dirichlet*

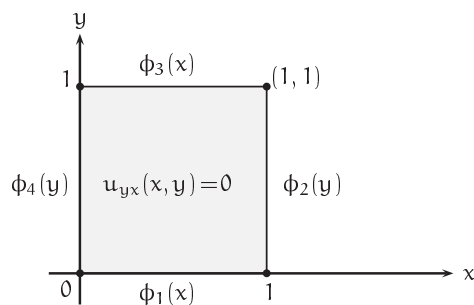
$$u_{yx}(x, y) = 0, \quad (x, y) \in D, \quad (3.5)$$

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), u(1, y) = \varphi_2(y), \quad u(x, 1) = \varphi_3(x), u(0, y) = \varphi_4(y), \quad (3.6)$$

¹Hadamard, Jacques Salomon (8 December 1865-17 October 1963). Γάλλος μαθηματικός. Το 1884 εισήλθε πρώτος στην École Normale Supérieure και στην École Polytechnique. Μεταξύ των καθηγητών του περιλαμβάνονταν οι Tannery, Hermite, Darboux, Appell, Goursat and Picard! Απέκτησε το διδακτορικό του το 1892 και την ίδια χρονιά του απονεμήθηκε το *Grand Prix des Sciences Mathématiques* για την εργασία του στην συνάρτηση Ζήτα. Το 1893 εκλέχτηκε καθηγητής Αστρονομίας και Μηχανικής στο Πανεπιστήμιο του Μπορντό, όπου απέδειξε τη περίφημη ανισότητα του για τις ορίζουσες, που οδήγησε στην ανακάλυψη των πινάκων Hadamard. Το 1896 έκανε δύο σημαντικές συνεισφορές: απέδειξε το Θεώρημα Πρώτων Αριθμών, με τη χρήση μιγαδικών συναρτήσεων και εργασία σχετικά με τις γεωδαιτικές στη Διαφορική Γεωμετρία των επιφανειών και των δυναμικών συστημάτων (βραβείο Bordin της Γαλλικής Ακαδημίας Επιστημών). Το Θεμελιακό έργο του σχετικά με Γεωμετρία και συμβολική δυναμική συνεχίστηκε το 1898 με τη μελέτη των γεωδαιτικών στις επιφάνειες με αρνητική καμπυλότητα. Για το συνολικό έργο του, του απονεμήθηκε το Βραβείο Poincaré το 1898. Το 1897 επέστρεψε στο Παρίσι, κατέχοντας συγχρόνως θέσεις στη Σορβόνη και το Collège de France, ως καθηγητής της Μηχανικής (1909). Στη συνέχεια κατέλαβε την Έδρα της Ανάλυσης στην École Polytechnique (1912) και στην École Centrale (1920), διαδεχόμενος τους παλιούς δασκάλους Jordan και Appell, αντίστοιχα. Στο Παρίσι ασχολήθηκε κυρίως με τις Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις, το Λογισμό των Μεταβολών και τη Συναρτησιακή Ανάλυση. Εισήγαγε τη σημαντική έννοια του καλά-τοποθετημένου προβλήματος. Ο Hadamard εξελέγη μέλος στην Académie Française des Sciences (1916), διαδεχόμενος τον Poincaré. Επίσης εξελέγη μέλος της Βασιλικής Ολλανδικής Ακαδημίας Τεχνών και Επιστημών (1920), της Ακαδημίας Επιστημών της ΕΣΣΔ (1929). Του απονεμήθηκε το Χρυσό Μετάλλιο στο CNRS (1956). Μεταξύ των μαθητών του ήταν οι M. Fréchet, P. Lévy, Sz. Mandelbrojt και A. Weil.

όπου $(x, y) \in D =: \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ και $\varphi_1(x), \varphi_2(y), \varphi_3(x), \varphi_4(y)$ τυχαίες δοσμένες συναρτήσεις των x, y (Βλέπε, Σχήμα 1.2). Να εξεταστεί η καλή ή μη τοποθέτηση του προβλήματος αυτού.

Λύση Επειδή $u_{yx}(x, y) = 0$ έχουμε $u_y(x, y) = \text{σταθερά}$, δηλαδή θα ισχύει $u_y(0, y) = u_y(1, y)$. Επομένως, για να έχει λύση το πρόβλημα (3.5)-(3.6) θα πρέπει να ισχύει $\varphi_2'(y) = \varphi_4'(y)$. Άρα για τυχαίες συνοριακές συνθήκες $\varphi_2(y), \varphi_4(y)$ το πρόβλημα (3.5)-(3.6) δεν έχει λύση, δηλαδή συνιστά ένα μη καλά τοποθετημένο πρόβλημα, αφού δεν ισχύει η συνθήκη (β).



Σχήμα 1.2: Ένα Μη καλά Τοποθετημένο Πρόβλημα Dirichlet.

Παράδειγμα 1.3.3. (Πρόβλημα Hadamard) Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα ελλειπτικού τύπου (βλέπε επόμενη Ενότητα 1.4) με αρχικές συνθήκες Cauchy

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0, \quad (x, y) \in D, \quad (3.7)$$

$$u(0, y) = 0, \quad u_x(0, y) = \frac{\sin ny}{n}, \quad (3.8)$$

όπου $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}, y > 0\}$. Να εξεταστεί η καλή ή μη τοποθέτηση του προβλήματος αυτού.

Λύση Εύκολα διαπιστώνεται ότι, η συνάρτηση

$$u_n(x, y) = \frac{(\sinh nx)(\sin ny)}{n^2}$$

αποτελεί λύση του προβλήματος (3.7) - (3.8). Παρατηρούμε όμως ότι, καθώς το $n \rightarrow \infty$, οι μεν αρχικές συνθήκες τείνουν στο 0, ενώ η λύση $u_n(x, y)$, καθώς το $x \rightarrow \infty$, ταλαντώνεται με πλάτος εκθετικά αυξανόμενο - σύμφωνα με τον όρο $\sinh nx$. Έτσι μικρές διαταραχές στα αρχικά δεδομένα οδηγούν σε τεράστιες μεταβολές στη λύση, δηλαδή η λύση είναι ασταθής, κατά την έννοια του Ορισμού 1.3.1. Άρα το πρόβλημα (3.7)-(3.8) είναι μη καλά τοποθετημένο, αφού δεν ισχύει η συνθήκη (γ).

όπου $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ και a, b, c, d, e, f είναι συναρτήσεις μόνο των x, y . (α) Να αποδειχθεί ότι, όταν όλοι οι συντελεστές είναι σταθεροί, οι κανονικές μορφές για τις υπερβολικές, παραβολικές ή ελλειπτικές εξισώσεις παραμένουν γραμμικές με σταθερούς συντελεστές και είναι αντίστοιχα της μορφής

$$\begin{aligned} w_{v\eta}(v, \eta) + pw_v(v, \eta) + qw_\eta(v, \eta) + rw(v, \eta) &= g(v, \eta), \text{ υπερβολική,} \\ w_{vv}(v, \eta) + pw_v(v, \eta) + qw_\eta(v, \eta) + rw(v, \eta) &= g(v, \eta), \text{ παραβολική,} \\ w_{v\eta}(v, \eta) + w_{\eta\eta}(v, \eta) + pw_v(v, \eta) + qw_\eta(v, \eta) + rw(v, \eta) &= g(v, \eta), \text{ ελλειπτική.} \end{aligned}$$

(β) Να αποδειχθεί ότι η εφαρμογή του μετασχηματισμού $v(v, \eta) = e^{\varepsilon v + \rho \eta} w(v, \eta)$, όπου ε, ρ είναι κατάλληλες σταθερές, (i) στην περίπτωση της υπερβολικής και της ελλειπτικής μορφής απαλείφει τους όρους πρώτης τάξης, ενώ (ii) στην περίπτωση της παραβολικής μορφής απαλείφει τους όρους w_v, w , όταν $q \neq 0$ και τους όρους w_v, w_η , όταν $q = 0$.

1.6 Επίλυση Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων με Μεθόδους Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων

Υπάρχει μια μεγάλη ομάδα μερικών διαφορικών εξισώσεων, των οποίων η λύση βρίσκεται με τις ήδη γνωστές μεθόδους των συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Δεν υπάρχει γενικός κανόνας για την εφαρμογή αυτών των μεθόδων. Η χρησιμοποίηση τους εξαρτάται τόσο από την απλότητα της υπό εξέταση μερικής διαφορικής εξίσωσης, όσον και από την εμπειρία και δεξιότητα του μελετητή. Ενδεικτικά θα παραθέσουμε τα ακόλουθα προβλήματα.

Παράδειγμα 1.6.1. Με τη χρήση μεθόδων των συνήθων διαφορικών εξισώσεων να λυθεί το ακόλουθο πρόβλημα μερικών διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης

$$u_{yy}(x, y) = x^2 \cos y, x \in \mathbb{R}, y \in (0, \pi/2), u(x, 0) = 0, u(x, \pi/2) = 0. \quad (6.1)$$

Λύση Έχουμε ότι

$$du_y/dy = x^2 \cos y \quad \text{ή} \quad du_y = x^2 \cos y dy.$$

Με διαδοχικές ολοκληρώσεις προκύπτει ότι

$$u_y = x^2 \sin y + f(x) \quad \text{ή} \quad u(x, y) = -x^2 \cos y + f(x)y + g(x),$$

όπου f και g αυθαίρετες συναρτήσεις στο $C^1(\mathbb{R})$. Όμως έχουμε ότι $u(x, 0) = -x^2 + g(x) = 0$, δηλαδή $g(x) = x^2$. Επίσης ισχύει ότι $u(x, \pi/2) = \frac{\pi f(x)}{2} + g(x) = 0$, απ' όπου προκύπτει ότι $f(x) = -\frac{2x^2}{\pi}$. Άρα τελικά η (μοναδική) λύση του προβλήματος (6.1) δίδεται από τη συνάρτηση

$$u(x, y) = -x^2 \cos y - \frac{2yx^2}{\pi} + x^2.$$

2

Εξισώσεις Ελλειπτικού Τύπου

Περιεχόμενα

- 2.1 Εισαγωγή - Φραγμένα Πεδία - Αρχή Υπέρθεσης.
- 2.2 Ιστορικό.
- 2.3 Εξίσωση Laplace σε Καρτεσιανές Συντεταγμένες: 2.3.1 Ορθογώνια Πεδία - Συνοριακές Συνθήκες Dirichlet, 2.3.2 Συνοριακές Συνθήκες Τύπου Robin, 2.3.3 Εξίσωση Poisson με Συνοριακές Συνθήκες Τύπου Dirichlet, 2.3.4 Προβλήματα.
- 2.4 Εξίσωση Laplace σε Πολικές Συντεταγμένες. Κυκλικά και Δακτυλιοειδή Πεδία: 2.4.1 Εισαγωγή, 2.4.2 Το Πρόβλημα Dirichlet σε Δίσκο, 2.4.3 Το Πρόβλημα Neumann σε Δίσκο, 2.4.4 Το Πρόβλημα Δυναμικού στο Δακτύλιο, 2.4.5 Προβλήματα.
- 2.5 Ιδιότητες των Αρμονικών Συναρτήσεων: 2.5.1 Μονοσήμαντο του Προβλήματος Dirichlet, 2.5.2 Αρχή Μεγίστου - Ελαχίστου / Ευστάθεια, 2.5.3 Μονοσήμαντο του Προβλήματος Neumann, 2.5.4 Μονοσήμαντο του Προβλήματος Robin,
- 2.6 Βιβλιογραφικές Αναφορές.
- 2.7 Γενικά Προβλήματα.

«All the effects of nature are only the mathematical consequences of a small number of immutable laws.» **Pierre Simon de Laplace**

2.1 Εισαγωγή-Φραγμένα Πεδία - Αρχή Υπέρθεσης

Η πιο σημαντική εξίσωση της Μαθηματικής Φυσικής είναι η απλούστερη μερική διαφορική εξίσωση ελλειπτικού τύπου, η οποία ονομάζεται **εξίσωση δυναμικού** ή **εξίσωση Laplace**¹.

Η μορφή της εξίσωσης Laplace σε καρτεσιανές συντεταγμένες, στις δύο και τρεις διαστάσεις είναι

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) &= 0, & (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2, \\ u_{xx}(x, y, z) + u_{yy}(x, y, z) + u_{zz}(x, y, z) &= 0, & (x, y, z) \in D \subset \mathbb{R}^3, \end{aligned}$$

όπου D ένα ανοικτό (συνεκτικό) υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$, $N = 2, 3$, αντίστοιχα. Η γενική μορφή της εξίσωσης Laplace στις N διαστάσεις είναι

$$\Delta u(x) = \nabla^2 u(x) = 0, \quad x \in D \subset \mathbb{R}^N,$$

ανεξάρτητα από σύστημα συντεταγμένων και διάσταση. Σε επόμενες ενότητες θα έχουμε την ευκαιρία να διαμορφώσουμε και μελετήσουμε την εξίσωση Laplace σε πολικές, κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες.

Η εξίσωση δυναμικού περιγράφει τη **στάσιμη κατάσταση** όλων των φαινομένων, των οποίων η γραμμικοποίηση του μαθηματικού προτύπου οδηγεί σε ομογενείς γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις υπερβολικού ή παραβολικού τύπου. Ως τέτοια, αποτελεί το μαθηματικό πρότυπο στάσιμων φαινομένων, όπως

- στάσιμη κατάσταση μετάδοσης θερμότητας σε ομογενές υλικό,



Εικόνα 2.1: Laplace, Pierre - Simon (1749 - 1827)

¹ Ο Laplace, Pierre-Simon, Marquis de (23 Μαρ 1749-5 Μαρτίου, 1827) ήταν ένας επιφανής Γάλλος διανοούμενος, του οποίου το έργο ήταν σημαντικό για την ανάπτυξη των Μαθηματικών, της Στατιστικής, της Φυσικής και της Αστρονομίας. Στο πεντάτομο έργο του «*Mécanique Céleste*» (*Ουράνια Μηχανική*) (1799-1825) συγκέντρωσε και επεξεκίνησε το έργο των προγενεστέρων του. Στο έργο αυτό μεταφράστηκε η γεωμετρική μελέτη της Κλασικής Μηχανικής σε ένα σύστημα βασισμένο στο Λογισμό. Στη Στατιστική, η Μπεϋζιανή θεώρηση των Πιθανοτήτων αναπτύχθηκε κυρίως από το Laplace. Ο Laplace διαμόρφωσε την ομώνυμη εξίσωση Laplace, και πρωτοστάτησε στο ορισμό του Μετασχηματισμού Laplace, ο οποίος εμφανίζεται σε πολλούς κλάδους της Μαθηματικής Φυσικής. Ο ίδιος επαναδιατύπωσε και ανέπτυξε περαιτέρω την «*υπόθεση των νεφελωμάτων*» για την προέλευση του Ηλιακού Συστήματος και υπέθεσε την ύπαρξη των μαύρων οπών και την έννοια της βαρυτικής κατάρρευσης. Ο Laplace θεωρείται ως ένας από τους μεγαλύτερους επιστήμονες όλων των εποχών, αναφέρεται ως ο «*Γάλλος Newton*» και κατείχε μια εκπληκτική φυσική μαθηματική ικανότητα ανώτερη των συγχρόνων του. Ο Laplace ονομάστηκε Κόμης της Πρώτης Γαλλικής Αυτοκρατορίας το 1806 και Μαρκήσιος το 1817, μετά την παλινόρθωση των Βουρβόνων. Ο Laplace εξελέγη μέλος της Académie Française des Sciences στις 31 Μαρτίου 1773. Επίσης το 1806, εξελέγη εξωτερικό μέλος της Βασιλικής Ακαδημίας Επιστημών της Σουηδίας.

- δυναμικό βαρύτητας σε ελεύθερο χώρο,
- ηλεκτροστατικό δυναμικό σε ομοιόμορφα διηλεκτρικά,
- μαγνητικό δυναμικό σε ελεύθερο χώρο,
- ηλεκτρικό δυναμικό στη θεωρία της στάσιμης ροής ρευμάτων σε στερεούς αγωγούς,
- το δυναμικό ταχύτητας σε ρευστά χωρίς εσωτερική τριβή (*inviscid*).

Οι λύσεις της εξίσωσης δυναμικού αποτελούν τις **δυναμικές συναρτήσεις**, των οποίων η μελέτη αποτελεί αντικείμενο ενός ιδιαίτερου κλάδου των μαθηματικών της **θεωρίας δυναμικού**. Η βασική ιδιότητα των συνεχών δυναμικών συναρτήσεων είναι η **λειότητα**.

Ένα **καλά τοποθετημένο πρόβλημα**, που περικλείει μια εξίσωση Laplace συνοδεύεται από μια συνοριακή συνθήκη. Οι συνοριακές συνθήκες, όπως αναφέρεται στην Ενότητα 1.3, είναι τριών τύπων **Dirichlet**, **Neumann** και **μεικτές** ή **Robin**. Ακόμα τα προβλήματα Laplace χωρίζονται σε **εσωτερικά**, αν το σύνορο περικλείει το πεδίο και **εξωτερικά**, αν το σύνορο περικλείει το συμπλήρωμα του πεδίου. Στη δεύτερη περίπτωση το πεδίο θα πρέπει να είναι μη φραγμένο.

Υπάρχουν πολυάριθμα φαινόμενα, των οποίων η εξέλιξη συντελείται σ' ένα **φραγμένο πεδίο** του χώρου. Το γεγονός αυτό αποτελεί καθοριστικό στοιχείο στην επιλογή της μεθόδου επίλυσης, κατ' επέκταση δε και στο σύνολο των βασικών κοινών χαρακτηριστικών αυτών των προβλημάτων. Για το λόγο αυτό η ανάπτυξη και εφαρμογή των μεθόδων, που αφορούν προβλήματα ορισμένα σε μη-φραγμένα πεδία, θα γίνει χωριστά στο Κεφάλαιο 6.

Ένα άλλο στοιχείο σημαντικό στη μελέτη των μερικών διαφορικών εξισώσεων είναι η **διάσταση του πεδίου ορισμού**. Έτσι το Κεφάλαιο 2 αναφέρεται σε προβλήματα Ελλειπτικού Τύπου σε δύο (χωρικές) διαστάσεις (μεταβλητές x, y). Το Κεφάλαιο 3 αναφέρεται σε προβλήματα Παραβολικού Τύπου και το Κεφάλαιο 4 σε προβλήματα Υπερβολικού Τύπου στη μια (χωρική) διάσταση (μεταβλητές x, t). Η αντιμετώπιση των προβλημάτων αυτών γίνεται με ενιαία μεθοδολογία.

Στο Κεφάλαιο 5 θα ασχοληθούμε με τα παραπάνω προβλήματα στις δύο και τρεις (χωρικές) διαστάσεις, όπου η μεθοδολογία είναι πιο σύνθετη (Πολλαπλές Σειρές Fourier, Σειρές Fourier-Bessel, Σειρές Fourier-Legendre, κ.λ.π. ...).

Ιδιαίτερα χρήσιμη για τη μελέτη των γραμμικών προβλημάτων θα αποδειχθεί η **αρχή της υπέρθεσης (superposition principle)**, την οποία θα δώσουμε στη συνέχεια σε δύο μορφές, για αντίστοιχα προβλήματα. Η απόδειξη αυτών των

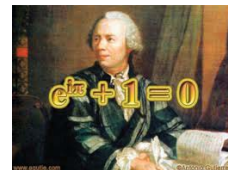
αποτελεσμάτων γίνεται με απλή αντικατάσταση των συναρτήσεων.

Θεώρημα 2.1.1. (1η Αρχή Υπέρθωσης) Έστω $u_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \dots$, $x \in D \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, λύσεις μιας γραμμικής ομογενούς μερικής διαφορικής εξίσωσης $Lu(x) = 0$, $x \in D \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$. Τότε κάθε γραμμικός συνδυασμός αυτών αποτελεί επίσης λύση αυτής της εξίσωσης. Ειδικότερα, η συνάρτηση $u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x)$ αποτελεί λύση της εξίσωσης, για κάθε σύνολο σταθερών $c_1, c_2, c_3, \dots$, για το οποίο η σειρά αυτή συγκλίνει.

Θεώρημα 2.1.2. (2η Αρχή Υπέρθωσης) Έστω $u_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \dots, m$, $x \in D \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, λύσεις των m το πλήθος γραμμικών μη-ομογενών μερικών διαφορικών εξισώσεων $Lu = f_n$, $n = 1, 2, 3, \dots, m$. Τότε η $u = \sum_{n=1}^m u_n$ αποτελεί λύση της μη ομογενούς εξίσωσης $Lu = \sum_{n=1}^m f_n$.

2.2 Ιστορικό

Ο **Pierre Simon de Laplace** πρώτος ανέπτυξε διεξοδικά τη θεωρία δυναμικού στο μεγαλειώδες έργο του *Mécanique Céleste*, που εκδόθηκε σε 5 τόμους από το 1799 έως το 1825. Αν και δεν αναγνώρισε τη σημαντική συνεισφορά άλλων μαθηματικών, όπως για παράδειγμα του **Joseph Lagrange** (1736-1813), όμως με το έργο του διεύρυνε τόσο πολύ τη θεωρία δυναμικού, ώστε η βασική εξίσωση $\Delta u(x) = \nabla^2 u(x) = 0$, να φέρει το όνομα του. Θα πρέπει εντούτοις να αναφέρουμε ότι, η εξίσωση αυτή παρουσιάζεται για πρώτη φορά στις εργασίες του **Leonhard Euler**¹, που αφορούσαν την υδροδυναμική.



Εικόνα 2.2: Euler, Leonhard (1707-1783)

Ένας άλλος λαμπρός μαθηματικός και φυσικός της εποχής εκείνης ήταν ο **Siméon Denis Poisson** (1781-1840), ο οποίος υπήρξε μαθητής και προστατευόμενος του P. S. de Laplace. Ο Poisson σε μια εργασία του 1833 διατύπωσε την πρόταση, ότι

¹Euler, Leonhard (1707-1783) ήταν Ελβετός μαθηματικός και φυσικός. Έκανε σημαντική δουλειά σε διάφορες περιοχές των Μαθηματικών από τον Απειροστικό Λογισμό μέχρι τη Θεωρία Γραφημάτων. Επίσης εισήγαγε πολλά από τα σύμβολα που χρησιμοποιούνται στα σύγχρονα μαθηματικά, ειδικά στη Μαθηματική Ανάλυση. Ακόμα και εκτός Μαθηματικών είναι ξακουστός για το έργο του στη Μηχανική, στην Υδροδυναμική, την Οπτική, την Αστρονομία και τη Θεωρία της Μουσικής. Ο Euler θεωρείται ότι είναι ο διαπρεπέστερος μαθηματικός του 18ου αιώνα και ένας από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς όλων των εποχών. Υπήρξε ένας από τους πιο παραγωγικούς μαθηματικούς. Το συνολικό έργο του εκτιμάται ότι, αν δημοσιευθεί, μπορεί να καταλάβει από 60 έως 80 ογκώδεις τόμους. Πέρασε το μεγαλύτερο μέρος της ενήλικης ζωής του στην Αγία Πετρούπολη και στο Βερολίνο. Μια δήλωση που αποδίδεται στον Pierre-Simon Laplace εκφράζει την επιρροή του Euler στα μαθηματικά: «Διαβάστε Euler, διαβάστε Euler, αυτός είναι ο Κύριος όλων μας».

Άρα, η τελική μορφή της τυπικής λύσης του προβλήματος είναι

$$u(x, y) = \frac{8T_0}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin[(2n-1)\pi x] \sinh[(2n-1)\pi y]}{(2n-1)^3 \sinh[(2n-1)\pi]}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1.$$

Παράδειγμα 2.3.2. Να λυθεί το ακόλουθο πρόβλημα συνοριακών συνθηκών τύπου *Dirichlet*

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) &= 0, & 0 < x < \pi, & \quad 0 < y < 1, \\ u(0, y) = 0, & \quad u(\pi, y) &= 0, & \quad 0 < y < 1, \\ u(x, 0) = 0, & \quad u(x, 1) &= \sin x, & \quad 0 < x < \pi. \end{aligned} \quad (\alpha)$$

Λύση Εφαρμόζουμε το χωρισμό μεταβλητών $u(x, y) = X(x)Y(y)$ στο πρόβλημα (α) , οπότε προκύπτουν τα προβλήματα

$$\begin{aligned} X''(x) + \lambda X(x) &= 0, & 0 < x < \pi, & \quad X(0) = 0, \quad X(\pi) = 0, \\ Y''(y) - \lambda Y(y) &= 0, & 0 < y < 1, & \quad Y(0) = 0, \end{aligned} \quad (\beta)$$

Η γενική λύση του προβλήματος (β) είναι

$$X(x) = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx, \quad \text{όπου} \quad \lambda = k^2.$$

Κάνοντας χρήση των συνοριακών συνθηκών βρίσκουμε ότι, τα ιδιοζεύγη του προβλήματος (β) είναι

$$\lambda_n = n^2, \quad X_n(x) = \sin(nx), \quad 0 < x < \pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\delta)$$

Θέτοντας $\lambda = \lambda_n$ στην εξίσωση (γ) υπολογίζεται ότι, η λύση του προβλήματος (γ) έχει τη μορφή

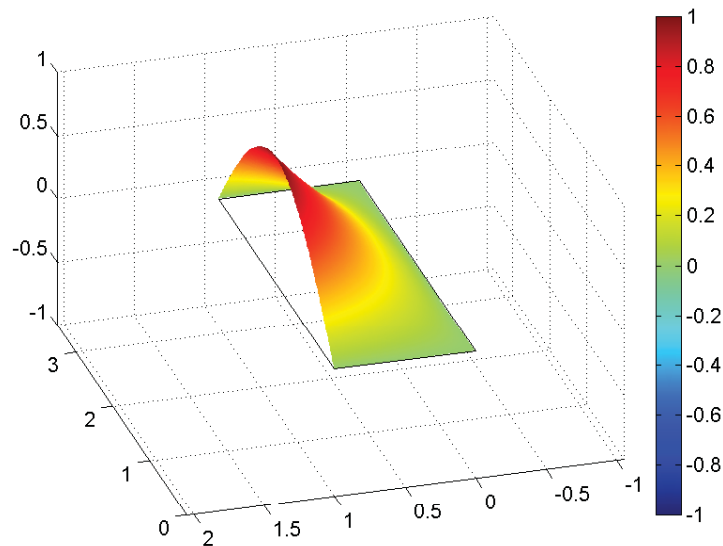
$$Y_n(y) = \sinh(ny), \quad 0 < y < 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\epsilon)$$

Συνδυάζοντας τη γενικευμένη αρχή της υπέρθεσης με τις σχέσεις (δ) και (ϵ) προκύπτει ότι, η λύση του προβλήματος (α) θα είναι

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(nx) \sinh(ny), \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < 1,$$

όπου οι σταθερές c_n προσδιορίζονται, έτσι ώστε να ικανοποιείται η μη ομογενής συνοριακή συνθήκη. Θα πρέπει επομένως να ισχύει

$$u(x, 1) = \sin x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(nx) \sinh(n), \quad 0 < x < \pi.$$



Σχήμα 2.2: Το Πρόβλημα Dirichlet σε Ορθογώνιο του Παραδείγματος 2.3.2.

Η τελευταία σχέση συνεπάγεται ότι, για $n = 1$ έχουμε $c_1 \sinh(1) = 1$ ή $c_1 = 1/\sinh(1)$. Ενώ για $n = 2, 3, 4, \dots$, ισχύει

$$c_n = \frac{2}{\pi \sinh n} \int_0^\pi \sin x \sin(nx) dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi \{\cos(1-n)x - \cos(1+n)x\} dx = 0.$$

Άρα το πρόβλημα (α) δέχεται τυπική λύση της μορφής

$$u(x, y) = \frac{\sinh y \sin x}{\sinh(1)}, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < 1.$$

Μελέτη με τα προγράμματα COMSOL 3.2 και MATLAB.

Στο Σχήμα 2.2 παρουσιάζουμε το Πρόβλημα Dirichlet σε Ορθογώνιο του Παραδείγματος 2.3.2. Το Σχήμα έχει γίνει με τα προγράμματα COMSOL 3.2 και MATLAB.

2.3.2 Συνοριακές Συνθήκες Τύπου Robin

Θεωρούμε το πρόβλημα της εξίσωσης Laplace σε ορθογώνιο με συνοριακές συνθήκες Robin¹.

Πιο συγκεκριμένα, θεωρούμε ότι είναι ομογενείς Neumann στις πλευρές $x = 0$, $x = \pi$ και μη ομογενείς Dirichlet συνοριακές συνθήκες στις πλευρές $y = 0$, $y = 1$

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < 1, \quad (3.15)$$

$$u_x(0, y) = 0, \quad u_x(\pi, y) = 0, \quad 0 < y < 1, \quad (3.16)$$

$$u(x, 0) = T_0 \cos x, \quad u(x, 1) = T_0 \cos^2 x, \quad 0 < x < \pi, \quad (3.17)$$

όπου το T_0 είναι μια πραγματική σταθερά. Εφαρμόζοντας την τεχνική του χωρισμού των μεταβλητών στο πρόβλημα (3.15) - (3.17) προκύπτουν τα ακόλουθα προβλήματα

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad X'(0) = 0, \quad X'(\pi) = 0, \quad (3.18)$$

$$Y''(y) - \lambda Y(y) = 0, \quad 0 < y < 1. \quad (3.19)$$

Λύνοντας το πρόβλημα (3.18) προκύπτουν οι ακόλουθες ιδιοτιμές και αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 0, & X_0(x) &= 1, & 0 < x < \pi, \\ \lambda_n &= n^2, & X_n(x) &= \cos nx, & n = 1, 2, 3, \dots, & 0 < x < \pi. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Η επίλυση του προβλήματος (3.19), για $\lambda = \lambda_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, δίδει τις λύσεις

$$Y_n(y) = \begin{cases} a_0 + b_0 y, & n = 0, & 0 < y < 1, \\ a_n \cosh ny + b_n \sinh ny, & n = 1, 2, 3, \dots, & 0 < y < 1. \end{cases} \quad (3.21)$$

Ακολουθώντας τη διαδικασία των προηγούμενων παραδειγμάτων, από τις σχέσεις (3.20) και (3.21) βρίσκουμε ότι, η λύση του προβλήματος (3.15)-(3.17) θα έχει τη μορφή

$$u(x, y) = a_0 + b_0 y + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cosh ny + b_n \sinh ny] \cos nx, \quad (3.22)$$

για κάθε $0 < x < \pi$, $0 < y < 1$. Η συνοριακή συνθήκη Dirichlet στο άκρο $y = 0$ εφαρμοζόμενη στη λύση (3.22) δίδει

$$u(x, 0) = T_0 \cos x = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx), \quad 0 < x < \pi.$$

¹Robin, Victor Gustave (1855-1897) ήταν Γάλλος μαθηματικός με έργο στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά. Δίδαξε Μαθηματική Φυσική στο Πανεπιστήμιο της Σορβόνης. Εργάστηκε επίσης στη Θερμοδυναμική. Είναι γνωστός κυρίως για την ομώνυμη συνοριακή συνθήκη στις διαφορικές εξισώσεις. Η Γαλλική Ακαδημία Επιστημών του απένειμε 2 φορές το Βραβείο Francœur (1893, 1897) και το Βραβείο Poncelet (1895).

Η τελευταία σχέση συνεπάγεται ότι θα ικανοποιείται η συνθήκη Dirichlet στο άκρο $y = 0$ μόνο για $a_0 = 0$, $a_1 = T_0$ και $a_n = 0$, για όλα τα υπόλοιπα $n = 2, 3, 4, \dots$. Επομένως η λύση (3.22) γίνεται

$$u(x, y) = b_0 y + T_0 \cosh y \cos x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sinh ny \cos nx, \quad (3.23)$$

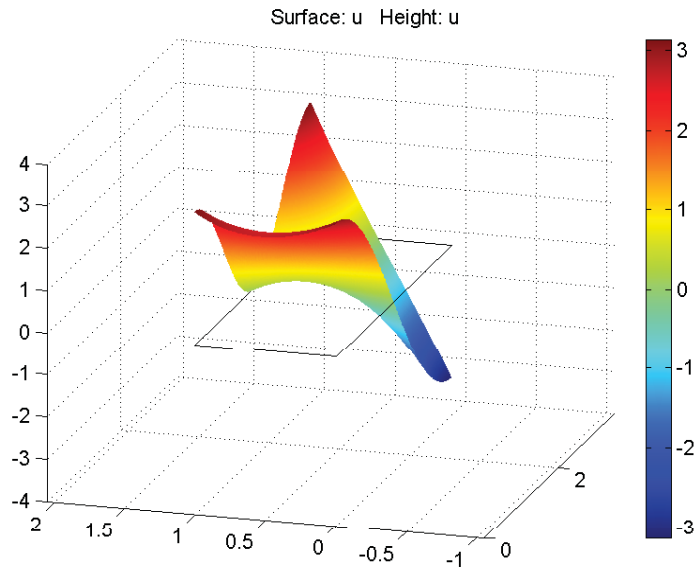
όπου $0 < x < \pi$, $0 < y < 1$. Εφαρμόζοντας τώρα στη λύση (3.23) τη συνοριακή συνθήκη Dirichlet στο άκρο $y = 1$, προκύπτει

$$T_0 \cos^2 x = b_0 + T_0 \cosh 1 \cos x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sinh n \cos(nx),$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{1}{2}T_0 + \frac{1}{2}T_0 \cos 2x - T_0 \cosh 1 \cos x = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sinh n \cos(nx).$$

Για να αληθεύει η τελευταία σχέση, θα πρέπει να ισχύουν οι ακόλουθες ισότητες



Σχήμα 2.3: Το Πρόβλημα (3.15) - (3.17) για $T_0 = \pi$.

$$b_0 = \frac{1}{2}T_0, \quad b_1 = -\frac{T_0 \cosh 1}{\sinh 1}, \quad b_2 = \frac{T_0}{2 \sinh 2}, \quad b_n = 0, \quad \text{για } n = 3, 4, 5, \dots$$

Συνδυάζοντας όλα τα προηγούμενα βρίσκουμε ότι, τελικά η τυπική λύση του προβλήματος (3.15) - (3.17) για $0 < x < \pi$, $0 < y < 1$, είναι

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{1}{2}T_0y + T_0 \left[\cosh y - \frac{\cosh 1 \sinh y}{\sinh 1} \right] \cos x + T_0 \frac{\sinh 2y}{2 \sinh 2} \cos 2x \\ &= T_0 \left[\frac{1}{2}y + \frac{\sinh(1-y)}{\sinh 1} \cos x + \frac{\sinh 2y}{2 \sinh 2} \cos 2x \right]. \end{aligned}$$

Μελέτη με τα προγράμματα COMSOL 3.2 και MATLAB.

Με τη βοήθεια των προγραμμάτων COMSOL 3.2 και MATLAB έγινε η γραφική παράσταση του Σχήματος 2.3 του Προβλήματος Robin σε Ορθογώνιο (3.15) - (3.17) για $T_0 = \pi$.

Παράδειγμα 2.3.3. Να λυθεί το ακόλουθο πρόβλημα συνοριακών συνθηκών μεικτού τύπου

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) &= 0, & 0 < x < 1, & 0 < y < 1, \\ u_x(0, y) = 0, & u_x(1, y) = 0, & 0 < y < 1, & (\alpha) \\ u(x, 0) = x^2, & u_y(x, 1) = 0, & 0 < x < 1. & \end{aligned}$$

Λύση Εφαρμόζουμε το χωρισμό μεταβλητών $u(x, y) = X(x)Y(y)$, οπότε προκύπτουν τα προβλήματα

$$\begin{aligned} X''(x) + \lambda X(x) &= 0, & 0 < x < 1, & X'(0) = 0, & X'(1) = 0, & (\beta) \\ Y''(y) - \lambda Y(y) &= 0, & 0 < y < 1, & Y'(1) = 0, & (\gamma) \end{aligned}$$

Η γενική λύση του προβλήματος (β) είναι

$$X(x) = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx, \quad 0 < x < 1, \quad \text{όπου } \lambda = k^2.$$

Κάνοντας χρήση των συνοριακών συνθηκών βρίσκουμε ότι τα ιδιοζεύγη του προβλήματος (β) είναι

$$\lambda_n = n^2 \pi^2, \quad X_n(x) = \cos(n\pi x), \quad 0 < x < 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\delta)$$

Θέτοντας στην εξίσωση (γ) $\lambda = \lambda_n$ υπολογίζεται ότι η λύση του προβλήματος (γ) έχει τη μορφή

$$Y_n(y) = \begin{cases} a_0 + b_0 y, & n = 0, & 0 < y < 1, \\ a_n \cosh n\pi y + b_n \sinh n\pi y, & n = 1, 2, 3, \dots, & 0 < y < 1. \end{cases} \quad (\epsilon)$$

Συνδυάζοντας τη γενικευμένη αρχή της υπέρθεσης με τις σχέσεις (δ) και (ϵ) προκύπτει ότι η λύση του προβλήματος (α) θα είναι της μορφής

$$u(x, y) = a_0 + b_0 y + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi x) [a_n \cosh(n\pi y) + b_n \sinh(n\pi y)],$$

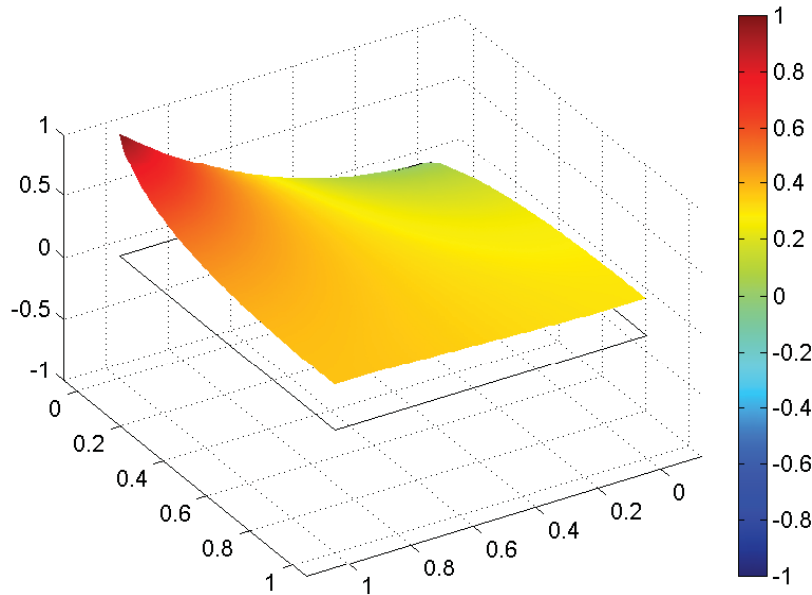
όπου $0 < x < 1$, $0 < y < 1$ και οι σταθερές a_n , b_n προσδιορίζονται, έτσι ώστε να ικανοποιείται η μη ομογενής συνοριακή συνθήκη του αρχικού προβλήματος. Θα πρέπει επομένως να ισχύει

$$u(x, 0) = x^2 = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x), \quad 0 < x < 1.$$

Η τελευταία σχέση συνεπάγεται ότι

$$a_0 = \frac{1}{3}, \quad a_n = 2 \int_0^1 x^2 \cos(n\pi x) dx = \frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Επίσης έχουμε ότι



Σχήμα 2.4: Το Πρόβλημα Robin σε Τετράγωνο του Παραδείγματος 2.3.3.

$$u_y(x, 1) = 0 = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi x) \left[\frac{4(-1)^n}{n\pi} \sinh(n\pi y) + n\pi b_n \cosh(n\pi y) \right], \quad 0 < x < 1,$$

απ' όπου παίρνουμε ότι

$$b_0 = 0 \quad \text{και} \quad b_n = -\frac{4(-1)^n \sinh(n\pi)}{n^2\pi^2 \cosh(n\pi)}.$$

3

Εξισώσεις Παραβολικού Τύπου

Περιεχόμενα

- 3.1 Εξίσωση Θερμότητας: 3.1.1 Εισαγωγή, 3.1.2 Εξίσωση Θερμότητας: Μαθηματική Προτυποποίηση, Α. Ο Νόμος του Fourier, Β. Διαμόρφωση της Εξίσωσης Θερμότητας, Γ. Αρχικές και Συνοριακές Συνθήκες - Καλή Τοποθέτηση, 3.1.3 Προβλήματα.
- 3.2 Ομογενής Εξίσωση Θερμότητας: 3.2.1 Μηδενικές Συνοριακές Τιμές: Α. Εύρεση της Τυπικής Λύσης - Χωρισμός Μεταβλητών, Β. Επαλήθευση της Λύσης - Ομαλοποίηση, Γ. Μονοσήμαντο της Λύσης, Δ. Ασυμπτωτική Συμπεριφορά, Ε. Χρόνος Χαλάρωσης, 3.2.2 Μεικτές Συνοριακές Συνθήκες - Υπερβατικές Ιδιοτιμές, 3.2.3 Μη-Ομογενείς Συνοριακές Συνθήκες, 3.2.4 Προβλήματα.
- 3.3 Χρονοανεξάρτητη Μη-Ομογενής Εξίσωση Θερμότητας και Μη-Ομογενείς Συνοριακές Συνθήκες, 3.3.1 Προβλήματα.
- 3.4 Χρονοεξαρτώμενη Μη-Ομογενής Εξίσωση Θερμότητας και Μη-Ομογενείς Συνοριακές Συνθήκες: 3.4.1 Ομογενείς Συνοριακές Συνθήκες, 3.4.1 Μη Ομογενείς Συνοριακές Συνθήκες, 3.4.3 Προβλήματα.
- 3.5 Μια Μη Ομογενής Παραβολική Εξίσωση με Μη Ομογενείς Συνοριακές Συνθήκες.
- 3.6 Ποιοτική Θεωρία Παραβολικών Εξισώσεων: Αρχή Μεγίστου, Μονοσήμαντο, Ευστάθεια, 3.6.1 Προβλήματα.
- 3.7 Βιβλιογραφικές Αναφορές.
- 3.8 Γενικά Προβλήματα.

«Everywhere in the universe is the evidence of God's majestic design and of His constant and continuous concern to keep the universe running according to plan.» **Sir Isaac Newton**

3.1 Εξίσωση Θερμότητας

3.1.1 Εισαγωγή

Μετά τη διαμόρφωση των βασικών αρχών και κανόνων του Διαφορικού και Ολοκληρωτικού Λογισμού από τους **Sir Isaac Newton**¹ στην Αγγλία και **Gottfried Wilhelm von Leibniz** στη Γερμανία, πολλοί διακεκριμένοι μαθηματικοί ασχολήθηκαν με τη μαθηματική μελέτη φαινομένων, όπως η *ροή θερμότητας* σε μια θερμικά αγωγίμη περιοχή, η *ροή ηλεκτρισμού* σε γραμμές μεταφοράς, ο *ηλεκτρομαγνητισμός*, καθώς και γενικότερα κάθε φαινόμενο *διάχυσης*, περιγράφονται από την *εξίσωση θερμότητας*, η οποία στην απλούστερη δυνατή γραμμική μορφή στο χώρο των N διαστάσεων είναι



Εικόνα 3.1: Newton, Isaac (1642-1726)

$$u_t(x, t) = k^2 \Delta u(x, t) + g(x, t), \quad x \in D \subseteq \mathbb{R}^N, \quad t > 0, \quad (1.1)$$

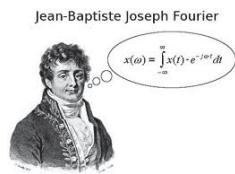
όπου k^2 είναι μια φυσική σταθερά, ο *συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας*, που εξαρτάται από το συγκεκριμένο υπό μελέτη φαινόμενο και ο μη-ομογενής όρος $g(x, t)$ αντιστοιχεί σε *εξωτερικές πηγές θερμότητας*. Η εξίσωση (1.1) αποτελεί επακόλουθο της παραδοχής του *αξιώματος διατήρησης της θερμικής ενέργειας*.

Μια άλλη εξίσωση παραβολικού τύπου, η οποία περιγράφει *φαινόμενα διάχυσης*-

¹Newton, Sir Isaac PRS (25 Δεκέμβρη 1642 - 20 Μαρτίου 1726/7). Άγγλος Φυσικός και Μαθηματικός (αυτοχαρακτηριζόταν ως “*natural philosopher*”), ο οποίος αναγνωρίζεται ως ένας από τους πλέον σημαντικούς επιστήμονες όλων των εποχών. Το βιβλίο του “*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*” (1687), έθεσε τα θεμέλια για την Κλασική Μηχανική. Ο Newton έκανε σημαντική πρωτογενή συνεισφορά στην Οπτική, και μαζί με το Leibniz μοιράζονται τη θεμελίωση του Μαθηματικού Λογισμού. Στα “*Principia*” ο Newton διατύπωσε τους νόμους της κίνησης και της παγκόσμιας έλξης, αρχές και νόμοι που κυριάρχησαν τους επόμενους τρεις αιώνες. Αποδεικνύοντας τους νόμους της πλανητικής κίνησης του Kepler από τη μαθηματική περιγραφή του για τη βαρύτητα, και στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τις ίδιες αρχές για τον υπολογισμό των τροχιών των κομητών, των παλλερριών, της μετάπτωσης των ισημεριών, και άλλα φαινόμενα, ο Newton αφαίρεσε τις τελευταίες αμφιβολίες σχετικά με την εγκυρότητα του ηλιοκεντρικού μοντέλου του Ηλιακού Συστήματος. Η πρόβλεψή του ότι η Γη θα πρέπει να σχεδιαστεί ως ένα πεπλατυσμένο σφαιροειδές αργότερα δικαιώθηκε, επιβεβαιώνοντας την ανωτερότητα της Νευτώνειας Μηχανικής. Ο Newton κατασκεύασε το πρώτο πρακτικό τηλεσκόπιο απεικόνισης και ανέπτυξε μια θεωρία των χρωμάτων. Επίσης διατύπωσε ένα εμπειρικό νόμο της ψύξης, μελέτησε την ταχύτητα του ήχου, και εισήγαγε την έννοια του Νευτώνειου ρευστού. Εκτός από το έργο του σχετικά με το Μαθηματικό Λογισμό, ο Newton συνέβαλε στη μελέτη των δυναμοσειρών, γενίκευσε το Διωνυμικό Θεώρημα και ταξινόμησε τις περισσότερες από τις επίπεδες κυβικές καμπύλες. Ο Newton ήταν μέλλος του Trinity College και ο δεύτερος «*Lucasian Professor*» των Μαθηματικών στο University of Cambridge. Ο Newton αφιέρωσε αρκετό χρόνο στη μελέτη της βιβλικής χρονολογίας και της αληθείας, όμως μεγάλο μέρος αυτής της δουλειάς του παρέμεινε ανέκδοτο για πολλά χρόνια. Ο Newton έγινε πρόεδρος της Royal Society και υπηρέτησε τη Βρετανική Κυβέρνηση ως Αρχιφύλακας (Warden) και Αρχοντας (Master) του Βασιλικού Νομισματοκοπείου.

μεταφοράς (*diffusion-convection*), είναι η

$$u_t(x, t) = k^2 \Delta u(x, t) - v(x) \nabla u(x, t), \quad x \in D \subset \mathbb{R}^N, \quad t > 0,$$



όπου ο $k^2 \Delta u(x, t)$ αποτελεί τον όρο **θερμικής αγωγιμότητας** και ο $v(x) \nabla u(x, t)$ τον όρο **μεταφοράς**. Ένα κλασικό παράδειγμα διάχυσης-μεταφοράς αποτελεί ο **αναθρώσκων καπνός**.

Εικόνα 3.2: Fourier, Jean - Baptiste (1768-1830)

3.1.2 Εξίσωση Θερμότητας: Μαθηματική Προτυποποίηση

A. Ο Νόμος του Fourier¹. Θεωρούμε μια φραγμένη περιοχή του τρισδιάστατου χώρου D με σύνορο ∂D . Έστω $u(x, y, z, t)$ η θερμοκρασία στο σημείο (x, y, z) τη χρονική στιγμή t . Αν η θερμοκρασία μεταβάλλεται συναρτήσει του χώρου, τότε η θερμότητα ρέει από σημεία υψηλής θερμοκρασίας προς σημεία χαμηλής θερμοκρασίας.

Μια διανυσματική ποσότητα βασικής σημασίας είναι η **πυκνότητα θερμικού ρεύματος (heat current density)** $\mathbf{q}(x, y, z, t)$. Αυτή η διανυσματική ποσότητα εκφράζει το ρυθμό μεταβολής της ροής θερμότητας στο σημείο (x, y, z) τη χρονική στιγμή t . Αν $\mathbf{n}(x, y, z)$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα, τότε η βαθμωτή

¹ Fourier, Jean-Baptiste Joseph (21 Μάρτιος 1768-16 Μάιος 1830) ήταν ένας Γάλλος μαθηματικός και φυσικός γεννημένος στην Auxerre και πολύ γνωστός για την διαμόρφωση και μελέτη των σειρών Fourier και τις εφαρμογές τους σε προβλήματα θερμότητας και ταλαντώσεων. Ο Μετασχηματισμός Fourier και ο Νόμος του Fourier επίσης ονομάστηκαν προς τιμήν του. Ο Fourier επίσης γενικά πιστώνεται με την ανακάλυψη του φαινομένου του θερμοκηπίου. Κατά την περίοδο του Τρόμου φυλακίστηκε για λίγο, αλλά το 1795 διορίστηκε καθηγητής στην École Normale Supérieure, και στη συνέχεια διαδέχτηκε τον Joseph Louis Lagrange στην École Polytechnique. Ο Fourier συνόδευσε το Ναπολέοντα Βοναπάρτη στην αιγυπτιακή εκστρατεία του το 1798, ως επιστημονικός σύμβουλος, και διορίστηκε Γραμματέας του Institut d'Égypte, στο οποίο καταχώρησε αρκετές από τις μαθηματικές εργασίες του. Το 1801, ο Ναπολέων όρισε το Fourier Νομάρχη (Κυβερνήτης) στην περιφέρεια της Isère στην Grenoble, όπου επέβλεψε την κατασκευή οδικών και άλλων έργων. Ωστόσο, ο Fourier είχε προηγουμένως επιστρέψει πίσω από την Αίγυπτο για να αναλάβει και πάλι την έδρα του στην École Polytechnique. Στην Γκρενόμπλ ήταν που άρχισε να πειραματίζεται για τη διάδοση της θερμότητας. Ο Fourier παρουσίασε την εργασία του για τη διάδοση της θερμότητας σε στερεά σώματα στο Ινστιτούτο του Παρισιού στις 21 Δεκεμβρίου, 1807. Ο Fourier μετακόμισε στην Αγγλία το 1816 και επέστρεψε στη Γαλλία το 1822 για να διαδεχθεί τον Jean Delambre ως μόνιμος Γραμματέας της Académie Française des Sciences. Το 1822 δημοσίευσε την περίφημη εργασία του «*Théorie Analytique de la Chaleur*», όπου ισχυρίζεται λανθασμένα ότι κάθε συνεχής ή μη συνάρτηση μπορεί να αναπτυχθεί σε τριγωνομετρική σειρά, κάτι που διορθώθηκε από τον Peter Dirichlet (1829). Το 1830, εξελέγη (ξένο) μέλος της Royal Swedish Academy of Sciences. Το όνομά του είναι ένα από τα 72 ονόματα που βρίσκονται χαραγμένα στο Πύργο του Αιφελ. Ένα μπρούτζινο άγαλμα του είχε στηθεί στη γενέτειρά του Auxerre το 1849, αλλά το έλιωσαν για τις πολεμικές ανάγκες του Β' Παγκοσμίου Πολέμου!

έχει ήδη αναφερθεί στην Ενότητα 1.5.2 και θα εξεταστεί λεπτομερέστερα στο επόμενο Κεφάλαιο 4.

Για περαιτέρω επιβεβαίωση της προηγούμενης παρατήρησης παραπέμπουμε στο Παράδειγμα 6.4.3, της Ενότητας 6.4 του Κεφαλαίου 6 αλλά και σε όλα τα παραδείγματα, στα οποία βρίσκονται ακριβείς λύσεις σε παραβολικά προβλήματα.

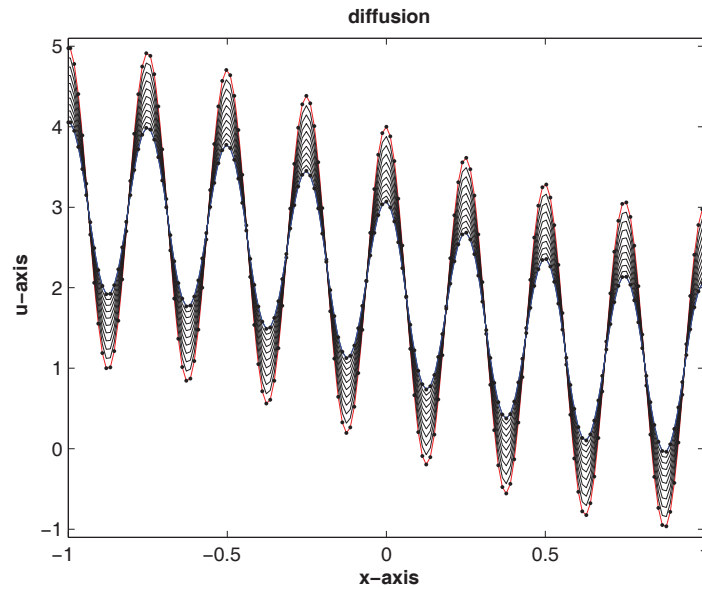
Παράδειγμα 3.2.2. (Πρόβλημα Dirichlet) Να μελετηθεί το πρόβλημα αρχικών - συνοριακών συνθηκών τύπου Dirichlet

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, t) + u_t(x, t) &= 0, & -1 < x < 1, & 0 < t < 1, \\ u(-1, t) &= 0, & u(1, t) &= 0, & t > 0, \\ u(x, 0) &= \sin\left[\frac{\pi(x+1)}{2}\right] + 2 + 2\sin(8\pi(x+1)), & -1 < x < 1, \end{aligned}$$

με τη βοήθεια του προγράμματος MATLAB.

Απάντηση. Μελετούμε το πρόβλημα θερμότητας στη μια διάσταση για συνθήκες Dirichlet με τη βοήθεια του προγράμματος MATLAB. Παραθέτουμε τον κώδικα και τις γραφικές παραστάσεις στη μια και τις τρεις διαστάσεις, αντίστοιχα (βλέπε Σχήματα 3.3 και 3.4).

```
D = 1;
M = 20; L = 1; dx = 2*L/M;
T = 1; N = 10; dt = T/N;
lambda = D*dt/dx^2;
xg = -L:dx:L;
tg = 0:dt:T;
% (Dirichlet)
gleft = 0; gright = 0;
%
IVs = sin(pi*(xg+L)/(2*L))+2+2*sin(16*pi*(xg+L)/(2*L));
u = IVs';
usave = [u'];
tgrid = [0];
    usub = u(2:M);
    usub(1) = usub(1) + lambda*gleft;
    usub(M-1) = usub(M-1) + lambda*gright;
figure(1); clf
plot(xg,u,'r'); hold on; plot(xg,u,'k. ');
axis([-L L -.1 5.1]);
```



Σχήμα 3.3: Το Πρόβλημα Θερμότητας με Συνθήκες Dirichlet - Μια Διάσταση.

```
%
disp(' ')
disp(' simple diffusion scheme')
disp(' ')
h = heat1dmat(lambda,M);
for k=1:N
    time = k*dt;
% iteration
    usub = h\usub;
    u = [gleft; usub; gright];
    usub(1) = usub(1) + lambda*gleft;
    usub(M-1) = usub(M-1) + lambda*gright;
    if (mod(k,N/10)==0);
        usave = [usave ; u'];
        tgrid = [tgrid k*dt];
        plot(xg,u,'k');
    end
end
end
lambda1 = (pi/(2*L))^2; lambda2 = (16*pi/(2*L))^2;
```

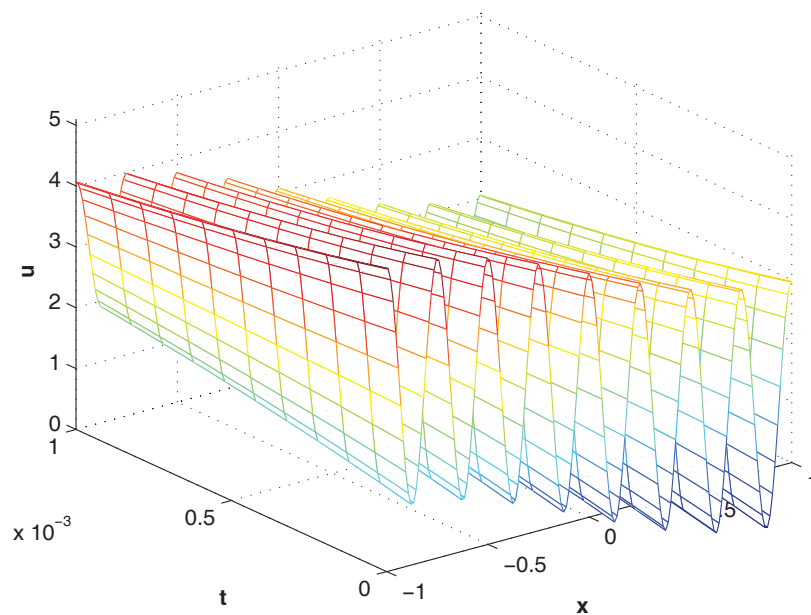
```

ue = exp(-lambda1*time)*sin(pi*(xg+L)/(2*L)) + 2 ...
    + exp(-lambda2*time)*2*sin(16*pi*(xg+L)/(2*L));
err = max(abs(u-ue'))
plot(xg,u,'b'); hold on; plot(xg,u,'k.');
```



```

xlabel('\bf x-axis'); ylabel('\bf u-axis')
title('\bf diffusion')
figure(2)
mesh(xg,tgrid,usave)
axis([-L L 0 T 0 5.1])
xlabel('\bf x');
ylabel('\bf t');
```



Σχήμα 3.4: Το Πρόβλημα Θερμότητας με Συνθήκες *Dirichlet* - Τρεις Διαστάσεις.

```

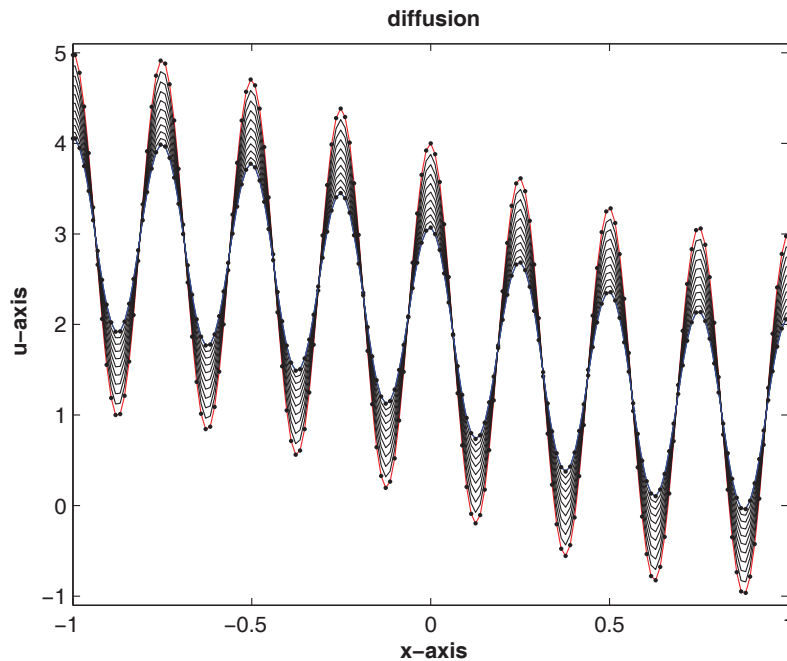
zlabel('\bf u');
mean_u = mean(u)
max_minus_min = max(u)-min(u)
```

Παράδειγμα 3.2.3. (Πρόβλημα Neumann) Να μελετηθεί το πρόβλημα αρχικών - συνοριακών συνθηκών τύπου Neumann

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, t) + u_t(x, t) &= 0, \quad -1 < x < 1, \quad 0 < t < 1, \\ u_x(-1, t) &= 0, \quad u_x(1, t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= \cos\left[\frac{\pi(x+1)}{2}\right] + 2 + 2\cos(8\pi(x+1)), \quad -1 < x < 1. \end{aligned}$$

με τη βοήθεια του προγράμματος MATLAB.

Απάντηση. Μελετούμε το πρόβλημα θερμότητας στη μια διάσταση για συνθήκες Neumann με τη βοήθεια του προγράμματος MATLAB. Παραθέτουμε τον κώδικα και τις γραφικές παραστάσεις στη μια και τις τρεις διαστάσεις (βλέπε Σχήματα 3.5 και 3.6).



Σχήμα 3.5: Το Πρόβλημα Θερμότητας με Συνθήκες Neumann - Μια Διάσταση.

```
D = 1;
M = 160; L = 1; dx = 2*L/(M-1);
T = .001; N = 1000; dt = T/N;
```

3.6 Ποιοτική Θεωρία Παραβολικών Εξισώσεων: Αρχή Μεγίστου, Μονοσήμαντο, Ευστάθεια

Στη συνέχεια θα διατυπώσουμε την **αρχή μεγίστου** καθώς και την **αρχή ελαχίστου** για την ομογενή παραβολική εξίσωση σε τυχαία χωρική διάσταση N , η οποία αποτελεί το ανάλογο αυτής των ελλειπτικών προβλημάτων (βλέπε Ενότητα 2.5.2). Η αρχή μεγίστου αποτελεί το βασικό εργαλείο για τη συζήτηση προβλημάτων σύγκρισης, μονοσήμαντου καθώς και συνεχούς εξάρτησης των λύσεων από αρχικά δεδομένα (ευστάθειας), ερωτήματα βασικά για την καλή τοποθέτηση ενός προβλήματος. Η αρχή μεγίστου επεκτείνεται σε πιο σύνθετες μορφές παραβολικών εξισώσεων, τόσο γραμμικών όσον και μη γραμμικών.

Σε όλη την παρούσα ενότητα, εκτός αν αναφέρεται διαφορετικά, το D θα θεωρείται ότι, είναι ένα **φραγμένο, ανοικτό, συνεκτικό** υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$ με **κλειστό και τμηματικά λείο σύνορο** ∂D . Θέτουμε επίσης $\Omega = D \times [0, T]$. Το σύνορο $\partial\Omega$ του πεδίου Ω θα είναι $\partial\Omega = \partial D \times (0, T) \cup D \times \{0\} \cup D \times \{T\}$. Για την απόδειξη του βασικού αποτελέσματος χρειαζόμαστε το ακόλουθο αποτέλεσμα

Λήμμα 3.6.1. *Αν η συνάρτηση $u(x, t)$ είναι συνεχής στο πεδίο $\overline{\Omega}$ και ικανοποιεί τη διαφορική ανίσωση*

$$u_t(x, t) - \Delta u(x, t) < 0, \quad (x, t) \in \Omega, \quad (6.27)$$

τότε η συνάρτηση $u(x, t)$ λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της στο μέρος του συνόρου $\partial D \times (0, T) \cup D \times \{0\}$.

Απόδειξη Αν η συνάρτηση $u(x, t)$ λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της σ' ένα εσωτερικό σημείο (x, t) του πεδίου Ω , αυτό συνεπάγεται ότι θα ισχύει $\Delta u(x, t) \leq 0$ και $u_t(x, t) = 0$, πράγμα που αντίκειται στην ανίσωση (6.27). Ακόμα αν η συνάρτηση $u(x, t)$ λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της σ' ένα σημείο (x, t) του πεδίου $D \times \{T\}$, αυτό συνεπάγεται ότι θα ισχύει $\Delta u(x, T) \leq 0$ και $u_t(x, T) \geq 0$, πράγμα που επίσης αντίκειται στην ανίσωση (6.27) και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. $\diamond$

Θεώρημα 3.6.2. (Αρχή Μεγίστου) *Έστω ότι η συνάρτηση $u(x, t)$ είναι συνεχής στο πεδίο $\overline{\Omega}$ και ικανοποιεί τη διαφορική ανίσωση*

$$u_t(x, t) - \Delta u(x, t) \leq 0, \quad (x, t) \in \Omega. \quad (6.28)$$

Υποθέτουμε επίσης ότι ισχύει η εκτίμηση $u(x, t) \leq M$, $(x, t) \in \partial D \times (0, T) \cup D \times \{0\}$. Τότε έχουμε ότι $u(x, t) \leq M$, για κάθε $(x, t) \in \overline{\Omega}$.

Απόδειξη Επειδή το πεδίο D είναι φραγμένο, θα περικλείεται σε μια N -διάστατη σφαίρα με κέντρο την αρχή και ακτίνα r , για κάποιο r αρκετά μεγάλο. Έστω η

Dirichlet

$$u_t(x, t) - \Delta u(x, t) = h(x, t), \quad (x, t) \in \Omega, \quad (6.30)$$

$$u(x, 0) = a(x), \quad x \in D, \quad u(x, t) = b(x, t), \quad x \in \partial D, \quad t \in (0, T). \quad (6.31)$$

Θεωρούμε το παραπάνω πρόβλημα (6.30)-(6.31) για δύο διαφορετικά αλλά συγκρίσιμα σύνολα δεδομένων $\{h_1, a_1, b_1\}, \{h_2, a_2, b_2\}$ και υποθέτουμε ότι το δεύτερο σύνολο **κυριαρχεί** του πρώτου, δηλαδή ισχύει $h_1 \leq h_2, a_1 \leq a_2, b_1 \leq b_2$. Συμβολικά δε γράφουμε $\{h_1, a_1, b_1\} \preceq \{h_2, a_2, b_2\}$. Τότε έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 3.6.5. (Θεώρημα Σύγκρισης) Έστω ότι τα δεδομένα $\{h_2, a_2, b_2\}$ κυριαρχούν των $\{h_1, a_1, b_1\}$. Τότε έχουμε ότι για τις αντίστοιχες λύσεις του προβλήματος (6.30)-(6.31) ισχύει η ανισότητα $u_1(x, t) \leq u_2(x, t)$, για κάθε $(x, t) \in \bar{\Omega}$.

Απόδειξη Η διαφορά των συναρτήσεων $v(x, t) = u_2(x, t) - u_1(x, t)$ ικανοποιεί τη διαφορική ανίσωση $v_t(x, t) - \Delta v(x, t) \geq 0$, για κάθε $(x, t) \in \Omega$ και τη συνθήκη στο σύνορο $v(x, t) \geq 0$, $(x, t) \in \partial D \times (0, T) \cup D \times \{0\}$. Επομένως σύμφωνα με το Θεώρημα 3.6.2 έχουμε ότι $v(x, t) \geq 0$, για κάθε $(x, t) \in \bar{\Omega}$ και το θεώρημα έχει αποδειχθεί. $\diamond$

Θεώρημα 3.6.6. (Θεώρημα Μονοσήμαντου) Το πρόβλημα (6.30)-(6.31) δέχεται το πολύ μια λύση.

Απόδειξη Έστω $u_1(x, t), u_2(x, t)$ δύο λύσεις του προβλήματος (6.30)-(6.31) για τα ίδια δεδομένα. Επομένως τα δεδομένα $\{h_2, a_2, b_2\}$ κυριαρχούν των $\{h_1, a_1, b_1\}$ και αντίστροφα. Άρα σύμφωνα με το τελευταίο Θεώρημα 3.6.5 θα έχουμε $u_1(x, t) \leq u_2(x, t)$, $u_1(x, t) \geq u_2(x, t)$, για κάθε $(x, t) \in \bar{\Omega}$ και το θεώρημα έχει αποδειχθεί. $\diamond$

Θεώρημα 3.6.7. (Θεώρημα Ευστάθειας - Συνεχής Εξάρτηση από τα Δεδομένα) Έστω $u_1(x, t), u_2(x, t)$ λύσεις του προβλήματος (6.30)-(6.31), που αντιστοιχούν στα δεδομένα $\{h_1, a_1, b_1\}, \{h_2, a_2, b_2\}$. Έστω επίσης ότι ισχύουν οι σχέσεις

$$|h_1(x, t) - h_2(x, t)| \leq \alpha, \quad \text{για κάθε } (x, t) \in \bar{\Omega},$$

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq \beta, \quad \text{για κάθε } (x, t) \in \partial D \times (0, T) \cup D \times \{0\}.$$

Τότε συνεπάγεται ότι

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq \alpha T + \beta, \quad \text{για κάθε } (x, t) \in \bar{\Omega}.$$

Απόδειξη Η διαφορά των συναρτήσεων $u(x, t) = u_2(x, t) - u_1(x, t)$ ικανοποιεί την εξίσωση θερμότητας με δεδομένα, τα οποία κινούνται μεταξύ $\{-\alpha, -\beta, -\beta\}$ και $\{\alpha, \beta, \beta\}$. Γράφουμε $u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$, όπου η λύση $v(x, t)$ αντιστοιχεί στην ομογενή εξίσωση και η λύση $w(x, t)$ αντιστοιχεί σε ομογενή

αντίστοιχη αρχή μπορεί να διατυπωθεί για τη διαφορική εξίσωση

$$u_t(x, t) - \Delta u(x, t) + c(x)u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Omega, \quad c(x) \geq 0?$$

[4] Έστω D ένας δίσκος στο $\mathbb{R}^2$ και $\Omega = D \times [0, T]$. Με τη χρήση χωρισμού μεταβλητών να λυθεί το ομογενές παραβολικό πρόβλημα αρχικών συνοριακών συνθηκών τύπου Dirichlet

$$\begin{aligned} u_t(x, t) - \Delta u(x, t) + c(x)u(x, t) &= 0, \quad (x, t) \in \Omega, \\ u(x, 0) &= a(x), \quad x \in D, \quad u(x, t) = 0, \quad x \in \partial D, \quad t \in (0, T). \end{aligned}$$

όταν η $c(x)$ είναι μια σταθερά. Κάτω από ποιες προϋποθέσεις η λύση αυτού του προβλήματος τείνει στην τετριμμένη στάσιμη λύση $u(x, t) \equiv 0$, καθώς το $t \rightarrow \infty$?

[5] Έστω D ένα φραγμένο υποσύνολο στο $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ και $\Omega = D \times (0, +\infty)$. Να αποδειχθεί ότι ισχύει η αρχή του μεγίστου για την παραβολική εξίσωση

$$\rho(x)u_t(x, t) - \nabla \cdot (p(x)\nabla u(x, t)) = 0, \quad (x, t) \in \Omega,$$

όπου $\rho(x) \geq 0$, $p(x) \geq 0$ είναι φραγμένες συναρτήσεις στο D .

Υπόδειξη: Θέσατε $w(x, t) = u(x, t) + \varepsilon e^{\alpha x}$ και επιλέγετε το α έτσι ώστε $\rho(x)w_t(x, t) - \nabla \cdot (p(x)\nabla w(x, t)) < 0$. Συμπεράνατε ότι το $w(x, t)$ θα πρέπει να δέχεται το μέγιστο στο $t = 0$ ή στο σύνορο του πεδίου D , για $t > 0$.

[6] Να εξετασθεί αν ισχύει η αρχή του μεγίστου για την παραβολική εξίσωση

$$v_t(y, t) = bv_y(y, t) + \frac{c}{2}v_{yy}(y, t), \quad -\infty < y < a, \quad t > 0,$$

όπου b, c είναι σταθερές και $a > 0$.

[7] Έστω D ένα φραγμένο υποσύνολο στο $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ και $\Omega = D \times (0, +\infty)$. Χρησιμοποιήστε την αρχή του μεγίστου από το Πρόβλημα 5 για να αποδείξετε το μονοσήμαντο της λύσης του ακόλουθου μη ομογενούς παραβολικού προβλήματος αρχικών συνοριακών συνθηκών τύπου Dirichlet

$$\begin{aligned} \rho(x)u_t(x, t) - \nabla \cdot (p(x)\nabla u(x, t)) &= \rho(x)f(x), \quad (x, t) \in \Omega, \\ u(x, 0) &= a(x), \quad x \in D, \quad u(x, t) = 0, \quad x \in \partial D, \quad t \in (0, +\infty). \end{aligned}$$

όπου $\rho(x) \geq 0$, $p(x) \geq 0$ είναι φραγμένες συναρτήσεις στο D .

3.7 Βιβλιογραφικές Αναφορές

Για περαιτέρω μελέτη παραπέμπουμε τον ενδιαφερόμενο αναγνώστη μεταξύ άλλων στα βιβλία των L. C. Andrews [4], D. Bleecker and G. Csordas [11], R. Courant

[26], G. Folland [41], A. Friedman [42], P. Garabedian [43], K. E. Gustafson [49], R. Haberman [52], J. Hadamard [53], D. Henry [59], M. K. Keane [71], J. Kevorkian [73], J. Málek, J. Nečas, M. Rokyta and M. Růžička [85], R. McOwen [87], M. A. Pinsky [?], M. Renardy and R. C. Rogers [105], M. H. Protter and H. F. Weinberger [101], S. L. Sobolev [117], I. Stakgold [119], W. A. Strauss [122], R. N. Tikhonov and A. A. Samarskii [126], D. W. Trim [129], Tyn Myint-U and L. Debnath [131], H. F. Weinberger [132], E. C. Zachmanoglou and D. W. Thoe [135], και E. Zauderer [136].

3.8 Γενικά Προβλήματα

[1] Αν τοποθετήσουμε ένα λεπτό σύρμα σ' ένα μέσον, το οποίο ανταλλάσσει θερμότητα με το περιβάλλον, ο γραμμικός νόμος μεταφοράς επιφανειακής θερμότητας δίδει την εξίσωση $u_t(x, t) = k^2 u_{xx}(x, t) - bu(x, t)$, όπου b είναι μια θετική σταθερά. Υποθέτουμε ότι τα άκρα του σύρματος είναι μονωμένα και ότι ισχύει η αρχική συνθήκη $u(x, 0) = T_0$. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών συνθηκών.

Υπόδειξη: Να χρησιμοποιηθεί ο μετασχηματισμός $w(x, t) = e^{bt}u(x, t)$.

[2] Να βρεθεί η κατανομή θερμοκρασίας $u(x, t)$ σε μια ράβδο μήκους a , όταν όλες οι όψεις έχουν μόνωση και η αρχική κατανομή θερμοκρασίας δίδεται από τη συνάρτηση $f(x) = x(a - x)$.

Απάντηση: $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a^2}{n^3\pi^3} [1 - (-1)^n] \exp[-(n\pi/a)^2 t] \cos \frac{n\pi x}{a}$.

[3] Να βρεθεί η κατανομή θερμοκρασίας $u(x, t)$ σε μια ράβδο μήκους π , όταν το άκρο $x = 0$ διατηρείται στη σταθερή θερμοκρασία $u(0, t) = 0$ και το άλλο άκρο $x = \pi$ έχει απώλεια θερμότητας με ρυθμό ανάλογο της θερμοκρασίας $u(\pi, t) = 0$ σ' αυτό το άκρο. Η αρχική κατανομή θερμοκρασίας δίδεται από τη συνάρτηση $u(x, 0) = x$.

[4] Η κατανομή τάσης $v(x, t)$ σε μια γραμμή μεταφοράς ηλεκτρικού ρεύματος μήκους a , δίδεται από την ακόλουθη εξίσωση

$$v_t(x, t) = k^2 v_{xx}(x, t), \quad 0 < x < a, \quad t > 0.$$

Η τάση διατηρείται ίση με το μηδέν στο άκρο $x = a$ ($v(a, t) = 0$), ενώ στο άκρο $x = 0$ η τάση μεταβάλλεται σύμφωνα με το νόμο

$$v(0, t) = bt, \quad t > 0,$$

όπου k, b δοσμένες πραγματικές σταθερές με $k > 0$. Να βρεθεί η κατανομή τάσης $v(x, t)$ αν η αρχική κατανομή τάσης είναι μηδέν ($v(x, 0) = 0$).

Απάντηση:

$$v(x, t) = bt(1 - \frac{x}{a}) - \frac{ba^2}{6k^2} [(\frac{x}{a})^3 - 3(\frac{x}{a})^2 + 2\frac{x}{a}] + \frac{2ba^2}{\pi^3 k^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp[-n^2 \pi^2 k^2 t/a^2]}{n^3} \sin \frac{n\pi x}{a}.$$

4

Εξισώσεις Υπερβολικού Τύπου

Περιεχόμενα

- 4.1 Κυματική Εξίσωση: 4.1.1 Εισαγωγή-Ιστορικά Στοιχεία, 4.1.2 Κυματική Εξίσωση - Μαθηματική Προτυποποίηση: Α. Διαμόρφωση της Κυματικής Εξίσωσης, Β. Αρχικές και Συνοριακές Συνθήκες - Καλή Τοποθέτηση, 4.1.3 Προβλήματα.
- 4.2 Ομογενής Κυματική Εξίσωση: 4.2.1 Εύρεση Λύσης - Διερεύνηση: Α. Εύρεση της Τυπικής Λύσης - Χωρισμός των Μεταβλητών, Β. Ομαλοποίηση της Λύσης - Ισχυρές και Ασθενείς Λύσεις, Γ. Μονοσήμαντο της Λύσης, Δ. Φυσική Σημασία της Λύσης, Ε. Διαφορά των Παραβολικών από τις Υπερβολικές Εξισώσεις, 4.2.2 Προβλήματα.
- 4.3 Μη Ομογενής Κυματική Εξίσωση Ειδικής Μορφής - Μέθοδος Προσδιορισμού των Συντελεστών, 4.3.1 Γενική Θεωρία - Παραδείγματα, 4.3.2 Προβλήματα.
- 4.4 Μη Ομογενής Κυματική Εξίσωση Γενικής Μορφής - Μέθοδος Αναπτύγματος Ιδοσυναρτήσεων, 4.4.1 Γενική Θεωρία - Παραδείγματα, 4.4.2 Προβλήματα.
- 4.5 Εξισώσεις Μαθηματικής Φυσικής, 4.5.1 Εξίσωση Klein - Gordon / Συστήματα με Διασπορά, 4.5.2 Α. Εξίσωση Τηλεγράφου-Τηλεφώνου, Β. Δερματική Επίδραση (Skin Effect), 4.5.3 Εξίσωση της Δοκού: Α. Μαθηματική Προτυποποίηση, Β. Καλή Τοποθέτηση, Γ. Επίλυση και Διερεύνηση, 4.5.4 Ένα Ομογενές Γραμμικό Πρόβλημα.
- 4.6 Βιβλιογραφικές Αναφορές.
- 4.7 Γενικά Προβλήματα.

«There is a pre-established harmony between thought and reality. Nature is the art of God.» **Gottfried Willhelm Leibniz**

4.1 Κυματική Εξίσωση

4.1.1 Εισαγωγή-Ιστορικά Στοιχεία

Από το Newton και τον Leibniz¹ μέχρι σήμερα.

Φαινόμενα όπως **μετάδοση κυμάτων, ροή ηλεκτρικού ρεύματος, ταλάντωση χορδής**, περιγράφονται από προβλήματα, τα οποία περιλαμβάνουν την **κυματική εξίσωση**. Η κυματική εξίσωση ιδιαίτερα στις 3 διαστάσεις θεωρείται από μαθηματικούς (θεωρητικούς και εφαρμοσμένους), φυσικούς, και μηχανικούς ως η πλέον σημαντική μερική διαφορική εξίσωση, αφού περιγράφει μια μεγάλη ποικιλία φαινομένων, από τις δονήσεις των συνεχών μηχανικών συστημάτων, την μετάδοση ηλεκτρομαγνητικών και ηχητικών κυμάτων, μέχρι την κβαντική περιγραφή των στοιχειωδών σωματίων, τη γενική θεωρία σχετικότητας και θεωρίες ενοποιημένου πεδίου, όπως οι υπερχορδές (superstrings).

Η επιστημονική ενασχόληση με τη συμπεριφορά της παλλόμενης τεντωμένης χορδής ανάμεσα σε δύο σταθερά σημεία, κατά τον 18ο αιώνα αποτέλεσε ιστορικά το αίτιο της διαμόρφωσης και της μελέτης της κυματικής εξίσωσης. Επίσης κατά την περίοδο αυτή έντονο ενδιαφέρον αναπτύχθηκε για τη συμπεριφορά του αέρα, που κινείται μέσα στα πνευστά μουσικά όργανα, συνδυαζόμενο με διάφορες μουσικές θεωρίες.

Μετά τη διαμόρφωση των βασικών αρχών και κανόνων του Διαφορικού και Ολοκληρωτικού Λογισμού από τους



Εικόνα 4.1: Leibniz, Gottfried (1646 - 1716)

¹Leibniz, Gottfried Wilhelm von (July 1, 1646-November 14, 1716). Γερμανός πολυμαθής, μαθηματικός και φιλόσοφος, που μέχρι σήμερα κατέχει εξέχουσα θέση στην ιστορία των μαθηματικών και της φιλοσοφίας. Οι περισσότεροι ακαδημαϊκοί πιστεύουν ότι ο Leibniz ανέπτυξε το Λογισμό ανεξάρτητα από τον Isaac Newton και οι συμβολισμοί του Leibniz χρησιμοποιούνται ευρέως από τότε. Έπρεπε να περάσουν 3 και πλέον αιώνες, ώστε κατά τον 20ο αιώνα να βρουν την εφαρμογή τους αποτελέσματα του Leibniz, όπως ο Νόμος της Συνέχειας και ο Υπερβατικός Νόμος της Ομοιογένειας, που βρήκαν εφαρμογή μέσω της Μη Τυπικής Ανάλυσης. Υπήρξε ένας από τους πιο παραγωγικούς εφευρέτες στον τομέα των αριθμομηχανών. Τελειοποίησε το δυαδικό σύστημα αριθμών, που αποτελεί σήμερα το θεμέλιο των ψηφιακών υπολογιστών. Στη φιλοσοφία, ο Leibniz είναι γνωστός για την αισιοδοξία με την οποία θεωρούσε τον κόσμο, πίστευε ότι το σύμπαν είναι το καλύτερο δυνατό, που θα μπορούσε να δημιουργήσει ο Θεός, μια ιδέα που συχνά κατηγορήθηκε από άλλους, όπως τον Voltaire. Ο Leibniz ήταν ένας από τους τρεις μεγαλύτερους υποστηρικτές του ορθολογισμού κατά τον 17ο αιώνα, μαζί με το René Descartes και το Baruch Spinoza. Ο Leibniz έκανε σημαντική συνεισφορά στη Φυσική και την Τεχνολογία, και προέβλεψε και ανέδειξε έννοιες που εμφανίστηκαν πολύ αργότερα στη Φιλοσοφία, Θεωρία Πιθανοτήτων, Βιολογία, Ιατρική, Γεωλογία, Ψυχολογία, Γλωσσολογία ακόμα και στην Επιστήμη των Υπολογιστών(!) Το έργο του Leibniz βρίσκεται διάσπαρτο σε επιστημονικά περιοδικά, δεκάδες χιλιάδες επιστολές και αναρίθμητα ανέκδοτα χειρόγραφα. Έγραψε σε πολλές γλώσσες, αλλά κυρίως στα λατινικά, γαλλικά και γερμανικά. Δυστυχώς μέχρι σήμερα δεν υπάρχει πλήρης συλλογή των γραπτών του.

Sir Isaak Newton (1642-1727) στην Αγγλία και **Gottfried Wilhelm von Leibniz** στη Γερμανία, πολλοί διακεκριμένοι μαθηματικοί ασχολήθηκαν με τη μελέτη της παλλόμενης χορδής. Φαινόμενο άμεσα σχετιζόμενο με τη μαθηματική θεωρία των μουσικών ήχων (έγχορδα - 1 διάσταση, κρουστά - 2 διαστάσεις).



Εικόνα 4.2: Kirchhoff, Gustav Robert (1824 - 1887)

Κατά το 18ο αιώνα, ο Βρετανός **Brook Taylor (1685-1731)**, ο **Jean D' Alembert (1717-1783)**, Γάλλος μαθηματικός, οι **Daniel Bernoulli (1700-1782)** και **Leonard Euler (1707-1783)** από την Ελβετία είναι από τους κυριότερους μελετητές του μαθηματικού προβλήματος της παλλόμενης χορδής. Περί το 1747 εμφανίζεται η εργασία του Jean D' Alembert για τη μονοδιάστατη κυματική εξίσωση με χωροχρονική εξάρτηση, όπου δίδεται και η γνωστή ως λύση D' Alembert (βλέπε Ενότητα 1.5.2). *Η εργασία αυτή κατά πολλούς σηματοδοτεί την εμφάνιση της πρώτης μερικής διαφορικής εξίσωσης.*

Κατά τον 19ο αιώνα η κυματική εξίσωση εφαρμόστηκε στο ταχύτατα αναπτυσσόμενο πεδίο της Ελαστικότητας, κατά συνέπεια και στη μελέτη της διάδοσης του ήχου και του φωτός. Οι κυριότερες συνεισφορές έγιναν από τους **Gustav R. Kirchhoff¹**, ο **John W. S. Rayleigh²**, **Simon Denis Poisson (1781-1840)**, **Bernhard Riemann (1826-1866)**, **Hermann von Helmholtz (1821-1894)**.

Τον εικοστό αιώνα η κυματική εξίσωση και οι συνδεδεμένες με αυτήν εξισώσεις (όπως Dirac, Klein-Gordon, Maxwell, κλπ) αποτελούν τον μαθηματικό πυρήνα

¹Ο Kirchhoff, Gustav Robert (12 Μαρτίου 1824-17 Οκτωβρίου 1887) ήταν ένας γερμανός Φυσικός, που συνέβαλαν στην ουσιαστική κατανόηση των ηλεκτρικών κυκλωμάτων, της φασματοσκοπία, και της εκπομπής της ακτινοβολίας του μέλανος σώματος από θερμαινόμενα αντικείμενα. Ο Kirchhoff επινόησε τον όρο «ακτινοβολία μέλανος σώματος» το 1862, και δύο διαφορετικά σύνολα εννοιών (μία στη θεωρία κυκλωμάτων και μία στη φασματοσκοπία) ονομάζονται «*Νόμοι του Kirchhoff*». Επίσης υπάρχει ο «*Νόμος του Kirchhoff στη Θερμοχημεία*». Το βραβείο Bunsen-Kirchhoff στη φασματοσκοπία φέρει το όνομά του και αυτό του συναδέλφου του Robert Bunsen.

²Ο Rayleigh, John William Strutt, 3rd Baron OM PRS (12 του Νοέμβρη του 1842-30, Ιουνίου, 1919) ήταν ένας Άγγλος φυσικός ο οποίος, μαζί με τον William Ramsay, ανακάλυψε το αργό, ένα επίτευγμα για το οποίο κέρδισε το βραβείο Νόμπελ Φυσικής το 1904. Ανακάλυψαν επίσης το φαινόμενο, που τώρα ονομάζεται «*σκέδαση Rayleigh*», η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εξηγήσει γιατί ο ουρανός είναι μπλε, και προέβλεψε την ύπαρξη των επιφανειακών κυμάτων τώρα γνωστά ως τα «*κύματα Rayleigh*». Το βιβλίο του Rayleigh, «*The Theory of Sound*», χρησιμοποιείται ακόμη και σήμερα από τους μηχανικούς της Ακουστικής. Ήταν ο δεύτερος μετά τον James Clerk Maxwell Cavendish Professor της Φυσικής στο Πανεπιστήμιο του Cambridge, από 1879 έως 1884. Περιέγραψε πρώτος τη δυναμική της ανύψωσης των θαλασσοπουλιών το 1883, (Nature). Το διάστημα 1887-1905 διετέλεσε καθηγητής της Natural Philosophy στο Πανεπιστήμιο του Cambridge. Το 1919, ο Rayleigh υπηρέτησε ως Πρόεδρος της Εταιρείας Ψυχικών Ερευνών. Η μονάδα rayl στην Ακουστική φέρει το όνομά του. Ο Λόρδος Rayleigh εξελέγη μέλος της Royal Society στις 12 Ιουνίου 1873 και υπηρέτησε ως Πρόεδρος της από 1905 έως 1908. Κατά καιρούς ο Λόρδος Rayleigh συμμετείχε στη Βουλή των Λόρδων, όπου παρενέβαινε μόνο όταν ανέκυπταν επιστημονικά θέματα. Πέθανε στις 30 Ιουνίου του 1919, σε Witham, Essex.

κών συνθηκών τύπου Robin

$$\begin{aligned}u_{tt}(x, t) &= 4u_{xx}(x, t) + xt, & 0 < x < 1, & t > 0, \\u(0, t) &= 0, & u_x(1, t) &= 1 + t, & t > 0, \\u(x, 0) &= x, & u_t(x, 0) &= 0, & 0 < x < 1.\end{aligned}$$

[4] Να λυθεί το ακόλουθο ομογενές υπερβολικό πρόβλημα αρχικών - συνοριακών συνθηκών τύπου Dirichlet

$$\begin{aligned}u_{xx}(x, t) &= u_{tt}(x, t) - 1, & 0 < x < 1, & t > 0, \\u(0, t) &= t^2/2, & u(1, t) &= -\cos t, & t > 0, \\u(x, 0) &= -x, & u_t(x, 0) &= 0, & 0 < x < 1.\end{aligned}$$

Απάντηση:

$$u(x, t) = \frac{t^2(1-x)}{2} - x \cos t + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left[\frac{1 - \cos n\pi t}{n^2 \pi^2} - \frac{2(\cos t - \cos n\pi t)}{n^2 \pi^2 - 1} \right] \sin(n\pi x).$$

[5] Να λυθεί το ακόλουθο ομογενές υπερβολικό πρόβλημα αρχικών - συνοριακών συνθηκών τύπου Dirichlet

$$\begin{aligned}u_{tt}(x, t) &= u_{xx}(x, t), & 0 < x < 1, & t > 0, \\u(0, t) &= t^2, & u(1, t) &= \cos t, & t > 0, \\u(x, 0) &= x, & u_t(x, 0) &= 0, & 0 < x < 1.\end{aligned}$$

[6] Να λυθεί το ακόλουθο ομογενές υπερβολικό πρόβλημα αρχικών - συνοριακών συνθηκών τύπου Dirichlet

$$\begin{aligned}u_{xx}(x, t) &= u_{tt}(x, t), & 0 < x < 1, & t > 0, \\u(0, t) &= \sin t, & u(1, t) &= 0, & t > 0, \\u(x, 0) &= 0, & u_t(x, 0) &= 1 - x, & 0 < x < 1.\end{aligned}$$

Απάντηση: $u(x, t) = (1-x) \sin t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2[\sin(n\pi t) - n\pi \sin t]}{n^2 \pi^2 (1 - n^2 \pi^2)} \sin(n\pi x).$

[7] Να λυθεί το ακόλουθο ομογενές υπερβολικό πρόβλημα αρχικών - συνοριακών συνθηκών τύπου Neumann

$$\begin{aligned}u_{tt}(x, t) &= 9u_{xx}(x, t), & 0 < x < 1, & t > 0, \\u_x(0, t) &= \frac{\pi}{2}, & u_x(1, t) &= 0, & t > 0, \\u(x, 0) &= \sin \frac{\pi x}{2}, & u_t(x, 0) &= 1 + x, & 0 < x < 1.\end{aligned}$$

4.5 Εξισώσεις Μαθηματικής Φυσικής

Στα επόμενα τέσσερα παραδείγματα θα εξετασθούν χαρακτηριστικές περιπτώσεις γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων υπερβολικού τύπου, που προκύπτουν κατά τη διαδικασία μαθηματικής προτυποποίησης διαφόρων φυσικών και άλλων φαινομένων.

4.5.1 Εξίσωση Klein¹ - Gordon² - Gordon / Συστήματα με Διασπορά



Εικόνα 4.4: Klein, Oskar (1894 - 1977)

Σε προηγούμενα παραδείγματα είδαμε ότι, η ταχύτητα φάσης των δύο κυμάτων, που συνιστούν τη λύση D' Alembert της απλής κυματικής εξίσωσης, είναι σταθερή για όλες τις αρμονικές (βλέπε Παράδειγμα 4.2.5). Όμως γενικότερα τα φαινόμενα της κίνησης, λόγω της πολυπλοκότητας της φύσης τους, οδηγούν σε περισσότερο σύνθετα μαθηματικά πρότυπα. Σε προβλήματα με αυτά τα χαρακτηριστικά, η διάδοση όλων των αρμονικών δεν γίνεται με την ίδια φασική ταχύτητα (phase speed) αλλά με ταχύτητα, η οποία εξαρτάται από τον αντίστοιχο κυματάρημο. Σε τέτοια συστήματα η σχέση φάσης μεταξύ των αρμονικών τροποποιείται. Τέτοιου είδους συστήματα αναφέρονται ως **συστήματα με διασπορά (dispersive systems)**.

Μια τέτοια περίπτωση αποτελεί το ακόλουθο πρόβλημα. Το πρόβλημα αυτό, το οποίο αποτελεί μια διαταραχή της κυματικής ομογενούς, προκύπτει όταν θεωρήσουμε ότι, κάθε τμήμα μιας δονούμενης χορδής μήκους a υφίσταται πρόσθετη δύναμη ανάλογη της μετατόπισης αυτής. Η θεώρηση αυτή οδηγεί στην ακόλουθη μορφή της **εξίσωσης Klein - Gordon**

$$u_{xx}(x, t) = c^{-2}u_{tt}(x, t) - hu(x, t), \quad 0 < x < p, \quad t > 0, \quad (5.1)$$

όπου θεωρούμε ότι ισχύει ο περιορισμός $h \geq 0$. Για παράδειγμα, η εξίσωση (5.1) αποτελεί μια περιγραφή της συμπεριφοράς κινούμενης χορδής επενδυμένης με

¹Klein, Oskar Benjamin (15η Σεπτεμβρίου 1894- 5 Φεβρουαρίου του 1977). Ήταν ένας Σουηδός θεωρητικός φυσικός. Έγινε μαθητής του Svante Arrhenius στο Ινστιτούτο Νόμπελ σε νεαρή ηλικία και επρόκειτο να πάει στον Jean-Baptiste Perrin στη Γαλλία, όταν ξέσπασε ο 1ος Παγκόσμιος Πόλεμος και επιστρατεύτηκε. Από το 1917, εργάστηκε με τον Niels Bohr στο Πανεπιστήμιο της Κοπεγχάγης και έλαβε το διδακτορικό του δίπλωμα από το University College of Stockholm (νυν Stockholm University) (1921). Ο Klein επέστρεψε στην Κοπεγχάγη το 1925 και το 1930 αποδέχθηκε την προσφορά της έδρας καθηγητή Φυσικής στο University College of Stockholm, μετά τη συνταξιοδότηση του Erik Ivar. Συνταξιοδοτήθηκε ως ομότιμος καθηγητής το 1962. Στον Klein πιστώνεται η ιδέα της θεωρίας των Kaluza-Klein. Επίσης μαζί με τον Gordon πρότειναν το ομώνυμο μοντέλο της εξίσωσης Klein-Gordon. Το Oskar Klein Centre for Cosmoparticle Physics στη Στοκχόλμη, έχει ονομαστεί προς τιμήν του. Τέλος, ο Klein τιμήθηκε με το Μετάλλιο Max Planck (1959).

²Ο Gordon, Walter (August 13, 1893-December 24, 1939) ήταν ένας γερμανός θεωρητικός φυσικός. Η οικογένεια μετακόμισε στην Ελβετία στα πρώτα του χρόνια. Το 1915 ξεκίνησε τις σπουδές του για τα Μαθηματικά και Φυσική στο Πανεπιστήμιο του Βερολίνου. Έλαβε το διδακτορικό του δίπλωμα το 1921 από το Max Planck. Το 1926 μετακόμισε στο Αμβούργο, όπου απέκτησε την habilitation το 1929, όπου έγινε καθηγητής το 1930. Μετακόμισε στη Στοκχόλμη το 1933, λόγω της πολιτικής κατάστασης στη Γερμανία. Κατά την παραμονή του στο πανεπιστήμιο της Στοκχόλμης εργάστηκε σε θέματα Μηχανικής και Μαθηματικής Φυσικής. Ο Oskar Klein και Walter Gordon πρότειναν την ομώνυμη εξίσωση Klein-Gordon για να περιγράψουν τη συμπεριφορά των κβαντικών σωματιδίων στο πλαίσιο της θεωρίας της σχετικότητας.

Παρατήρηση 4.5.1. Για λόγους απλότητας, ας θεωρήσουμε ότι ισχύει $b_n = 0$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Τότε με απλή τριγωνομετρία αποδεικνύεται ότι η λύση (5.9) λαμβάνει τη μορφή

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[\sin(k_n x + t\sqrt{k_n^2 c^2 + h}) + \sin(k_n x - t\sqrt{k_n^2 c^2 + h}) \right], \quad (5.10)$$

όπου $0 < x < p$, $t > 0$. Εδώ πρέπει να παρατηρήσουμε ότι η λύση (5.10) εξαρτάται τόσο από εξωτερικές παραμέτρους, όπως το h (στοιχείο, που εκφράζει την τάση και την πυκνότητα της χορδής), όσο και από τον κυματάριθμο k_n . Ακόμα οι επιτρεπόμενες συχνότητες είναι μεγαλύτερες αυτών, που αντιστοιχούν στο $h = 0$. Πράγμα αναμενόμενο λόγω της αυξημένης ακαμψίας του υλικού.

Η σημασία της διασποράς οφείλεται στο γεγονός ότι, αν η λύση είναι υπέρθεση διαδοχικών κυμάτων στην αυτή κατεύθυνση, τότε η σχέση φάσης μεταξύ των διαφόρων αρμονικών είναι χρονοεξαρτώμενη. Επειδή δε τα περισσότερα σήματα συνίστανται από απειροσειρές διαδοχικών κυμάτων, η διασπορά αποτελεί την αιτία του φαινομένου εξασθένισης, που παρουσιάζεται στα σήματα. Για περισσότερα παραπέμπουμε στο σύγγραμμα του D. G. Duffy [32, page 222]).

4.5.2 Εξίσωση Τηλεγράφου-Τηλεφώνου-Δερματική Επίδραση.

A. Τηλεγραφία - Τηλεφωνία.

Στην προηγούμενη Ενότητα είδαμε ότι, μια μικρή διαταραχή στην κυματική εξίσωση, οδηγεί σε λύση, στην οποία κάθε συνιστώσα διαδίδεται με τη δική της φασική ταχύτητα. Εδώ θα μελετήσουμε ένα κυματικό φαινόμενο, όπου η συγκεκριμένη διαταραχή όχι μόνον προκαλεί διασκορπιστικά κύματα, αλλά και εκθετική απόσβεση του πλάτους καθώς το κύμα μεταδίδεται. Αυτό συμβαίνει όταν, κατά τη διαμόρφωση του μαθηματικού προβλήματος, ληφθεί υπ' όψιν η επίδραση του περιβάλλοντος τη χορδή μέσου.

Στην περίπτωση κατά την οποία θα έχουμε ένα μικρού πλάτους κυματικό φαινόμενο, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι, η αντίθεση του περιβάλλοντος υλικού είναι κατά διεύθυνση αντίθετη της κίνησης της χορδής και ποσοτικά ανάλογη της ταχύτητας αυτού. Έτσι, η εξίσωση της κίνησης θα έχει τη μορφή

$$u_{tt}(x, t) + 2hu_t(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t), \quad 0 < x < p, \quad t > 0, \quad (5.11)$$

όπου έχουν ληφθεί υπ' όψιν η τάση (tension) και η τριβή (friction) του μέσου, αλλά όχι η ακαμψία (stiffness) και η εσωτερική τριβή (internal friction). Το αποτέλεσμα της τριβής είναι να προκληθεί απόσβεση στην ελεύθερη δόνηση.

προκύπτουν οι τύποι

$$k = \frac{\omega}{2c} (\mu \sqrt{K^2 + 4\sigma^2 \tau^2})^{1/2}, \quad (5.25)$$

$$\gamma = \frac{\omega}{2c} (\mu \sqrt{K^2 + 4\sigma^2 \tau^2})^{1/2}, \quad (5.26)$$

όπου $\tau = 2\pi/\omega$. Πάλι μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι τα κύματα είναι διασκορπιστικά. Δοθέντος ενός k , μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση (5.25) ως προς το ω . Έτσι το ω εξαρτάται από τον κυματάριθμο k και εξωτερικές παραμέτρους.

Παρατήρηση 4.5.4. (Δερματική Επίδραση) Το πλέον σημαντικό μέρος αυτού του προβλήματος αποτελεί η παρατήρηση ότι, καθώς το κύμα ταξιδεύει την απόσταση $2\pi/\gamma$, το πλάτος του μικραίνει κατά το λόγο $e^{2\pi}$ προς 1. Επομένως, αυτό το μήκος μπορεί να θεωρηθεί ως ένα κατάλληλο μέτρο εμβέλειας ή διεισδυτικής δύναμης του κύματος.

Για παράδειγμα, στα μέταλλα ισχύει $2\sigma \tau \gg K$, έτσι ώστε να έχουμε $\gamma = k = \sqrt{\mu\sigma\tau}$. Για το χαλκό έχουμε $\sigma = 5.14 \times 10^{17}$, $\mu = 1$. Όπως φαίνεται από τα παραπάνω, τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα δεν μπορεί να διεισδύσουν στα μέταλλα πέραν ενός πολύ μικρού βάθους. Αυτό το φαινόμενο αποτελεί τη **δερματική επίδραση** (skin effect).

4.5.3 Εξίσωση της Δοκού

A. Εξίσωση της Δοκού: Μαθηματική Προτυποποίηση.

Σ' αυτή την παράγραφο θα μελετήσουμε τις εγκάρσιες δονήσεις οριζόντιας δοκού. Υποθέτουμε ότι η δοκός είναι συμμετρική γύρω από το επίπεδο των xy και όλες οι διατομές, οι οποίες είναι επίπεδες στην απουσία βάρους, παραμένουν επίπεδες κατά τη διάρκεια των δονήσεων. Έτσι οι μετατοπίσεις περιγράφονται από τη θέση $y(x, t)$ του άξονα των y . Διατάσεις (stretches) και συμπίεσεις (compressions) στα διάφορα μέρη της δοκού δημιουργούν εσωτερικές δυνάμεις και ροπές.

Έχει αποδειχθεί πειραματικά ότι η ροπή κάμψης (bending moment) $M(x, t)$ στη δεξιά πλευρά της διατομής της δοκού στη θέση x οφειλόμενη στο υπόλοιπο της δοκού στα δεξιά της σχετίζεται με την προσημασμένη καμπυλότητα $k(x, t)$ του άξονα των y μέσω της εξίσωσης

$$M(x, t) = E(x)I(x)k(x, t), \quad (5.27)$$

όπου $E(x)$ είναι το μέτρο ελαστικότητας του Young (εξαρτώμενο από το υλικό της δοκού) και $I(x)$ είναι η ροπή αδράνειας (moment of inertia) της διατομής της

Όταν τα μεγέθη $E(x)$, $I(x)$ είναι ανεξάρτητα του x και το φορτίο $w(x, t)$ είναι χρονοανεξάρτητο ($w(x, t) \equiv w(x)$), τότε παίρνουμε τη πιο γνωστή μορφή της μερικής διαφορικής εξίσωσης, που περιγράφει τις εγκάρσιες δονήσεις της δοκού, η οποία είναι

$$\frac{w(x)}{gEI} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} = \frac{F(x, t)}{EI}. \quad (5.38)$$

B. Εξίσωση της Δοκού: Καλή Τοποθέτηση.

Ως γνωστόν, για να είναι το πρόβλημα της δοκού καλά τοποθετημένο, θα πρέπει να συνοδεύεται από κατάλληλα επιλεγμένες συνοριακές και αρχικές συνθήκες. Υπάρχουν διάφορα είδη συνοριακών συνθηκών. Οι πιο συνήθεις τύποι συνοριακών συνθηκών είναι οι ακόλουθοι.

1. Σύνορο Απλής Στήριξης (simply supported boundary), όταν η μετατόπιση και η καμπυλότητα (ροπή) είναι αμφότερα μηδέν (βλέπε Σχήμα 4.5.3α)

$$y(0, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 y(0, t)}{\partial x^2} = 0, \quad (5.39)$$

2. Πακτωμένο Οριζοντίως Σύνορο (built horizontally boundary), όταν η μετατόπιση και η κλίση είναι αμφότερα μηδέν (βλέπε Σχήμα 4.5.3β)

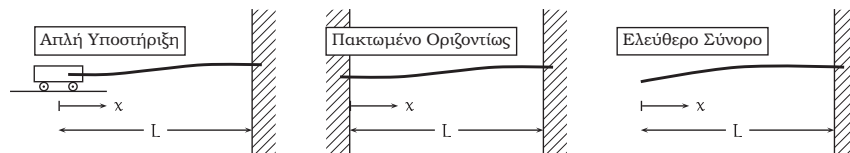
$$y(0, t) = 0, \quad \frac{\partial y(0, t)}{\partial x} = 0, \quad (5.40)$$

3. Ελεύθερο Σύνορο (free boundary), όταν η καμπυλότητα (ροπή) και οι τέμνουσες δυνάμεις (shear forces) είναι αμφότερες μηδέν (βλέπε Σχήμα 4.5.3γ)

$$\frac{\partial^2 y(0, t)}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^3 y(0, t)}{\partial x^3} = 0. \quad (5.41)$$

Τέλος, για την καλή τοποθέτηση του προβλήματος της δοκού, όπως αναφέραμε, χρειάζεται να ικανοποιούνται συνθήκες αρχικών τιμών, οι οποίες είναι της γενικής μορφής

$$y(x, 0) = f(x), \quad y_t(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < a. \quad (5.42)$$



Σχήμα 4.19: α) Σύνορο Απλής Στήριξης, β) Πακτωμένο Οριζοντίως Σύνορο, γ) Ελεύθερο Σύνορο.

Γ. Εξίσωση της Δοκού: Επίλυση και Διερεύνηση.

Σε πολλές εφαρμογές, οι εσωτερικές δυνάμεις της δοκού είναι τόσο μεγάλες ώστε η επίδραση της δύναμης $F(x, t)$ να είναι αμελητέα. Σ' αυτές τις περιπτώσεις, η εξίσωση (5.38) αντικαθίσταται με το ομογενές ανάλογο. Θεωρούμε λοιπόν το ομογενές ανάλογο της εξίσωσης της δοκού, όπου για λόγους απλότητας θέτουμε $\frac{w(x)}{gEI} \equiv 1$.

Επίσης θεωρούμε ότι η εξίσωση της δοκού συνοδεύεται από *συνοριακές συνθήκες τύπου απλής υποστήριξης (simply supported boundary)*, όπως περιγράφονται παραπάνω στη σχέση (5.39). Τέλος, για να είναι το πρόβλημα αυτό καλά τοποθετημένο καλείται να ικανοποιήσει κατάλληλες αρχικές συνθήκες. Έτσι έχουμε καταλήξει στο ακόλουθο *ομογενές τέταρτης τάξης υπερβολικό πρόβλημα αρχικών και συνοριακών συνθηκών τύπου απλής υποστήριξης*

$$U_{tt}(x, t) = -U_{xxxx}(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad (5.43)$$

$$U(0, t) = 0, \quad U_{xx}(0, t) = 0, \quad U(1, t) = 0, \quad U_{xx}(1, t) = 0, \quad t > 0, \quad (5.44)$$

$$U(x, 0) = f(x), \quad U_t(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < 1. \quad (5.45)$$

Για την επίλυση του προβλήματος (5.43) - (5.45) κάνουμε χρήση του χωρισμού μεταβλητών θεωρώντας ότι, η λύση έχει την ακόλουθη περιοδική μορφή

$$U(x, t) = X(x)T(t) = X(x) (A \sin \omega t + B \cos \omega t), \quad (5.46)$$

όπου $0 < x < 1$, $t > 0$, $\omega > 0$. Αντικαθιστώντας την παράσταση (5.46) στην εξίσωση (5.43) προκύπτει η συνήθης διαφορική εξίσωση

$$X^{(4)}(x) - \omega^2 X(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad (5.47)$$

η οποία έχει γενική λύση της μορφής

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\omega}x + C_2 \sin \sqrt{\omega}x + C_3 \cos h\sqrt{\omega}x + C_4 \sin h\sqrt{\omega}x, \quad (5.48)$$

όπου $0 < x < 1$. Για τον προσδιορισμό των αυθαιρέτων σταθερών $C_1, \dots, C_4$ κάνουμε χρήση των συνοριακών συνθηκών (5.44), οπότε προκύπτουν οι σχέσεις

$$C_1 = C_3 = 0 \quad \text{και} \quad C_4 \sin h\sqrt{\omega} = 0, \quad C_2 \sin \sqrt{\omega} = 0. \quad (5.49)$$

Από τις τελευταίες σχέσεις (5.49) προκύπτει $C_4 = 0$ και $\sin \sqrt{\omega}x = 0$. Επομένως οι **φυσικές συχνότητες** του παραπάνω προβλήματος δίδονται από την ακολουθία

$$\omega_n = (n\pi)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

5

2 και 3 Χωρικές Διαστάσεις

Περιεχόμενα

- 5.1 Εισαγωγή.
- 5.2 Δύο Διαστάσεις: 5.2.1 Ορθογώνιο Πεδίο: Α. Η Κυματική Εξίσωση σε μια Ορθογώνια Μembrάνη, Β. Η Εξίσωση Θερμότητας σε μια Ορθογώνια Πλάκα, 5.2.2 Κυκλικά Πεδία - Συναρτήσεις Bessel: Α. Η Κυματική Εξίσωση σε μια Κυκλική Μembrάνη - Ακτινική Συμμετρία, Β. Η Κυματική Εξίσωση σε μια Κυκλική Μembrάνη - Γενική Περίπτωση, 5.2.3 Προβλήματα.
- 5.3 Τρεις Διαστάσεις: 5.3.1 Καρτεσιανές Συντεταγμένες: Εξίσωση Laplace στο Ορθογώνιο Παραλληλεπίπεδο - Συνθήκες Robin, 5.3.2 Κυλινδρικές Συντεταγμένες: Α. Η Εξίσωση Laplace στον Κύλινδρο - Συνθήκες Dirichlet Β. Η Εξίσωση Θερμότητας στον Κύλινδρο - Συνθήκες Robin, 5.3.3 Σφαιρικές Συντεταγμένες: Α. Εισαγωγή, Β. Ηλεκτροστατικό Δυναμικό σε μια Σφαίρα - Γενική Περίπτωση, Γ. Ηλεκτροστατικό Δυναμικό σε μια Σφαίρα - Ακτινική Συμμετρία, Δ. Η Εξίσωση Schrödinger στη Σφαίρα, 5.3.4 Προβλήματα.
- 5.4 Μη Ομογενή Προβλήματα: Α. Μέθοδος Ιδιοσυναρτήσεων, 5.4.1 Εξαναγκασμένη Δόνηση Ορθογώνιας Μembrάνης με Ομογενείς Συνθήκες Dirichlet, 5.4.2 Εξίσωση Poisson: Μη-Ομογενείς Συνθήκες Τύπου Dirichlet, 5.4.3 Εξαναγκασμένη Δόνηση Ορθογώνιας Μembrάνης με Χρονοεξαρτώμενες Συνοριακές Συνθήκες, 5.4.4 Προβλήματα,
- 5.5 Μη Ομογενή Προβλήματα: Β. Μέθοδος Ολοκληρωτικών Μετασχηματισμών, 5.5.1 Πεπερασμένος Μετασχηματισμός Fourier: Α. Εισαγωγή - Ορισμός - Ιδιότητες, Β. Εφαρμογές στις Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις: 1. Κυματική Εξίσωση στη Μια Διάσταση, 2. Εξίσωση Διάχυσης σε Ορθογώνια Πλάκα, 5.5.2 Προβλήματα.
- 5.6 Βιβλιογραφικές Αναφορές.
- 5.7 Γενικά Προβλήματα.

*«The world is given to me only once, not one existing and one perceived.
Subject and object are only one»* **Erwin Schrödinger**

5.1 Εισαγωγή

Φαινόμενα μετάδοσης θερμότητας ή ταλαντώσεων που λαμβάνουν χώρα σε λεπτές πλάκες ή μεμβράνες, σε κυλίνδρους, ορθογώνια παραλληλόγραμμα ή σφαίρες, μπορούν να περιγραφούν από μερικές διαφορικές εξισώσεις, που ορίζονται στις δύο ή τρεις διαστάσεις ανάλογα με τους περιορισμούς.

Όπως θα φανεί στη συνέχεια οι τεχνικές, που χρησιμοποιούνται για την επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων σε περισσότερες διαστάσεις, αποτελούν φυσιολογική γενίκευση ή επέκταση των ήδη γνωστών μεθόδων, που αναπτύχθηκαν για μερικές διαφορικές εξισώσεις σε μια διάσταση.

Εντούτοις πρέπει να τονισθεί ότι, οι διαδικασίες, που ακολουθούν είναι πολύπλοκες και συχνά οδηγούν σε *προβλήματα Sturm-Liouville*, των οποίων οι λύσεις είναι *γενικευμένες συναρτήσεις*.

Ειδικότερα, προβλήματα ορισμένα σε *κυκλικά ή κυλινδρικά πεδία* οδηγούν σε λύσεις, που περιέχουν *συναρτήσεις Bessel*. Ενώ προβλήματα ορισμένα σε *σφαιρικά πεδία* οδηγούν σε λύσεις, που περικλείουν *πολυώνυμα Legendre*. Η γενική μορφή των εξισώσεων, που θα μελετηθούν σ' αυτή την ενότητα, είναι

- $\nabla^2 u(x, t) = \alpha^{-2} u_t(x, t),$ **Εξίσωση Θερμότητας,**
- $\nabla^2 u(x, t) = c^{-2} u_{tt}(x, t),$ **Κυματική Εξίσωση,**
- $\nabla^2 u(x) = 0,$ **Εξίσωση Δυναμικού,**
- $\nabla^2 u(x) = -q(x),$ **Εξίσωση Poisson.**

Σ' αυτό το Κεφάλαιο θεωρούμε ότι το $x \in D$, όπου D είναι ένα ανοικτό φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$, $N = 2, 3$ και $t > 0$.

5.2 Δύο Διαστάσεις

5.2.1 Ορθογώνιο Πεδίο

A. Η Κυματική Εξίσωση σε μια Ορθογώνια Μembrάνη. Έστω μια δονούμενη ορθογώνια μεμβράνη $D = (0, a) \times (0, b)$, η οποία είναι σταθερά προσδεμένη στις τέσσερις πλευρές $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$. Επίσης θεωρούμε ότι στον αρχικό χρόνο ($t = 0$) η μεμβράνη παραμένει ακίνητη και η παραμόρφωσή της δίδεται από τη συνάρτηση $f(x, y)$.

Τότε η παραμόρφωση της μεμβράνης σε επόμενους χρόνους θα δίδεται από τη

όπου $m, n = 1, 2, 3, \dots$.

Στο Σχήμα 5.7 παρουσιάζουμε το Πρόβλημα Δυναμικού Τύπου Robin σε Σφαιρικό Πεδίο με ακτίνα 1, συνοριακές συνθήκες $u(1, \theta, \varphi) = 1$, $0 < \theta < \pi$, $0 < \varphi < \pi$, $u_r(1, \theta, \varphi) = 1$, $-\pi < \theta < 0$, $0 < \varphi < \pi$ και $f(\theta, \varphi) = 1$. Το Σχήμα έχει γίνει με τα προγράμματα COMSOL 3.2 και MATLAB.

Γ. Ηλεκτροστατικό Δυναμικό σε μια Σφαίρα - Ακτινική Συμμετρία

Υποθέτουμε ότι στην επιφάνεια μιας σφαίρας μοναδιαίας ακτίνας, διατηρείται μια σταθερή κατανομή ηλεκτροστατικού δυναμικού, έτσι ώστε να είναι ανεξάρτητη της αζιμουθιακής γωνίας θ . Επίσης θεωρούμε ότι δεν υπάρχουν άλλα φορτία στο εσωτερικό της σφαίρας.

Αν με τη συνάρτηση $f(\varphi)$ παριστάνεται η κατανομή δυναμικού στην επιφάνεια της σφαίρας, τότε οι λύσεις του ακόλουθου προβλήματος δίδουν την κατανομή δυναμικού στο εσωτερικό της σφαίρας

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad 0 < r < 1, \quad 0 < \varphi < \pi, \quad (3.54)$$

$$u(1, \varphi) = f(\varphi), \quad 0 < \varphi < \pi. \quad (3.55)$$

Θα λέμε ότι στις τρεις διαστάσεις μια συνάρτηση $u(r, \theta, \varphi)$ είναι *ακτινικά συμμετρική* ή *πληροί την ιδιότητα της ακτινικής συμμετρίας*, αν είναι ανεξάρτητη της μεταβλητής θ , δηλαδή αν ισχύει $u(r, \theta, \varphi) = u(r, \varphi)$. Στην παραπάνω εξίσωση θεωρούμε ότι, η συνάρτηση $u(r, \theta, \varphi)$ είναι ακτινικά συμμετρική.

Κάνουμε χρήση της μεθόδου χωριζόμενων μεταβλητών, θεωρώντας ότι η συνάρτηση u μπορεί να γραφεί ως $u(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$. Τότε από όλες τις προηγούμενες υποθέσεις και την τελευταία παραδοχή της ακτινικής συμμετρίας, το πρόβλημα (3.54) αναλύεται στα ακόλουθα επιμέρους προβλήματα

$$r^2 R''(r) + 2rR'(r) - \lambda R(r) = 0, \quad 0 < r < 1, \quad (3.56)$$

$$\frac{1}{\sin \varphi} \frac{d}{d\varphi} (\sin \varphi \Phi'(\varphi)) + \lambda \Phi(\varphi) = 0, \quad 0 < \varphi < \pi. \quad (3.57)$$

Θέτοντας $\xi = \cos \varphi$ στην εξίσωση (3.57), βρίσκουμε ότι

$$\frac{d}{d\xi} \left[(1 - \xi^2) \frac{d\Phi(\varphi)}{d\xi} \right] + \lambda \Phi(\varphi) = 0, \quad -1 < \xi < 1, \quad (3.58)$$

η οποία είναι *εξίσωση Legendre*. Επειδή λόγω φυσικών περιορισμών θα πρέπει η λύση να είναι φραγμένη μέσα στη σφαίρα βρίσκουμε ότι, οι μόνες φραγμένες

λύσεις της (3.58) υπάρχουν μόνο όταν

$$\lambda_n = n(n+1), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (3.59)$$

με αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις

$$\Phi_n(\varphi) = P_n(\xi) = P_n(\cos \varphi), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.60)$$

Για $\lambda_n = n(n+1)$ η εξίσωση (3.56) λαμβάνει τη μορφή

$$r^2 R''(r) + 2rR'(r) - n(n+1)R(r) = 0, \quad 0 < r < 1, \quad (3.61)$$

η οποία, για κάθε n , είναι μια εξίσωση *Cauchy-Euler* με γενική λύση της μορφής

$$R_n(r) = a_n r^n + b_n r^{-(n+1)}, \quad 0 < r < 1, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.62)$$

Για να παραμένουν φραγμένες οι συναρτήσεις $R_n(r)$, παίρνουμε $b_n = 0$. Έτσι προκύπτει ότι οι λύσεις του προβλήματος (3.56) θα έχουν τη μορφή

$$R_n(r) = a_n r^n, \quad 0 < r < 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.63)$$

Άρα, τελικά η γενική τυπική λύση του προβλήματος (3.54) θα είναι της μορφής

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n P_n(\cos \varphi), \quad 0 < r < 1, \quad 0 < \varphi < \pi, \quad (3.64)$$

όπου οι συντελεστές a_n είναι τέτοιοι ώστε να ικανοποιείται η συνοριακή συνθήκη τύπου Dirichlet (3.55)

$$u(1, \varphi) = f(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\cos \varphi), \quad 0 < \varphi < \pi. \quad (3.65)$$

Το ανάπτυγμα (3.65) αποτελεί τη σειρά *Fourier-Legendre* της συνάρτησης $f(\varphi)$. Επομένως θα έχουμε

$$a_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \int_0^\pi f(\varphi) P_n(\cos \varphi) \sin \varphi d\varphi, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.66)$$

Δ. Η Εξίσωση Schrödinger στη Σφαίρα.

1. Εξίσωση Schrödinger: Μαθηματική Προτυποποίηση. Ο ενεργειακός τελεστής (ή *Hamiltonian*) στην κβαντομηχανική συμβολίζεται με H και ορίζεται από τη σχέση

$$H =: \frac{\mathbf{p}^2}{2M} + V(\mathbf{r}), \quad (3.67)$$

όπου $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$ είναι η ορμή ενός σωματιδίου μάζας M , η $\hbar = 2\pi\hbar$ αποτελεί τη σταθερά Planck¹ και το $V(\mathbf{r})$ είναι η δυναμική ενέργεια. Η κατάσταση ενός σωματιδίου στο χρόνο t περιγράφεται αρκετά ικανοποιητικά από την κυματική συνάρτηση $\psi(\mathbf{r}, t)$. Η πιθανότητα το σωματίδιο να βρεθεί στη θέση $\mathbf{r} = (x, y, z)$ μέσα στον πεπερασμένο όγκο $dV = dx dy dz$ είναι

$$\int \int \int |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 dx dy dz. \quad (3.68)$$



Επειδή το σωματίδιο θα πρέπει να βρίσκεται πάντα κάπου μέσα στο χώρο, δηλαδή η πιθανότητα το σωματίδιο να βρίσκεται μέσα στο χώρο θα πρέπει να είναι μονάδα, θα πρέπει να ισχύει

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 dx dy dz = 1. \quad (3.69)$$

Εικόνα 5.4: Planck, Max (1858 - 1947) της $\psi(\mathbf{r}, t)$, είναι

Αποδεικνύεται ότι η χρονοεξαρτώμενη γραμμική εξίσωση Schrödinger, που ικανοποιείται από την κυματική συνάρ-

$$i\hbar\psi_t(\mathbf{r}, t) = H\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{-\hbar^2}{2M}\Delta\psi(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0. \quad (3.70)$$

Ένα σημαντικό πρόβλημα στην Κβαντομηχανική αποτελεί η εύρεση μιας λύσης του προβλήματος (3.70), δοθέντος του δυναμικού $V(\mathbf{r})$, η οποία να ικανοποιεί προκαθορισμένα αρχικά δεδομένα $\psi(\mathbf{r}, 0)$. Για την επίλυση του προβλήματος εφαρμόζουμε χωρισμό μεταβλητών, θεωρούμε δηλαδή ότι η λύση γράφεται στη μορφή

$$\psi(\mathbf{r}, t) = T(t)F(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0. \quad (3.71)$$

Η αντικατάσταση της σχέσης (3.71) στην εξίσωση (3.70) δίδει τις εξισώσεις

$$\frac{dT(t)}{dt} + \frac{iE}{\hbar}T(t) = 0, \quad t > 0, \quad (3.72)$$

$$\frac{-\hbar^2}{2M}\Delta F(\mathbf{r}) = EF(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3, \quad (3.73)$$

¹Ο Planck, Max Karl Ernst Ludwig FRS (23 Απρ 1858 - 4 Οκτωβρίου του 1947) ήταν ένας γερμανός θεωρητικός φυσικός, ο οποίος ξεκίνησε την κβαντική θεωρία και η οποία στη συνέχεια του απέφερε το βραβείο Νόμπελ Φυσικής το 1918. Ο Planck είχε σημαντική συνεισφορά σε διάφορα θέματα της Θεωρητικής Φυσικής, αλλά η φήμη του ως Φυσικός στηρίζεται κυρίως στο πρωτοποριακό ρόλο του ως δημιουργού της Κβαντικής Θεωρίας. Ωστόσο, το όνομά του είναι γνωστό σε ένα ευρύτερο ακαδημαϊκό κοινό, μετά τη μετονομασία, το 1948, του γερμανικού επιστημονικού ιδρύματος, «Kaiser Wilhelm Society» (της οποίας μάλιστα υπήρξε δύο φορές Πρόεδρος), σε «Max Planck Society» («MPS»). Η «MPS» περιλαμβάνει τώρα 83 οργανισμούς, που εκπροσωπούν ένα ευρύ φάσμα επιστημονικών κατευθύνσεων. Η Κβαντική Θεωρία του Max Planck αποτέλεσε μια πραγματική επανάσταση στην ανθρώπινη αντίληψη των ατομικών και υποατομικών διαδικασιών. Περισσότερα: https://en.wikipedia.org/wiki/Max_Planck

όπου το E αποτελεί τη σταθερά διαχωρισμού και έχει τη διάσταση της ενέργειας. Η επίλυση της χρονικής εξίσωσης (3.72) δίνει τη γενική λύση

$$T(t) = a \exp\left(\frac{-iEt}{\hbar}\right), \quad t > 0, \quad (3.74)$$

όπου το a αποτελεί μια αυθαίρετη σταθερά. Η εξίσωση (3.73) αποτελεί τη χρονοανεξάρτητη **εξίσωση Schrödinger**, η οποία αποτελεί μια εξίσωση ιδιοτιμών.

Εδώ θα πρέπει να σημειωθεί ότι η σημασία αυτής της εξίσωσης προκύπτει από το γεγονός ότι ο χωρισμός μεταβλητών δεν δίνει μόνο κάποιες ειδικές λύσεις αυτής, αλλά εν γένει αποφέρει όλες τις φυσικά σημαντικές λύσεις του προβλήματος.

Αν $F_E(\mathbf{r})$ είναι μια ειδική λύση της εξίσωσης (3.73), που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή E , τότε με βάση την αρχή της υπέρθεσης η γενική λύση της χρονοεξαρτώμενης εξίσωσης Schrödinger (3.70) είναι

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sum_E a_E \exp\left(\frac{-iEt}{\hbar}\right) F_E(\mathbf{r}), \quad t > 0, \quad (3.75)$$

όπου η άθροιση λαμβάνεται ως προς όλες τις αποδεκτές τιμές της σταθεράς διαχωρισμού E και a_E είναι αυθαίρετες σταθερές, που θα καθορισθούν από τις αρχικές συνθήκες, οι οποίες συνοδεύουν την χρονοεξαρτώμενη εξίσωση Schrödinger.

Για την επίλυση της εξίσωσης ιδιοτιμών (3.73), κάνουμε την παραδοχή ότι το δυναμικό είναι σφαιρικά συμμετρικό, δηλαδή ισχύει $V(\mathbf{r}) = V(r)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Η εξίσωση για την σφαιρικά συμμετρική λύση θα είναι

$$\nabla^2 F(r) + K[E - V(r)]F(r) = 0, \quad r > 0, \quad (3.76)$$

όπου $K = \frac{2M}{\hbar^2}$ και ∇^2 είναι ο τρισδιάστατος τελεστής Laplace. Για την επίλυση αυτού του προβλήματος αποδεικνύεται πιο πρόσφορο να γίνει χρήση των σφαιρικών συντεταγμένων (r, θ, φ) , $0 \leq r < +\infty$, $0 < \varphi < \pi$, $-\pi < \theta < \pi$. Έτσι η εξίσωση (3.76) σε σφαιρικές συντεταγμένες παίρνει τη μορφή

$$\frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial F}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{\sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \right] = -\frac{2M}{\hbar^2} [E - V(r)]F. \quad (3.77)$$

Σύμφωνα με τις βασικές αρχές της κβαντομηχανικής, η κυματική συνάρτηση $F(r, \theta, \varphi)$ ενός σωματιδίου χωρίς spin θα πρέπει να έχει μια ορισμένη τιμή σε κάθε σημείο του χώρου. Έτσι, θεωρούμε ότι η $F(r, \theta, \varphi)$ είναι μια μονότιμη φραγμένη συνάρτηση της θέσης.

Επίσης, η κυματική συνάρτηση $F(r, \theta, \varphi)$ για να είναι συμβατή με την πραγματικότητα θα πρέπει να είναι περιοδική ως προς την αζιμουθιακή συντεταγμένη θ . Οι παρατηρήσεις αυτές συνοψίζονται στις ακόλουθες συνοριακές συνθήκες

$$|F(r, \theta, \varphi)| \quad \text{φραγμένο καθώς το } r \rightarrow 0^+ \text{ και } r \rightarrow +\infty, \quad (3.78)$$

$$F(r, -\pi, \varphi) = F(r, \pi, \varphi), \quad F_\theta(r, -\pi, \varphi) = F_\theta(r, \pi, \varphi). \quad (3.79)$$

2. Εξίσωση Schrödinger:¹ Επίλυση-Διερεύνηση. Εφαρμόζοντας τη μέθοδο χωρισμού μεταβλητών θεωρούμε ότι οι λύσεις του προβλήματος (3.77) - (3.79) γράφονται στη μορφή

$$F(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi), \quad 0 < r < a, \quad 0 < \varphi < \pi, \quad -\pi < \theta < \pi. \quad (3.80)$$

Αντικαθιστώντας την παράσταση (3.80) της συνάρτησης $\Phi(r, \theta, \varphi)$ στο πρόβλημα (3.77) - (3.79) καταλήγουμε στα εξής επιμέρους προβλήματα

$$\Theta''(\theta) + \mu\Theta(\theta) = 0, \quad -\pi < \theta < \pi, \quad \Theta(-\pi) = \Theta(\pi), \quad \Theta'(-\pi) = \Theta'(\pi), \quad (3.81)$$

$$\sin^2 \varphi \Phi''(\varphi) + \sin \varphi \cos \varphi \Phi'(\varphi) + (\lambda \sin^2 \varphi - \mu)\Phi(\varphi) = 0, \quad 0 < \varphi < \pi, \quad (3.82)$$

$$r^2 R''(r) + 2rR'(r) + [K(E - V)r^2 - \lambda]R(r) = 0, \quad 0 < r < a. \quad (3.83)$$

Το πρόβλημα (3.81) δέχεται γενική λύση της μορφής

$$\Theta(\theta) = Ae^{i\sqrt{\mu}\theta} + Be^{-i\sqrt{\mu}\theta}, \quad -\pi < \theta < \pi. \quad (3.84)$$

όπου A, B είναι αυθαίρετες σταθερές. Η περιοδική συνθήκη απαιτεί όπως $B = 0$ και $\mu = m^2$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. Έτσι βρίσκουμε ότι οι λύσεις του προβλήματος (3.81) έχουν τη μορφή

$$\Theta(\theta) = Ae^{im\theta}, \quad -\pi < \theta < \pi, \quad (3.85)$$

όπου η αυθαίρετη σταθερά A θα καθορισθεί στη συνέχεια.

¹ Ο Schrödinger, Erwin Rudolf Josef Alexander (12 Αυγούστου 1887 - 4 Ιανουαρίου 1961) ήταν ένας βραβευμένος με Νόμπελ αυστριακός Φυσικός, ο οποίος ανέπτυξε μια σειρά από θεμελιώδη αποτελέσματα στο πεδίο της κβαντικής θεωρίας, η οποία αποτέλεσε τη βάση της Κυματικής Μηχανικής: διατύπωσε την κυματική εξίσωση (στάσιμη και χρόνο-εξαρτώμενη εξίσωση Schrödinger). Ο Schrödinger πρότεινε μια πρωτότυπη ερμηνεία της φυσικής έννοια της κυματοσυνάρτησης. Επιπλέον, συνέγραψε πολλών εργασιών σε διάφορους τομείς της Φυσικής: Στατιστική Μηχανική και Θερμοδυναμική, τη Φυσική των διηλεκτρικών, τη θεωρία των χρωμάτων, την Ηλεκτροδυναμική, τη Γενική Σχετικότητα, την Κοσμολογία και έκανε αρκετές προσπάθειες να διατυπώσει μια ενοποιημένη Θεωρία Πεδίου. Στο βιβλίο του «*Τι είναι η ζωή?*» ο Schrödinger προσεγγίζει τα προβλήματα της γενετικής, κοιτάζοντας το φαινόμενο της ζωής από την άποψη της Φυσικής. Έδωσε μεγάλη προσοχή στις φιλοσοφικές πτυχές της επιστήμης, στις έννοιες της αρχαίας και ανατολικής φιλοσοφίας, της ηθικής και της θρησκείας. Επίσης, έγραψε σχετικά με τη Φιλοσοφία και τη Θεωρητική Βιολογία. Είναι επίσης γνωστός για ένα πείραμα σκέψης με την ονομασία «*Schrödinger's cat*».

Στο πρόβλημα (3.82) εφαρμόζεται ο μετασχηματισμός $\xi = \cos \varphi$, οπότε προκύπτει η εξίσωση

$$(1 - \xi^2)\Phi''(\xi) - 2\xi\Phi'(\xi) + \left(\lambda - \frac{m^2}{1 - \xi^2}\right)\Phi(\xi) = 0, \quad -1 < \xi < 1, \quad (3.86)$$

η οποία αποτελεί την εξίσωση Legendre. Στην ειδική περίπτωση, που έχουμε $m = 0$, η εξίσωση (3.86) γίνεται

$$(1 - \xi^2)\Phi''(\xi) - 2\xi\Phi'(\xi) + \lambda\Phi(\xi) = 0, \quad -1 < \xi < 1. \quad (3.87)$$

Αποδεικνύεται ότι οι μόνες φραγμένες λύσεις της εξίσωσης Legendre (3.87) είναι τα πολυώνυμα Legendre $P_\beta(\cos \varphi)$ βαθμού β , όπου ισχύει $\lambda = \beta(\beta+1)$ με $\beta \in \mathbb{N}$.

Στην περίπτωση, που ισχύει $m \neq 0$, αποδεικνύεται ότι οι μόνες φραγμένες λύσεις της εξίσωσης Legendre (3.86) είναι τα λεγόμενα *συσχετισμένα πολυώνυμα Legendre* $P_\beta^m(\cos \varphi)$ βαθμού β και τάξης m , όπου ισχύει $\lambda = \beta(\beta+1)$, με $\beta \in \mathbb{N}$, ορισμένα από τη σχέση

$$P_\beta^m(\xi) = (1 - \xi^2)^{m/2} \frac{d^m}{d\xi^m} P_\beta(\xi), \quad -1 < \xi < 1. \quad (3.88)$$

Είναι φανερό ότι το πολυώνυμο $P_\beta^m(\cos \varphi)$ μηδενίζεται, για $m > \beta$. Για $m < 0$, αποδεικνύεται ότι ισχύει η σχέση

$$P_\beta^{-m}(\xi) = (-1)^m \frac{(\beta - m)!}{(\beta + m)!} P_\beta^m(\xi), \quad -1 < \xi < 1. \quad (3.89)$$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι οι συναρτήσεις $P_\beta^{-m}(\xi)$, $P_\beta^m(\xi)$ διαφέρουν κατά μια σταθερά. Επομένως αρκεί να περιοριστεί το m στους θετικούς ακραίους και το μηδέν. Άρα τα συσχετισμένα πολυώνυμα Legendre $P_\beta^m(\cos \varphi)$, με $|m| \leq \beta$ αποτελούν τις μόνες μη ιδιάζουσες φυσικά αποδεκτές λύσεις της εξίσωσης Legendre (3.86).

Δοθέντος του β , υπάρχουν ακριβώς $(2\beta + 1)$ διαφορετικές τιμές του m , $m = -\beta, \dots, -1, 0, 1, \dots, \beta$. Οι αριθμοί β και m ονομάζονται *τροχιακός κβαντικός αριθμός* (orbital quantum number) και *μαγνητικός κβαντικός αριθμός* (magnetic quantum number), αντίστοιχα.

Οι λύσεις της εξίσωσης (3.86), κανονικοποιημένες σ' όλο το χώρο, ονομάζονται *σφαιρικές αρμονικές* και, για $m \geq 0$, δίδονται από τη σχέση

$$Y_\beta^m(\theta, \varphi) = \left[\frac{2\beta + 1}{4\pi} \frac{(\beta - m)!}{(\beta + m)!} \right]^{1/2} (-1)^m e^{im\theta} P_\beta^m(\cos \theta), \quad (3.90)$$



Εικόνα 5.5: Schrödinger, Erwin (1887-1961)

6

Μη Φραγμένα Πεδία

Περιεχόμενα

- 6.1 Εισαγωγή.
- 6.2 Ολοκλήρωμα Fourier: 6.2.1 Εισαγωγή στο Ολοκλήρωμα Fourier, 6.2.2 Εξίσωση Θερμότητας στην Ημιευθεία, 6.2.3 Εξίσωση Θερμότητας στην Ευθεία, 6.2.4 Κυματική Εξίσωση στην Ημιευθεία, 6.2.5 Εξίσωση Laplace στο Άνω Ημιεπίπεδο, 6.2.6 Προβλήματα.
- 6.3 Μετασχηματισμός Laplace και Εφαρμογές: 6.3.1 Εισαγωγή στους Ολοκληρωτικούς Μετασχηματισμούς, 6.3.2 Εισαγωγή στο Μετασχηματισμό Laplace, 6.3.3 Εξίσωση Θερμότητας στην Ημιευθεία, 6.3.4 Μη Ομογενής Κυματική Εξίσωση στην Ημιευθεία, 6.3.5 Ομογενής Εξίσωση Θερμικής Διάχυσης & Μεταφοράς στην Ημιευθεία, 6.3.6 Ηχητικά Κύματα σε Παλλόμενη Σφαίρα, 6.3.7 Ομοιόμορφες Γραμμές Μεταφοράς στην Ημιευθεία, 6.3.8 Προβλήματα.
- 6.4 Μετασχηματισμός Fourier, 6.4.1 Εισαγωγή στο Μετασχηματισμό Fourier, Εφαρμογές στις Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις: 6.4.2 Ομογενής Κυματική Εξίσωση στην Ευθεία, 6.4.3 Ομογενής Εξίσωση Θερμότητας στην Ευθεία, 6.4.4 Μη Ομογενής Εξίσωση Θερμότητας στην Ευθεία, 6.4.5 Ομογενής Εξίσωση Laplace σε Λωρίδα, 6.4.6 Ομογενής Εξίσωση Laplace στο Πρώτο Τεταρτημόριο, 6.4.7 Τριδιάστατη Ομογενής Εξίσωση Θερμότητας στο Χώρο, 6.4.8 Προβλήματα.
- 6.5 Μετασχηματισμός Hankel: 6.5.1 Εισαγωγή - Ορισμός - Ιδιότητες 6.5.2 Εφαρμογές στις Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις, 6.5.3 Προβλήματα.
- 6.6 Βιβλιογραφικές Αναφορές.
- 6.7 Γενικά Προβλήματα.

«The infinite! No other question has ever moved so profoundly the spirit of man.» **David Hilbert**

6.1 Εισαγωγή

Στα προηγούμενα Κεφάλαια 2 έως 5 αναπτύχθηκαν τεχνικές για τη μελέτη των τριών βασικών κατηγοριών μερικών διαφορικών εξισώσεων δεύτερης (και ανώτερης άρτιας) τάξης, όταν αυτά είναι ορισμένα σε φραγμένο πεδίο. Όμως σε πολλά φυσικά, βιολογικά, κοινωνικά, κ.λ.π., φαινόμενα παρουσιάζεται η ανάγκη το αντίστοιχο μαθηματικό πρόβλημα να εξετασθεί σε ένα μη-φραγμένο πεδίο.

Για παράδειγμα, αν ενδιαφερόμαστε να μελετήσουμε ένα πρόβλημα στο μέσο μιας μακριάς ράβδου, όπου οι συνθήκες στα άκρα μπορούν να θεωρηθούν αμελητέες, τότε μπορεί να ορισθεί το πρόβλημα στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$. Επίσης, αν μας ενδιαφέρει η μελέτη ενός φαινομένου στο ένα άκρο μιας ράβδου ($x = 0$), τότε μπορεί να ορισθεί το πρόβλημα στο $(0, +\infty)$ ή $(-\infty, 0)$.

Κάποιος μπορεί να ισχυρισθεί ότι δεν υπάρχουν άπειρες ράβδοι ή χορδές. Όμως, αν μπορεί να βρεθεί μια απλή λύση του προβλήματος στο μη φραγμένο πεδίο, τότε αυτή η λύση κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις θα μπορούσε να θεωρηθεί ως μια καλή προσέγγιση της λύσης του αντίστοιχου προβλήματος, που είναι ορισμένο σε κάποιο φραγμένο υποσύνολο.

Η μελέτη τέτοιων προβλημάτων θα βασισθεί σε δύο κατηγορίες τεχνικών. Η πρώτη μέθοδος βασίζεται στο χωρισμό μεταβλητών σε άπειρο πεδίο, το οποίο οδηγεί στην ολοκληρωτική αναπαράσταση της λύσης ονομαζόμενη ολοκλήρωμα Fourier. Η δε δεύτερη κατηγορία τεχνικών είναι αυτή των ολοκληρωτικών μετασχηματισμών. Συγκεκριμένα, εδώ θα ασχοληθούμε με τους μετασχηματισμούς Laplace, Fourier, Hankel καθώς και με κάποιες παραλλαγές αυτών.

6.2 Ολοκλήρωμα Fourier

6.2.1 Εισαγωγή στο Ολοκλήρωμα Fourier

Έστω $f(x)$ μια απόλυτα ολοκληρώσιμη συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Επίσης υποθέτουμε ότι η $f(x)$ είναι τέτοια ώστε να αναπτύσσεται σε σειρά Fourier σε κάθε διάστημα της μορφής $(-L, L)$, για κάθε $L \in \mathbb{R}^+$. Για παράδειγμα, αυτό είναι δυνατόν αν η $f(x)$ είναι τμηματικά λεία στο διάστημα $(-L, L)$. Τότε ορίζεται ως **ολοκλήρωμα Fourier** της συνάρτησης $f(x)$ στο $\mathbb{R}$ η ολοκληρωτική παράσταση

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(z) \cos \alpha(z-x) dz \right] d\alpha. \quad (2.1)$$

Αναλύοντας το $\cos \alpha(z-x)$ και αντικαθιστώντας στον τύπο (2.1) ευρίσκουμε την

ολοκληρωτική παράσταση

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(z) \cos \alpha z dz \right] \cos \alpha x d\alpha + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(z) \sin \alpha z dz \right] \sin \alpha x d\alpha. \quad (2.2)$$

Με βάση την παράσταση (2.2), για κατάλληλη άρτια συνάρτηση $f(x)$ ορισμένη στο $\mathbb{R}$, ορίζουμε ως **συνημιτονικό ολοκλήρωμα Fourier** αυτής στο πεδίο $\mathbb{R}^+$ την ολοκληρωτική παράσταση

$$f(x) \sim \int_0^{+\infty} A(\alpha) \cos \alpha x d\alpha, \quad (2.3)$$

όπου $A(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(z) \cos \alpha z dz$. Επίσης, για κατάλληλη περιττή συνάρτηση $f(x)$ ορισμένη στο $\mathbb{R}$, ορίζουμε ως **ημιτονικό ολοκλήρωμα Fourier** αυτής στο πεδίο $\mathbb{R}^+$ την ολοκληρωτική παράσταση

$$f(x) \sim \int_0^{+\infty} B(\alpha) \sin \alpha x d\alpha, \quad (2.4)$$

όπου $B(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(z) \sin \alpha z dz$. Όλα αυτά βέβαια με την προϋπόθεση ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι τέτοια ώστε, να ορίζονται όλα τα γενικευμένα ολοκληρώματα, που παρουσιάζονται στις σχέσεις (2.3) και (2.4). Για περισσότερα στοιχεία, ιδιότητες και άλλα χαρακτηριστικά των ολοκληρωμάτων Fourier, παραπέμπουμε στο σύγγραμμα [211, Κεφάλαιο 9, Ενότητα 9.6, σελ. 519-526]

Στη συνέχεια δίδουμε ορισμένα χαρακτηριστικά παραδείγματα εφαρμογής της τεχνικής του ολοκληρώματος Fourier σε βασικές κατηγορίες μερικών διαφορικών εξισώσεων.

6.2.2 Εξίσωση Θερμότητας στην Ημieuθεία

Έστω το ακόλουθο ομογενές πρόβλημα θερμότητας στην ημieuθεία με αρχικές και συνοριακές συνθήκες μεικτού τύπου

$$u_{xx}(x, t) = k^{-2} u_t(x, t), \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0, \quad (2.5)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(x, t), \quad u_x(x, t) \text{ φραγμένα, καθώς το } x \rightarrow \infty, \quad t > 0, \quad (2.6)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < \infty, \quad (2.7)$$

όπου η συνάρτηση $f(x)$ είναι τμηματικά συνεχής και απόλυτα ολοκληρώσιμη, δηλαδή ισχύει η σχέση $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$. Με βάση τη θεωρία του χωρισμού

χικές και συνοριακές συνθήκες τύπου Neumann

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, t) &= c^{-2} u_{tt}(x, t), \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0, \\ u_x(0, t) &= 0, \quad u(x, t), \quad u_x(x, t) \text{ φραγμένα, καθώς το } x \rightarrow \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= \sin x, \quad u_t(x, 0) = \cos x, \quad 0 < x < \infty, \end{aligned}$$

όπου c είναι μια πραγματική σταθερά.

[14] Να λυθεί το ακόλουθο ομογενές κυματικό πρόβλημα στην ευθεία με αρχικές και συνοριακές συνθήκες τύπου Neumann

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, t) &= c^{-2} u_{tt}(x, t), \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, t), \quad u_x(x, t) &\text{ φραγμένα, καθώς το } |x| \rightarrow \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= e^{-|x|}, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < \infty, \end{aligned}$$

όπου c είναι μια πραγματική σταθερά.

6.3 Μετασχηματισμός Laplace και Εφαρμογές

6.3.1 Εισαγωγή στους Ολοκληρωτικούς Μετασχηματισμούς

Σ' αυτή την Ενότητα θα χρησιμοποιήσουμε τους ολοκληρωτικούς μετασχηματισμούς των Laplace, Fourier, Hankel για την επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης. Όπως και στην περίπτωση των συνήθων διαφορικών εξισώσεων οι ολοκληρωτικοί μετασχηματισμοί εφαρμοζόμενοι σε μια μερική διαφορική εξίσωση την μετατρέπουν σε μια απλούστερη συνήθη ή μερική διαφορική εξίσωση, της οποίας η λύση μέσω του αντίστροφου μετασχηματισμού μας οδηγεί στην επίλυση της αρχικής μερικής διαφορικής εξίσωσης.

Ειδικότερα, η μέθοδος αυτή μετασχηματίζει μια μερική διαφορική εξίσωση n μεταβλητών σε μια άλλη $(n - 1)$ μεταβλητών. Η διαφορά μεταξύ αυτής της μεθόδου και της μεθόδου των ολοκληρωμάτων Fourier είναι ότι, εδώ αποφεύγουμε το πρόβλημα ιδιοτιμών και αναπαράστάσεων Fourier.

Όμως, επειδή γίνεται χρήση αντίστροφων μετασχηματισμών θα πρέπει να έχουμε άμεση πρόσβαση σε αντίστοιχους επαρκείς πίνακες ολοκληρωτικών μετασχηματισμών ή/και την εμπειρία εφαρμογής της αντίστοιχης θεωρίας εύρεσης του αντίστροφου μετασχηματισμού με τη χρήση των τεχνικών της ολοκλήρωσης κατάλληλων μιγαδικών συναρτήσεων. Για αυτά παραπέμπουμε στην Ενότητα 12.7 του Κεφαλαίου του παρόντος συγγράμματος.

6.3.2 Εισαγωγή στο Μετασχηματισμό Laplace

Η περισσότερο κοινή μέθοδος επίλυσης γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων μετά την τεχνική του χωρισμού των μεταβλητών, είναι αυτή του Μετασχηματισμού Laplace. Ο μετασχηματισμός Laplace χρησιμοποιείται σε προβλήματα, στα οποία είναι παρούσα η χρονική μεταβλητή t , μεταβαλλόμενη στο διάστημα $t \geq 0$, ενώ η χωρική μεταβλητή x μεταβάλλεται σε φραγμένο διάστημα $0 \leq x \leq a$ ή στο άπειρο διάστημα $-\infty \leq x \leq +\infty$.

Επειδή ο μετασχηματισμός Laplace συνδέεται με τη χρονική μεταβλητή, δηλαδή σημαίνει ολοκλήρωση ως προς τη μεταβλητή t μόνο, είναι φανερό ότι ο μετασχηματισμός εφαρμόζεται μόνο σε εξελικτικές εξισώσεις (π.χ. παραβολική ή υπερβολική εξίσωση).

Ο μετασχηματισμός Laplace δεν είναι κατάλληλος για επίλυση προβλημάτων Laplace σε μη-φραγμένα πεδία! Αυτό συμβαίνει γιατί, αν $\mathcal{L}\{u(x, y)|x \rightarrow s\} = Y(s, y)$, τότε, για $x > 0$, θα έχουμε

$$\mathcal{L}\{u_{xx}(x, y)|x \rightarrow s\} = s^2 Y(s, y) - su(0, y) - u_x(0, y).$$

Επομένως, για να γίνει χρήση αυτού του τύπου θα πρέπει να γνωρίζουμε εκ των προτέρων τα $u(x, y)$, $u_x(x, y)$ στο σύνορο $x = 0$. Αυτό το γεγονός όμως, οδηγεί γενικά σε μη καλά τοποθετημένο πρόβλημα. Αν τώρα αφήσουμε τα $u(x, y)$, $u_x(x, y)$ απροσδιόριστα στο $x = 0$, τότε οδηγούμαστε σε ανεξέλεγκτες καταστάσεις.

Έτσι, για την επίλυση προβλημάτων Laplace σε μη φραγμένο πεδίο κάνουμε χρήση του ολοκληρώματος Fourier ή των Μετασχηματισμών Fourier ή Hankel ανάλογα αν εργαζόμαστε σε καρτεσιανές ή πολικές συντεταγμένες, αντίστοιχα. Πράγμα, που θα δείξουμε στη συνέχεια αυτής της Ενότητας και στις επόμενες αυτού του Κεφαλαίου.

Έστω τώρα $u(x, t)$ αυθαίρετη συνάρτηση, η οποία δέχεται μετασχηματισμό Laplace, ως προς t , δηλαδή ισχύει

$$\mathcal{L}\{u(x, t)|t \rightarrow s\} = \int_0^\infty e^{-st} u(x, t) dt = Y(x, s). \quad (3.1)$$

Αν η $u(x, t)$ είναι παραγωγίσιμη ως προς t , τότε ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις για τις παραγώγους

$$\mathcal{L}\{u_t(x, t)|t \rightarrow s\} = sY(x, s) - u(x, 0), \quad (3.2)$$

$$\mathcal{L}\{u_x(x, t)|t \rightarrow s\} = \int_0^\infty e^{-st} u_x(x, t) dt = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty e^{-st} u(x, t) dt = Y_x(x, s), \quad (3.3)$$

$$\mathcal{L}\{u_{xx}(x, t)|t \rightarrow s\} = Y_{xx}(x, s). \quad (3.4)$$

Η απόδειξη γίνεται με τη χρήση της παραγοντικής ολοκλήρωσης

Παρατήρηση 6.3.3. (i) Επειδή εδώ έχουμε συναρτήσεις πολλών μεταβλητών είναι αναγκαίο να φαίνεται ως προς ποια μεταβλητή γίνεται ο μετασχηματισμός Laplace. Για παράδειγμα, έχουμε

$$\mathcal{L}\{u_x(x, t)|x \rightarrow s\} = \int_0^\infty e^{-sx} u(x, t) dx = Y(s, t).$$

(ii) Στις σχέσεις (3.3), (3.4) Υποθέτουμε ότι ισχύουν οι απαραίτητες συνθήκες ώστε να μπορεί να γίνει εναλλαγή παραγώγισης και ολοκλήρωσης.

(iii) Για μια αναλυτική παρουσίαση της θεωρίας και των τεχνικών του Μετασχηματισμού Laplace παραπέμπουμε στο σύγγραμμα [211, Κεφάλαιο 7]. Επίσης εκεί υπάρχουν πίνακες μετασχηματισμών Laplace των βασικών συναρτήσεων. Για περισσότερο εκτενείς πληροφορίες και πίνακες των μετασχηματισμών Laplace παραπέμπουμε μεταξύ άλλων στα βιβλία των M. Abramowitz and I Stegun [1], A. Erdelyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, and F. G. Tricomi [37], R. B. Guest [50], F. Oberhettinger and L. Badii [92], E. D. Rainville [102], I. N. Sneddon [115].

Στη συνέχεια δίδουμε ορισμένα χαρακτηριστικά παραδείγματα εφαρμογής του μετασχηματισμού Laplace σε βασικές κατηγορίες μερικών διαφορικών εξισώσεων της Μαθηματικής Φυσικής.

6.3.3 Εξίσωση Θερμότητας στην Ημieuθεία

Θεωρούμε το ακόλουθο παραβολικό πρόβλημα αρχικών συνοριακών συνθηκών τύπου Dirichlet ορισμένο στην ημieuθεία

$$u_{xx}(x, t) = k^2 u_t(x, t), \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0, \quad (3.5)$$

$$u(0, t) = f(t), \quad u(x, t) \rightarrow 0, \quad \text{καθώς το } x \rightarrow \infty, \quad t > 0, \quad (3.6)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < \infty. \quad (3.7)$$

Έστω $\mathcal{L}\{u(x, t)|t \rightarrow s\} = Y(x, s)$, $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$. Εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό Laplace στο πρόβλημα αρχικών συνοριακών συνθηκών (3.5) - (3.7) και παίρνουμε το πρόβλημα συνοριακών συνθηκών

$$Y_{xx}(x, s) - \frac{s}{k^2} Y(x, s) = 0, \quad 0 < x < \infty, \quad (3.8)$$

$$Y(0, s) = F(s), \quad Y(x, s) \rightarrow 0, \quad \text{καθώς το } x \rightarrow \infty. \quad (3.9)$$

Η γενική λύση της συνήθους διαφορικής εξίσωσης (3.8) είναι της μορφής

$$Y(x, s) = A(s)e^{-\frac{x\sqrt{s}}{k}} + B(s)e^{\frac{x\sqrt{s}}{k}}, \quad (3.10)$$

όπου c_0, h, k είναι πραγματικές σταθερές με $k > 0$.

Απάντηση: $u(x, t) = c_0 e^{-ht} [1 - \operatorname{erfc}(x/2k\sqrt{t})]$.

6.4 Μετασχηματισμός Fourier

6.4.1 Εισαγωγή στο Μετασχηματισμό Fourier

Ο μετασχηματισμός Fourier σε αντίθεση με το ολοκλήρωμα Fourier χρησιμοποιείται για την επίλυση μη ομογενών προβλημάτων. Επιπλέον όμως σε ορισμένες περιπτώσεις ομογενών προβλημάτων, η επιλογή του μετασχηματισμού Fourier οδηγεί σε ευκολότερη διαδικασία επίλυσης αντί του μετασχηματισμού Laplace ή του ολοκληρώματος Fourier.

Συνήθως ο μετασχηματισμός Fourier εφαρμόζεται στη χωρική μεταβλητή x , σε αντίθεση με το μετασχηματισμό Laplace, ο οποίος συνδέεται με τη χρονική μεταβλητή t . Αν το πεδίο είναι όλη η ευθεία, τότε γίνεται χρήση του εκθετικού μετασχηματισμού Fourier. Ενώ αν το πεδίο ορισμού είναι ο θετικός ημιάξονας, τότε ανάλογα με τη μορφή των συνοριακών συνθηκών γίνεται άρτια ή περιττή επέκταση του προβλήματος και εφαρμογή του συνημιτονικού ή ημιτονικού μετασχηματισμού Fourier, αντίστοιχα.

Έστω $f(x)$ μια συνεχής, τμηματικά λεία και απόλυτα ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Τότε ορίζεται ο **(εκθετικός) μετασχηματισμός Fourier** $F(\alpha) := \mathcal{F}[f(x)]$ της $f(x)$ στο $\mathbb{R}$ από τον τύπο

$$F(\alpha) = \mathcal{F}[f(x)] := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) e^{i\alpha z} dz. \quad (4.1)$$

Ενώ ο **αντίστροφος (εκθετικός) μετασχηματισμός Fourier** $f(x) := \mathcal{F}^{-1}[F(\alpha)]$ της $F(\alpha)$ στο $\mathbb{R}$ δίδεται από τον τύπο

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[F(\alpha)] := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha. \quad (4.2)$$

Όταν η συνάρτηση $f(x)$ είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}^+$ και επεκτείνεται σε μια περιττή, συνεχή, τμηματικά λεία και απόλυτα ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, τότε ορίζεται ο **ημιτονικός μετασχηματισμός Fourier** $F_S(\alpha) := \mathcal{F}_S[f(x)]$ αυτής από το ακόλουθο ολοκλήρωμα

$$F_S(\alpha) := \mathcal{F}_S[f(x)] := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(z) \sin(\alpha z) dz. \quad (4.3)$$

Ενώ ο **αντίστροφος ημιτονικός μετασχηματισμός Fourier** $f(x) := \mathcal{F}_S^{-1}[F(\alpha)]$ της $F_S(\alpha)$ στο $\mathbb{R}^+$ δίδεται από τον τύπο

$$f(x) = \mathcal{F}_S^{-1}[F_S(\alpha)] := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} F_S(\alpha) \sin(\alpha x) d\alpha. \quad (4.4)$$

Τέλος, όταν η συνάρτηση $f(x)$ είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}^+$ και επεκτείνεται σε μια άρτια, συνεχή, τμηματικά λεία και απόλυτα ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, τότε ορίζεται ο **συνημιτονικός μετασχηματισμός Fourier** $F_C(\alpha) := \mathcal{F}_C[f(x)]$ αυτής από το ακόλουθο ολοκλήρωμα

$$F_C(\alpha) := \mathcal{F}_C[f(x)] := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(z) \cos(\alpha z) dz. \quad (4.5)$$

Ενώ ο **αντίστροφος συνημιτονικός μετασχηματισμός Fourier** $f(x) := \mathcal{F}_C^{-1}[F(\alpha)]$ της $F_C(\alpha)$ στο $\mathbb{R}^+$ δίδεται από τον τύπο

$$f(x) = \mathcal{F}_C^{-1}[F_S(\alpha)] := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} F_C(\alpha) \cos(\alpha x) d\alpha. \quad (4.6)$$

Για περισσότερα στοιχεία, ιδιότητες και άλλα χαρακτηριστικά των μετασχηματισμών Fourier καθώς και την επέκταση αυτών των εννοιών στις ανώτερες διαστάσεις, παραπέμπουμε στο σύγγραμμά [211, Κεφάλαιο 9, Ενότητα 8, σελίδες 529-540].

Επίσης εκεί υπάρχουν εκτενείς πίνακες μετασχηματισμών Fourier των βασικών συναρτήσεων. Στη συνέχεια δίδουμε ορισμένα χαρακτηριστικά παραδείγματα εφαρμογής των μετασχηματισμών Fourier, που ορίστηκαν παραπάνω, σε βασικές κατηγορίες μερικών διαφορικών εξισώσεων.

Εφαρμογές στις Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

6.4.2 Ομογενής Κυματική Εξίσωση στην Ευθεία

Θεωρούμε μια άπειρη χορδή, ελεύθερη εξωτερικών επιδράσεων, στην οποία δίδεται μια αρχική μετατόπιση $f(x)$, και μια αρχική ταχύτητα $g(x)$. Τότε οι εγκάρσιες μετατοπίσεις αυτής, σε κάθε σημείο x και για χρόνους $t > 0$, περιγράφονται από τη λύση του ακόλουθου ομογενούς υπερβολικού προβλήματος αρχικών συνοριακών συνθηκών τύπου Robin ορισμένου στην ευθεία

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \quad (4.7)$$

$$u(x, t) \rightarrow 0, \quad u_x(x, t) \rightarrow 0, \quad \text{καθώς το } |x| \rightarrow \infty, \quad t > 0, \quad (4.8)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (4.9)$$

Επειδή $x \in \mathbb{R}$ θα γίνει χρήση του εκθετικού μετασχηματισμού Fourier. Θέτοντας λοιπόν, $\mathcal{F}\{u(x, t); x \rightarrow \alpha\} = U(\alpha, t)$, $\mathcal{F}\{f(x); x \rightarrow \alpha\} = F(\alpha)$, $\mathcal{F}\{g(x); x \rightarrow \alpha\} = G(\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ και εφαρμόζοντας τον εκθετικό μετασχηματισμό Fourier στο πρόβλημα (4.7) - (4.9), προκύπτει το ακόλουθο πρόβλημα αρχικών συνθηκών δευτέρης τάξης

$$U_{tt}(\alpha, t) + c^2 \alpha^2 U(\alpha, t) = 0, \quad t > 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (4.10)$$

$$U(\alpha, 0) = F(\alpha), \quad U_t(\alpha, 0) = G(\alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (4.11)$$

Ακολουθώντας γνωστές διαδικασίες βρίσκουμε ότι η μοναδική λύση του προβλήματος (4.10) - (4.11) είναι

$$U(\alpha, t) = F(\alpha) \cos(c\alpha t) + \frac{G(\alpha)}{c\alpha} \sin(c\alpha t), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \quad (4.12)$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης (4.12) δίδει τη (τυπική) λύση του προβλήματος (4.7) - (4.9) σε ολοκληρωτική μορφή, η οποία είναι

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha x} \left[F(\alpha) \cos(c\alpha t) + \frac{G(\alpha)}{c\alpha} \sin(c\alpha t) \right] d\alpha, \quad (4.13)$$

όπου $-\infty < x < \infty$, $t > 0$. Θέτοντας τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις σε εκθετική μορφή με τη χρήση των τύπων του Euler, βρίσκουμε ότι η (τυπική) λύση (4.13) του προβλήματος λαμβάνει τη μορφή

$$u(x, t) = + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[e^{-i\alpha(x-ct)} + e^{-i\alpha(x+ct)} \right] F(\alpha) d\alpha \quad (4.14)$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[e^{-i\alpha(x-ct)} - e^{-i\alpha(x+ct)} \right] \frac{G(\alpha)}{i c \alpha} d\alpha, \quad (4.15)$$

όπου $-\infty < x < \infty$, $t > 0$. Χρησιμοποιώντας τώρα τους αντίστροφους μετασχηματισμούς Fourier των συναρτήσεων $F(s)$, $G(s)$ καταλήγουμε άμεσα στην αναγνωρίσιμη μορφή της λύσης (4.13) του προβλήματος (4.7) - (4.9)

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x-ct) + f(x+ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(z) dz, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0. \quad (4.16)$$

Πράγματι, η συνάρτηση (4.16) αποτελεί τη λύση D' Alembert της ομογενούς κυματικής εξίσωσης σ' όλο το $\mathbb{R}$, όπως αυτό είναι ήδη γνωστό από την Ενότητα 1.5.2.

Παρατήρηση 6.4.1. Από την τελευταία διαπίστωση στο παραπάνω πρόβλημα γίνεται φανερό ότι η μέθοδος του μετασχηματισμού Fourier αποτελεί έναν εναλλακτικό τρόπο επίλυσης του προβλήματος της κυματικής εξίσωσης στην ευθεία.

Όμως, σε περισσότερες διαστάσεις καθώς και σε προβλήματα τέταρτης ή ανώτερης τάξης, όπου δεν υπάρχει το ανάλογο του τύπου D' Alembert, οι διάφορες μορφές των ολοκληρωτικών μετασχηματισμών αποδεικνύονται ιδιαίτερα χρήσιμες.

[17] Με τη χρήση του κατάλληλου μετασχηματισμού Fourier να βρεθεί η λύση του ακόλουθου ελλειπτικού προβλήματος συνοριακών συνθηκών τύπου Dirichlet στην άπειρη λωρίδα

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) &= 0, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < y < 1, \\ u(x, 0) &= \sinh x, \quad u(x, 1) = 0, \quad 0 < x < \infty, \\ u(0, y) &= 0, \quad u(x, y) \rightarrow 0 \text{ ομοιόμορφα ως προς } y, \text{ καθώς το } |x| \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

[18] Με τη χρήση του κατάλληλου μετασχηματισμού Fourier να βρεθεί η λύση του ακόλουθου ελλειπτικού προβλήματος συνοριακών συνθηκών τύπου Dirichlet στην άπειρη λωρίδα

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) &= 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < y, \\ u(x, y) &\text{ φραγμένο, καθώς το } x^2 + y^2 \rightarrow +\infty, \\ u(x, 0) &= \begin{cases} 2, & |x| < 4, \\ 0, & |x| > 4. \end{cases} \end{aligned}$$

Απάντηση: $u(x, y) = \frac{2}{\pi} \left\{ \arctan\left(\frac{4-x}{y}\right) + \arctan\left(\frac{4+x}{y}\right) \right\}.$

6.5 Μετασχηματισμός Hankel

6.5.1 Εισαγωγή - Ορισμός - Ιδιότητες

Ενώ στις καρτεσιανές συντεταγμένες γίνεται χρήση του μετασχηματισμού Fourier (εκθετικού, ημιτονικού ή συνημιτονικού) ανάλογα αν το πρόβλημα ορίζεται σ' όλη την ευθεία ή σε ημιευθεία, στις πολικές και κυλινδρικές συντεταγμένες χρησιμοποιείται ο μετασχηματισμός Hankel¹, ο οποίος βασίζεται στις συναρτήσεις Bessel, δηλαδή στις λύσεις της διαφορικής εξίσωσης Bessel



Εικόνα 6.1: Hankel, Hermann (1839-1873)

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{du(r)}{dr} \right) + \left(\lambda^2 r - \frac{\nu^2}{r} \right) u(r) = 0, \quad (5.1)$$

¹Ο Hankel, Hermann (14, Φεβρουαρίου 1839-29 Αυγούστου 1873) ήταν Γερμανός μαθηματικός, ο οποίος γεννήθηκε στο Χάλε της Γερμανίας και πέθανε σε Schramberg (κοντά στο Tübingen), της αυτοκρατορικής Γερμανίας. Σπούδασε και εργάστηκε, μεταξύ άλλων, με τους Möbius, Riemann, Weierstrass και Kronecker. Η εργασία του το 1867 σχετικά με χρήση των μιγαδικών αριθμών στη θεωρία των quaternions είναι ιδιαίτερα αξιοσημείωτη. Για παράδειγμα, ο Fischbein σημειώνει ότι έλυσε το πρόβλημα του πολλαπλασιασμού των αρνητικών αριθμών. Επιπλέον, ο Hankel έδειξε ιδιαίτερη προσοχή στη Γραμμική Άλγεβρα, που ο H. Grassmann είχε αναπτύξει στη «Θεωρία Επέκτασης». Αυτό το ενδιαφέρον συνεχίστηκε αργότερα για τις αρχικές ιδέες του Grassmann σχετικά με τη φύση του χώρου.

όπου $r > 0$, $\nu \geq 0$. Οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης (5.1), οι οποίες παραμένουν φραγμένες, καθώς το $r \rightarrow 0^+$, είναι γνωστό ότι είναι πολλαπλάσια της συνάρτησης Bessel πρώτου είδους και τάξης ν

$$u(r) = J_\nu(\lambda r), \quad r > 0, \quad \nu \geq 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (5.2)$$

Για ν' αντιστοιχίσουμε ένα μετασχηματισμό στη συνάρτηση $J_\nu(\lambda r)$, θα πρέπει να γνωρίζουμε τη συμπεριφορά αυτής, καθώς το $r \rightarrow \infty$. Είναι γνωστό ότι ισχύει η ακόλουθη ασυμπτωτική συμπεριφορά

$$J_\nu(\lambda r) \approx \sqrt{\frac{2}{r\pi}} \cos\left(r - \frac{\pi}{4} - \frac{\nu\pi}{2}\right), \quad r > 0, \quad \nu \geq 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (5.3)$$

για μεγάλα r . Η παραπάνω σχέση (5.3) σημαίνει ότι, η συνάρτηση $J_\nu(\lambda r)$, για μεγάλα r , είναι ταλαντευόμενη με πλάτος, το οποίο φθίνει με ρυθμό $1/\sqrt{r}$. Στο επόμενο θεώρημα δίδουμε χωρίς απόδειξη τις αναγκαίες συνθήκες, που πρέπει να πληροί μια συνάρτηση $f(r)$, ώστε να ορίζεται ο μετασχηματισμός Hankel αυτής.

Θεώρημα 6.5.1. (Ολοκληρωτικός Τύπος Hankel) Έστω ότι η συνάρτηση $\sqrt{r}f(r)$ είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη στο διάστημα $(0, \infty)$ και η $f(r)$ είναι τμηματικά λεία σε κάθε πεπερασμένο διάστημα. Τότε ισχύει η σχέση

$$\frac{f(r^+) + f(r^-)}{2} = \int_0^\infty \lambda A(\lambda) J_\nu(\lambda r) d\lambda, \quad r > 0, \quad \nu \geq 0, \quad (5.4)$$

όπου

$$A(\lambda) = \int_0^\infty r f(r) J_\nu(\lambda r) dr, \quad \nu \geq 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (5.5)$$

Ορισμός 6.5.2. Ορίζουμε ως **μετασχηματισμό Hankel τάξης ν** και συμβολίζουμε με $F_\nu(\lambda)$ της συνάρτησης $f(r)$, την παράσταση

$$\mathcal{H}_\nu[f(r)] = F_\nu(\lambda) = \int_0^\infty r f(r) J_\nu(\lambda r) dr, \quad \nu \geq 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (5.6)$$

Ενώ ο **αντίστροφος μετασχηματισμός Hankel τάξης ν** $f(r)$ της συνάρτησης $F_\nu(\lambda)$ ορίζεται η παράσταση

$$\mathcal{H}_\nu^{-1}[F_\nu(\lambda)] = f(r) = \int_0^\infty \lambda F_\nu(\lambda) J_\nu(\lambda r) d\lambda, \quad r > 0, \quad \nu \geq 0. \quad (5.7)$$

Παρατήρηση 6.5.3. Όσον αφορά τις παραπάνω έννοιες έχουμε να παρατηρήσουμε τα ακόλουθα: **(i)** Η απόλυτη ολοκληρωσιμότητα της παράστασης $\sqrt{r}f(r)$ εξασφαλίζει τη σύγκλιση του ολοκληρώματος (5.5), **(ii)** στη σχέση (5.7) η ποσότητα $f(r)$ θεωρείται ότι αντικαθίσταται από τη μέση τιμή των πλευρικών ορίων στα σημεία ασυνέχειας, όπως αυτό γίνεται στη σχέση (5.4), **(iii)** ο δείκτης ν τονίζει τη σχέση του μετασχηματισμού Hankel με την τάξη της διαφορικής εξίσωσης Bessel (5.1), με την οποία συνδέεται; αλλάζοντας δηλαδή η τάξη της εξίσωσης Bessel αλλάζει και ο μετασχηματισμός Hankel.

Παράδειγμα 6.5.4. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Hankel τάξης ν των ακόλουθων συναρτήσεων:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad f(r) &= \frac{e^{-ar}}{r}, \quad \text{για } \nu = 0, & \text{(ii)} \quad f(r) &= e^{-ar}, \quad \text{για } \nu = 1, \\ \text{(iii)} \quad f(r) &= \begin{cases} r^\nu, & 0 < r < b, \\ 0, & r > b, \end{cases} \quad \text{για } \nu = \nu. \end{aligned}$$

Λύση Σύμφωνα με τον τύπο (5.6) έχουμε κατά περίπτωση τα ακόλουθα

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \mathcal{H}_0[f(r)] &= F_0(\lambda) = \int_0^\infty r \frac{e^{-ar}}{r} J_0(\lambda r) dr = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + a^2}}, \\ \text{(ii)} \quad \mathcal{H}_1[f(r)] &= F_1(\lambda) = \int_0^\infty r e^{-ar} J_1(\lambda r) dr = \frac{\lambda}{(\lambda^2 + a^2)^{3/2}}, \\ \text{(iii)} \quad \mathcal{H}_\nu[f(r)] &= F_\nu(\lambda) = \int_0^\infty r f(r) J_\nu(\lambda r) dr = \int_0^b r^{n+1} J_\nu(\lambda r) dr \\ (\sigma = \lambda r) &= \int_0^{\lambda b} \left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)^{n+1} J_\nu(\sigma) \frac{d\sigma}{\lambda} = \frac{1}{\lambda^{v+2}} \int_0^{\lambda b} \sigma^{n+1} J_\nu(\sigma) d\sigma \\ &= \frac{1}{\lambda^{v+2}} \int_0^{\lambda b} \frac{d}{d\sigma} [\sigma^{n+1} J_{\nu+1}(\sigma)] d\sigma = \frac{1}{\lambda} b^{v+1} J_{\nu+1}(\lambda b). \end{aligned}$$

Στο επόμενο θεώρημα δίδουμε τις βασικές ιδιότητες, που πληροί ο μετασχηματισμός Hankel και οι οποίες αποδεικνύονται ιδιαίτερα χρήσιμες κατά την επίλυση συγκεκριμένων προβλημάτων μερικών διαφορικών εξισώσεων σε πολικές και κυλινδρικές συντεταγμένες.

Θεώρημα 6.5.5. (Ιδιότητες του μετασχηματισμού Hankel) Οι ακόλουθες ιδιότητες ικανοποιούνται από το μετασχηματισμό Hankel οποιασδήποτε τάξης ν , $\nu \geq 0$

(i) Ο μετασχηματισμός Hankel είναι ένας γραμμικός ολοκληρωτικός τελεστής, δηλαδή ισχύει

$$\mathcal{H}_\nu[af(r) + bg(r)] = a\mathcal{H}_\nu[f(r)] + b\mathcal{H}_\nu[g(r)],$$

για κάθε σταθερά a , b και κάθε $\nu \geq 0$.

(ii) Ο μετασχηματισμός Hankel ικανοποιεί την **ιδιότητα Parseval**, δηλαδή ισχύει

$$\int_0^\infty r f(r) g(r) dr = \int_0^\infty \lambda F_\nu(\lambda) G_\nu(\lambda) d\lambda,$$

όπου οι $F_\nu(\lambda)$, $G_\nu(\lambda)$ είναι οι μετασχηματισμοί Hankel τάξης ν , $\nu \geq 0$, των συναρτήσεων $f(r)$, $g(r)$, αντίστοιχα,

(iii) με την προϋπόθεση ότι ισχύει $rf(r) \rightarrow 0$, καθώς το $r \rightarrow 0$ και $r \rightarrow \infty$, ο μετασχηματισμός Hankel ικανοποιεί την ιδιότητα της παραγώγου

$$\mathcal{H}_n[f'(r)] = \frac{\lambda}{2n} [(n-1)F_{n+1}(\lambda) - (n+1)F_{n-1}(\lambda)], \quad n \in \mathbb{N}$$

(iv) με την προϋπόθεση ότι ισχύει $r \frac{df(r)}{dr} \rightarrow 0$, $rf(r) \rightarrow 0$, καθώς το $r \rightarrow 0$ και $r \rightarrow \infty$, ο μετασχηματισμός Hankel ικανοποιεί την ιδιότητα

$$\mathcal{H}_n \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{df(r)}{dr} \right) - \frac{n^2}{r^2} f(r) \right] = -\lambda^2 F_n(\lambda), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Απόδειξη Για την απόδειξη των παραπάνω ιδιοτήτων έχουμε τα ακόλουθα:

(i) Η απόδειξη είναι προφανής.

(ii) Για την ιδιότητα Parseval¹ ισχύουν τα ακόλουθα

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \lambda F_\nu(\lambda) G_\nu(\lambda) d\lambda &= \int_0^\infty \lambda F_\nu(\lambda) d\lambda \int_0^\infty r J_\nu(\lambda r) g_\nu(r) dr \\ &= \int_0^\infty r g(r) dr \int_0^\infty \lambda J_\nu(\lambda r) F_\nu(\lambda) d\lambda = \int_0^\infty r g(r) f(r) dr. \end{aligned}$$

(iii) Η απόδειξη γίνεται άμεσα με εφαρμογή του ορισμού και των υποθέσεων.

(iv) Κάνοντας χρήση του ορισμού του μετασχηματισμού Hankel της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες και της εξίσωσης Bessel (5.1), έχουμε τα ακόλουθα

$$\begin{aligned} &\mathcal{H}_n \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{df(r)}{dr} \right) - \frac{n^2}{r^2} f(r) \right\} \\ &= \int_0^\infty \frac{d}{dr} \left(r \frac{df(r)}{dr} \right) J_\nu(\lambda r) dr - \int_0^\infty \frac{n^2}{r^2} r f(r) J_\nu(\lambda r) dr \\ &= r \frac{df(r)}{dr} J_\nu(\lambda r) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \lambda J'_\nu(\lambda r) \frac{df(r)}{dr} dr - \int_0^\infty \frac{n^2}{r^2} [r f(r)] J_\nu(\lambda r) dr \\ &= -\lambda^2 \int_0^\infty [r f(r)] J_\nu(\lambda r) dr = -\lambda^2 F_n(\lambda). \quad \diamond \end{aligned}$$

Όπως θα φανεί στη συνέχεια οι παραπάνω ιδιότητες χρησιμοποιούνται ευρύτατα για την επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων ορισμένων σε πολικές ή κυλινδρικές συντεταγμένες. Ειδικά δε, για την τελευταία περίπτωση, όταν έχουμε αξονική συμμετρία.

6.5.2 Εφαρμογές στις Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

Παράδειγμα 6.5.6. (Τρισδιάστατη Εξίσωση Laplace - Αξονική Συμμετρία) Θεωρούμε την εξίσωση Laplace στις τρεις διαστάσεις με μια πηγή συγκεντρωμένη στον

¹Ο Parseval, Marc-Antoine des Chênes (27 Απριλίου, 1755-16, Αυγούστου του 1836) ήταν ένας Γάλλος μαθηματικός, που γεννήθηκε στην Rosières-aux-Salines, στη Γαλλία. Ως μοναρχικός ήταν αντίθετος με τη Γαλλική Επανάσταση, φυλακίστηκε το 1792 και λίγο αργότερα εγκατέλειψε τη χώρα, γιατί δημοσίευσε ποίηση που ασκούσε κριτική στην κυβέρνηση του Ναπολέοντα. Έθεσε πέντε φορές υποψηφιότητα στην Académie Française des Sciences (από το 1796 έως το 1828), όμως χωρίς επιτυχία. Στην εργασία «Mémoire sur les séries et sur l'intégration complète d'une équation aux différences partielles linéaires du second ordre, à coefficients constants», (April 5, 1799), εμφανίζεται το ομώνυμο θεώρημα, το οποίο όμως ποτέ δεν απέδειξε, αναφέροντας ότι είναι προφανές. Το αποτέλεσμα αυτό επεκτάθηκε περαιτέρω, και πάλι χωρίς την αναγκαία απόδειξη, σε μια άλλη εργασία του 1801.

7

Συναρτήσεις Green για Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις

Περιεχόμενα

- 7.1 Εισαγωγή.
- 7.2 Συναρτήσεις Green για Προβλήματα Συνοριακών Συνθηκών: Ορισμός, Ιδιότητες, 7.2.1 Προβλήματα.
- 7.3 Επίλυση Προβλημάτων Συνοριακών Συνθηκών με τη Βοήθεια των Συναρτήσεων Green: 7.3.1 Προβλήματα με Ομογενείς Συνοριακές Συνθήκες, 6.3.2 Μη-Ομογενείς Συνοριακές Συνθήκες, 7.3.3 Προβλήματα.
- 7.4 Τροποποιημένες Συναρτήσεις Green, 7.4.1 Κατασκευή της Λύσης: Α. Ομογενείς Συνοριακές Συνθήκες 7.4.2 Κατασκευή της Λύσης: Β. Μη Ομογενείς Συνοριακές Συνθήκες, 7.4.3 Προβλήματα.
- 7.5 Συναρτήσεις Green για Προβλήματα Αρχικών Συνθηκών, 6.5.1 Προβλήματα.
- 7.6 Βιβλιογραφικές Αναφορές.
- 7.7 Γενικά Προβλήματα.

«Thus number may be said to rule the whole world of quantity, and the four rules of arithmetic may be regarded as the complete equipment of the mathematician» **James Clerk Maxwell**

7.1 Εισαγωγή

Στις μέρες μας είναι ευρύτατα γνωστή η σπουδαιότητα προβλημάτων αρχικών και / ή συνοριακών συνθηκών συνήθων ή μερικών διαφορικών εξισώσεων τόσο στις φυσικές όσο και στις λοιπές εφαρμοσμένες επιστήμες. Στο Κεφάλαιο αυτό θα δοθούν οι γενικές αρχές και μερικά παραδείγματα μιας αναλυτικής μεθόδου επίλυσης τέτοιων προβλημάτων, η οποία βασίζεται στον καθορισμό μιας ειδικής συνάρτησης. Η συνάρτηση αυτή φέρει το όνομα του George Green¹, του ανθρώπου που πρώτος την εισήγαγε από τις αρχές του προπερασμένου αιώνα (1828).



Εικόνα 7.1: Green, George (1793 - 1841)

Παρόλη την παλαιότητα της η μέθοδος Green μόλις τις τελευταίες δεκαετίες κατορθώνει να ξεφύγει από το χώρο των θεωρητικών μαθηματικών και να χρησιμοποιηθεί ευρύτατα στις εφαρμογές. Βασικό παράγοντα αυτής της στροφής αποτελεί η ανάπτυξη της Αριθμητικής Ανάλυσης.

Η σπουδαιότητα της μεθόδου, εκτός των άλλων, έγκειται πρώτον στο γεγονός ότι, η διαφορική (συνήθης ή μερική) εξίσωση μετασχηματίζεται σε ολοκληρωτική, η επίλυση της οποίας είναι ευκολότερη και δεύτερον η παράσταση της λύσης φανερώνει τον τρόπο εξάρτησής της, τόσο από τις περιοριστικές συνθήκες (αρχικές και / ή συνοριακές), που συνοδεύουν το πρόβλημα, όσον και από την εξωτερική επίδραση (μη-ομογενής όρος).

Σε αυτή την ενότητα θα αναπτυχθεί η σχέση της συνάρτησης Green με προβλήματα

¹ Ο Green, George (14 Ιουλίου 1793-31 Μαΐου 1841) ήταν ένας Βρετανός Μαθηματικός και Φυσικός, ο οποίος έγραψε το δοκίμιο « *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism* » (1828). Το δοκίμιο εισάγει διάφορες σημαντικές έννοιες, μεταξύ των οποίων ένα θεώρημα παρόμοιο αυτού που σήμερα ονομάζουμε Θεώρημα του Green, την έννοια της συνάρτησης δυναμικού, όπως αυτή χρησιμοποιείται ως σήμερα στη Φυσική, και την έννοια αυτού που σήμερα ονομάζεται συνάρτηση Green. Ο Green ήταν πρώτος που δημιούργησε μια μαθηματική θεωρία - τη Θεωρία Δυναμικού- για τον Ηλεκτρισμό, το Μαγνητισμό, τις Ταλαντώσεις, την Κυματική και τη Θεωρία Ελαστικότητας. Αυτή η θεωρία αποτέλεσε τη βάση για την εργασία άλλων μεταγενεστέρων επιστημόνων, όπως ο James Clerk Maxwell, ο William Thomson, και άλλοι. Το έργο του σχετικά με τη Θεωρία Δυναμικού κινήθηκε παράλληλα με εκείνη του Gauss. Παρέμεινε άγνωστος ακόμα και στην Αγγλία, μέχρι και μετά το θάνατό του. Η βασική του εργασία, που παρουσιάστηκε το 1828 αγνοήθηκε μέχρι το 1850, όταν με τη φροντίδα του W. Thomson (Lord Kelvin) δημοσιεύτηκε και πάλιν. Το αξιοσημείωτο στην ιστορία της ζωής του George Green είναι το γεγονός ότι ήταν σχεδόν εντελώς αυτοδίδακτος. Έλαβε ένα περίπου έτος επίσημης σχολικής εκπαίδευσης, όταν ήταν παιδί, ηλικίας μεταξύ 8 και 9, τα υπόλοιπα χρόνια της παιδικής και εφηβικής ηλικίας του εργαζόταν ως φούρναρης και πέθανε σε ηλικία 48 ετών ως καθηγητής του Cajus College, στο Πανεπιστήμιο του Cambridge.

συνοριακών ή αρχικών συνθηκών συνήθων διαφορικών εξισώσεων.

7.2 Συναρτήσεις Green για Προβλήματα Συνοριακών Συνθηκών: Ορισμός, Ιδιότητες.

Θεωρούμε τη γραμμική μη ομογενή συνήθη διαφορική εξίσωση 2ης τάξης

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = f(x), \quad \alpha < x < \beta, \quad (2.1)$$

όπου υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις P, Q, R είναι ορισμένες και συνεχείς στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $P(x) \neq 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Για τις υποθέσεις, που αφορούν την εξωτερική επίδραση $f(x)$, θα επανέλθουμε αργότερα. Είναι γνωστό ότι, αν πολλαπλασιάσουμε την εξίσωση (2.1) με την παράσταση αυτοσυζυγοποίησης

$$p(x) = e^{\int \frac{Q(x)}{P(x)} dx},$$

τότε προκύπτει η αυτοσυζυγής διαφορική εξίσωση

$$\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy(x)}{dx} \right) + \frac{R(x)}{P(x)} p(x) y(x) = \frac{1}{P(x)} p(x) f(x), \quad \alpha < x < \beta.$$

Θέτοντας δε $q(x) =: \frac{R(x)p(x)}{P(x)}$ και $F(x) =: \frac{p(x)}{P(x)} f(x)$ έχουμε την αντίστοιχη **αυτοσυζυγή μορφή** (self adjoint form) της διαφορικής εξίσωσης (2.1)

$$L[y(x)] =: \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy(x)}{dx} \right) + q(x)y(x) = F(x), \quad \alpha < x < \beta, \quad (2.2)$$

όπου ο διαφορικός τελεστής $L[y(x)]$ ορίζεται από τη σχέση

$$L =: \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{d}{dx} \right) + q(x).$$



Εικόνα 7.2: Lagrange, Joseph - Louis (1736-1813)

όπου $a_{11}, \dots, a_{22}, M_1, M_2$ είναι δοσμένες σταθερές και τις υπόλοιπες, που ονομάζονται **μεικτές συνοριακές συνθήκες**. Μια χαρακτηριστική περίπτωση των μεικτών

Από τα παραπάνω είναι φανερό ότι κάθε γραμμική δευτεροβάθμια εξίσωση, για την οποία ισχύει $P(x) \neq 0$, μπορεί να έλθει σε αυτοσυζυγή μορφή. Θεωρούμε ότι το πρόβλημα (2.1) συνοδεύεται από συνοριακές συνθήκες, οι οποίες διακρίνονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες, τις **διαχωρισμένες συνοριακές συνθήκες** με γενική μορφή

$$\Sigma_1[y(\alpha)] =: a_{11}y'(\alpha) + a_{12}y(\alpha) = M_1, \quad (2.3)$$

$$\Sigma_2[y(\beta)] =: a_{21}y'(\beta) + a_{22}y(\beta) = M_2, \quad (2.4)$$

8

Συναρτήσεις Green για Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

Περιεχόμενα

- 8.1 Εισαγωγή.
- 8.2 Γενικευμένες Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών 7.2.1 Εισαγωγή - Ορισμοί - Ιδιότητες, 8.2.2 Τύποι Green στις 2 και 3 Διαστάσεις.
- 8.3 Προσδιορισμός της Συνάρτησης Green, 8.3.1 Μέθοδος Πλήρους Αναπτύγματος Ιδιοσυναρτήσεων, 8.3.2 Μέθοδος Μερικού Αναπτύγματος Ιδιοσυναρτήσεων, 7.3.3 Μέθοδος Διάσπασης, 8.3.4 Μέθοδος Ειδώλων ή Κατοπτρισμού Προβλήματα, 8.3.5 Προβλήματα.
- 8.4 Επίλυση Προβλημάτων Συνοριακών Συνθηκών, 8.4.1 Συνοριακά Προβλήματα Τύπου Dirichlet, 8.4.2 Συνοριακά Προβλήματα Τύπου Neumann, 8.4.3 Συνοριακά Προβλήματα Τύπου Robin ή Μεικτά, 8.4.4 Προβλήματα.
- 8.5 Επίλυση Προβλημάτων Αρχικών-Συνοριακών Συνθηκών, 8.5.1 Εξίσωση Θερμότητας, 8.5.2 Κυματική Εξίσωση, 8.5.3 Προβλήματα.
- 8.6 Βιβλιογραφικές Αναφορές.
- 8.7 Γενικά Προβλήματα.

«Mathematics is the tool specially suited for dealing with abstract concepts of any kind and there is no limit to its power in this field. For this reason a book on the new physics, if not purely descriptive of experimental work, must be essentially mathematical» **Paul Dirac**

8.1 Εισαγωγή

Σε αυτή την ενότητα θα οριστεί η συνάρτηση Green για προβλήματα συνοριακών συνθηκών ή αρχικών και συνοριακών συνθηκών μερικών διαφορικών εξισώσεων και θα μελετηθούν οι ιδιότητες αυτών. Έτσι θα καταστεί δυνατόν να γίνει ολοκληρωμένη αναπαράσταση της λύσης τέτοιων προβλημάτων με τη βοήθεια της συνάρτησης Green, όπου εμφανίζεται η σύνδεση της λύσης τόσο με τα δεδομένα (αρχικά και συνοριακά) καθώς και με τους τυχόν μη ομογενείς όρους.

Ιδιαίτερα χρήσιμες για τα παραπάνω είναι οι διάφορες μορφές της συνάρτησης δ - Dirac στις δύο και τρεις διαστάσεις. Αυτό θα είναι το αντικείμενο της επόμενης ενότητας.

8.2 Γενικευμένες Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών.

8.2.1 Εισαγωγή - Ορισμοί - Ιδιότητες

Η **διδιάστατη συνάρτηση δ -Dirac** $\delta(x - a, y - b)$ ορίζεται ως ο τελεστής, που απεικονίζει μια συνεχή συνάρτηση $f(x, y)$ ορισμένη και με συμπαγή φορέα γύρω από ένα σημείο (a, b) στο $f(a, b)$. Πιο συγκεκριμένα, η $\delta(x - a, y - b)$ ορίζεται από την ακόλουθη ολοκληρωτική σχέση

$$\delta(x - a, y - b)[f(x, y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a, y - b)f(x, y)dxdy = f(a, b). \quad (2.1)$$

Επειδή δε η επαναληπτική εφαρμογή της μονοδιάστατης συνάρτησης δ -Dirac δίδει

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a)\delta(y - b)f(x, y)dydx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a)f(x, b)dx = f(a, b),$$

έχουμε τον ακόλουθο εναλλακτικό ορισμό

$$\delta(x - a)\delta(y - b) = \delta(x - a, y - b). \quad (2.2)$$

Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει εύκολα ότι

$$\int \int_D \delta(x - a, y - b)f(x, y)dxdy = \begin{cases} f(a, b), & (a, b) \in D, \\ 0, & (a, b) \notin D, \end{cases} \quad (2.3)$$

για κάθε $D \subset \mathbb{R}^2$. Κατ' ανάλογο τρόπο ορίζεται η **τριδιάστατη συνάρτηση δ -Dirac** Συγκεκριμένα ισχύει στις τρεις διαστάσεις:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a, y - b, z - c)f(x, y, z)dxdydz = f(a, b, c), \quad (2.4)$$

όπου f είναι μια συνεχής συνάρτηση ορισμένη και με συμπαγή φορέα γύρω από το σημείο (a, b, c) . Επίσης με επαναληπτική εφαρμογή της μονοδιάστατης συνάρτησης δ -Dirac προκύπτει, όπως και στη διδιάστατη περίπτωση, η ταυτότητα

$$\delta(x - a, y - b, z - c) = \delta(x - a)\delta(y - b)\delta(z - c). \quad (2.5)$$

Γενικότερα η n **διαστάσεων συνάρτηση δ -Dirac**¹ ορίζεται από τη σχέση

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = f(a_1, \dots, a_n), \quad (2.6)$$

όπου f είναι μια συνεχής συνάρτηση ορισμένη και με συμπαγή φορέα γύρω από το σημείο $(a_1, \dots, a_n)$. Ακόμα, κατ' αναλογία με τα προηγούμενα έχουμε την ταυτότητα

$$\delta(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) = \delta(x_1 - a_1) \dots \delta(x_n - a_n). \quad (2.7)$$

Στην περίπτωση που το πεδίο ορισμού του υπό μελέτη προβλήματος δεν είναι ορθογώνιο και παρίσταται η ανάγκη έκφρασής του σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες, τότε θα πρέπει για τον ορισμό της αντίστοιχης συνάρτησης Green να γίνει χρήση της συνάρτησης Dirac στο αντίστοιχο καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων. Έχουμε λοιπόν τα παρακάτω αποτελέσματα

Θεώρημα 8.2.1. (Δύο Διαστάσεις) Έστω ότι το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων x_1, x_2 μετασχηματίζεται στο καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων ξ_1, ξ_2 μέσω των σχέσεων

$$x_1 = u(\xi_1, \xi_2), \quad x_2 = v(\xi_1, \xi_2), \quad (2.8)$$

όπου u, v αμφιμονοσήμαντες και συνεχώς διαφορίσιμες συναρτήσεις (αμφιδιαφορίσιμες) ορισμένες στο $\mathbb{R}^2$. Επίσης, υποθέτουμε ότι $\alpha_1 = u(\beta_1, \beta_2)$ και $\alpha_2 = v(\beta_1, \beta_2)$. Τότε ισχύει η σχέση

$$\delta(x_1 - \alpha_1)\delta(x_2 - \alpha_2) = |J|^{-1} \delta(\xi_1 - \beta_1)\delta(\xi_2 - \beta_2), \quad (2.9)$$

¹Ο Dirac, Paul Adrien Maurice (8 Αυγούστου του 1902-20 Οκτωβρίου, 1984) ήταν ένας Άγγλος Θεωρητικός Φυσικός, ο οποίος έκανε θεμελιώδεις συνεισφορές στην πρώιμη ανάπτυξη των περιοχών της κβαντομηχανικής και της κβαντικής ηλεκτροδυναμικής. Κατείχε την έδρα Lucasian των Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο του Cambridge, ήταν μέλος του Κέντρου Θεωρητικών Σπουδών στο Πανεπιστήμιο του Μαϊάμι, και πέρασε την τελευταία δεκαετία της ζωής του στο Florida State University. Μεταξύ των άλλων ανακαλύψεων, διατύπωσε την ομώνυμη εξίσωση του Dirac, που περιγράφει τη συμπεριφορά των φερμιονίων και πρόβλεψε την ύπαρξη της αντιύλης. Ο Dirac μοιράστηκε το βραβείο Νόμπελ Φυσικής για το 1933 με Erwin Schrödinger «για την ανακάλυψη νέων παραγωγικών μορφών της ατομικής θεωρίας». Έκανε επίσης έργο που αποτελεί τη βάση των σύγχρονων προσπαθειών για το συμβιβασμό της θεωρίας της Γενικής Σχετικότητας με την Κβαντομηχανική. Είχε θεωρηθεί από τους φίλους και τους συναδέλφους του ως ασυνήθιστο χαρακτήρα. Ο Albert Einstein είπε γι' αυτόν: «Αυτή η εξισορρόπηση στην ιλιγγιώδη πορεία μεταξύ ιδιοφυίας και τρέλας είναι απαίσιος». Η Μαθηματική ευφυΐα του, όμως, τον κατατάσσει ανάμεσα στους πιο σημαντικούς φυσικούς του 20ου αιώνα.

όπου $J = J[u, v](x_1, x_2) = \frac{\partial(u(\xi_1, \xi_2), v(\xi_1, \xi_2))}{\partial(\xi_1, \xi_2)}$ η Ιακωβιανή του μετασχηματισμού (2.8) και ισχύει ότι $J[u, v](x_1, x_2) \neq 0$, για κάθε $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Απόδειξη Από τη σχέση (2.1) γνωρίζουμε ότι θα ισχύει

$$\int \int \delta(x_1 - \alpha_1) \delta(x_2 - \alpha_2) f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = f(\alpha_1, \alpha_2).$$

Από το μετασχηματισμό στο καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων (2.8) συνεπάγεται ότι

$$\int \int \delta(u(\xi_1, \xi_2) - \alpha_1) \delta(v(\xi_1, \xi_2) - \alpha_2) f(u, v) |J| d\xi_1 d\xi_2 = f(\alpha_1, \alpha_2). \quad (2.10)$$

$$(2.11)$$

Έτσι προκύπτει η σχέση

$$\delta(u(\xi_1, \xi_2) - \alpha_1) \delta(v(\xi_1, \xi_2) - \alpha_2) |J| = \delta(\xi_1 - \beta_1) \delta(\xi_2 - \beta_2).$$

Άρα, επειδή ισχύει η σχέση $J[u, v](x_1, x_2) \neq 0$, για κάθε $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, θα έχουμε

$$\delta(x_1 - \alpha_1) \delta(x_2 - \alpha_2) = |J|^{-1} \delta(\xi_1 - \beta_1) \delta(\xi_2 - \beta_2)$$

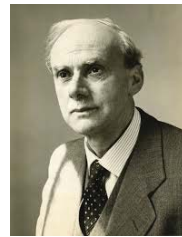
και το θεώρημα έχει αποδειχθεί. $\diamond$

Ορισμός 8.2.2. Το (β_1, β_2) ονομάζεται **ιδιάζον σημείο του μετασχηματισμού (2.8)**, αν ισχύει $J[u, v](\beta_1, \beta_2) = 0$.

Είναι προφανές ότι σ' αυτή την περίπτωση ο μετασχηματισμός των συντεταγμένων παύει πλέον να είναι αμφιμονοσήμαντος. Για παράδειγμα, στις πολικές συντεταγμένες $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ αντιστοιχεί η Ιακωβιανή $J = r$. Εδώ βλέπουμε ότι για $r = 0$ και θ οτιδήποτε, έχουμε $J(0, \theta) = 0$. Μια συντεταγμένη, όπως εδώ η θ , που είτε είναι πλειονότιμη ή απροσδιόριστη θα ονομάζεται **αγνοήσιμη συντεταγμένη**.

Υποθέτουμε ότι στον παραπάνω μετασχηματισμό (2.8) το σημείο $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$ είναι ιδιάζον, όπου η x_2 είναι αγνοήσιμη συντεταγμένη. Έτσι η συνάρτηση $f(\xi_1, \xi_2)$ θα εξαρτάται μόνο από το ξ_1 , δηλαδή $f(\xi_1, \xi_2) = f(\xi_1)$. Επομένως από τη σχέση (2.10) θα έχουμε

$$\begin{aligned} f(\alpha_1, \alpha_2) &= \int \int \delta(u - \alpha_1) \delta(v - \alpha_2) f(u, v) |J| d\xi_1 d\xi_2 \\ &= \int \int t(x_1) f(\xi_1, \xi_2) |J| d\xi_1 d\xi_2 = f(\beta_1). \end{aligned}$$



Εικόνα 8.1: Dirac, Paul Adrien Maurice (1902 - 1984)

Μέρος II

Μιγαδική Ανάλυση

«Philosophy is written in this grand book, which stands continually open to our gaze. But the book cannot be understood unless one first learns to comprehend the language and read the letters in which it is composed. It is written in the language of mathematics, and its characters are triangles, circles, and other geometrical figures without which it is humanly impossible to understand a single word of it; without these, one wanders about in a dark labyrinth.»

Galilei Galileo

9

Εισαγωγή στη Μιγαδική Ανάλυση

Περιεχόμενα

- 9.1 Ιστορική Αναδρομή στη Μιγαδική Ανάλυση.
- 9.2 Βασική Θεωρία της Μιγαδικής Ανάλυσης: 9.2.1 Μιγαδικό Επίπεδο - Βασικά Στοιχεία Μιγαδικών Αριθμών - Προβλήματα, 9.2.2 Ακολουθίες Μιγαδικών Αριθμών - Προβλήματα, 9.2.3 Μιγαδικές Συναρτήσεις: Όριο - Συνέχεια - Προβλήματα, 9.2.4 Τοπολογία Μιγαδικού Επιπέδου - Προβλήματα, 9.2.5 Συνέχεια - Ομοιόμορφη Συνέχεια - Προβλήματα.
- 9.3 Αναλυτικές (Ολόμορφες) Συναρτήσεις - Προβλήματα.
- 9.4 Στοιχειώδεις Αναλυτικές Συναρτήσεις: 9.4.1 Εκθετική Συνάρτηση - Προβλήματα, 9.4.2 Τριγωνομετρικές και Υπερβολικές Συναρτήσεις: Α. Μιγαδικές Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις - Προβλήματα, Β. Μιγαδικές Υπερβολικές Συναρτήσεις - Προβλήματα, Γ. Βασικές Τριγωνομετρικές - Υπερβολικές Σχέσεις - Προβλήματα, 9.4.3 Λογαριθμική Συνάρτηση - Προβλήματα, 9.4.4 Δυνάμεις Μιγαδικών Αριθμών - Προβλήματα.

«Οι Αριθμοί κυβερνούν τον κόσμο» **Πυθαγόρειοι**

«Mathematics is the queen of the sciences and number theory the queen of mathematics» **Carl Friedrich Gauss**

«Analysis owe its really significant successes of the last century not to the mysterious $\sqrt{-1}$, but to the fact that one has infinitely more freedom of mathematical movement if he lets quantities vary in a plane instead of a line» **Leopold Kronecker**

9.1 Ιστορική Αναδρομή στη Μιγαδική Ανάλυση

Σύντομη Ιστορική Αναδρομή: Πριν προχωρήσουμε στην ανάπτυξη των βασικών εισαγωγικών θεμάτων της Μιγαδικής Ανάλυσης, είναι σημαντικό -όχι μόνο από παιδαγωγικής πλευράς- να παρουσιασθούν οι κύριοι σταθμοί ανάπτυξης των πρώτων βημάτων της θεωρίας των Μιγαδικών Συναρτήσεων. Το 1484 στη Γαλλία ο *Nicolas Chuquet*¹ γράφει το έργο με τίτλο «*Triparty en la science des nombres*». Το δεύτερο ήμισυ του τελευταίου τμήματος της *Triparty* είναι αφιερωμένο στην επίλυση εξισώσεων. Θεωρώντας εξισώσεις της μορφής $ax^m + bx^{m+n} = cx^{m+2n}$, όπου οι συντελεστές και οι εκθέτες είναι συγκεκριμένοι θετικοί αριθμοί, ο Chuquet ανακάλυψε ότι μερικές από αυτές είχαν φανταστικές λύσεις. Στις περιπτώσεις αυτές απλώς πρόσθεσε: «*Tel nombre est ineperible*» (Αυτού του είδους ο αριθμός είναι αδύνατος).



Εικόνα 9.1: Chuquet, Nicolas (1445 - 1500)

Το 1545 δημοσιεύεται η *Ars Magna* του *Cardano Gerolamo*² (1501- 1576). Χάρη στη δημοσίευση αυτή γίνεται ευρέως γνωστή η επίλυση της τριτοβάθμιας, αλλά και της τεταρτοβάθμιας εξίσωσης. Ο Cardano δεν αποδέχτηκε τις τετραγωνικές ρίζες των αρνητικών αριθμών και συμπέρανε ότι το αποτέλεσμά του στην περίπτωση αυτή ήταν *μυστηριώδες και άχρηστο*. Οι μεταγενέστεροι συγγραφείς, βέβαια, έδειξαν ότι τα αποτελέσματα αυτά μπορεί να ήταν μυστηριώδη, αλλά



Εικόνα 9.2: Cardano, Gerolamo (1501 - 1576)

¹Chuquet, Nicolas (1445 ή 1455, Paris, France-1488 ή 1500, Lyon, France) Γάλλος μαθηματικός με πτυχίο στην Ιατρική. Το 1484, ο Chuquet έγραψε μια τριλογία «*Triparty en la science des nombres*», το οποίο παρέμεινε αδημοσίευτο όσο ζούσε. Το μεγαλύτερο μέρος του, ωστόσο, είχε αντιγραφεί, χωρίς αναφορά στην πηγή του, από τον Estienne de La Roche στο βιβλίο του *L'Arithmetique* (1520). Στην δεκαετία του 1870 ο λόγιος Aristide Marre ανακάλυψε το χειρόγραφο του N. Chuquet και το δημοσίευσε το 1880. Το χειρόγραφο περιείχε ιδιόγραφες σημειώσεις του Roche! Στο 2ο μέρος εισάγει, για πρώτη φορά, το σύμβολο της τετραγωνικής ρίζας των αριθμών χρησιμοποιώντας ακόμα και τη σύνθετη ρίζα $\sqrt{a + \sqrt{b}}$ καθώς και την κυβική ρίζα $\sqrt[3]{x}$. Στο 3ο μέρος, όπου είναι Άλγεβρα, εισάγει άγνωστους μέχρι τότε συμβολισμούς για το εκθετικό, όπου περικλείονται αρνητικές δυνάμεις και το 0, στην εξίσωση $x^0 = 1$.

²Cardano, Gerolamo (or Girolamo, or Geronimo) (24 September 1501-21 September 1576). Ιταλός πολυμαθής μαθηματικός, φυσικός, βιολόγος, χημικός, αστρονόμος, φιλόσοφος, θεολόγος, συγγραφέας και τζογαδόρος! Έχει αναγνωρισθεί ως ένας από τους θεμελιωτές της θεωρίας των Πιθανοτήτων και ο πρώτος που διατύπωσε το Διωνυμικό Θεώρημα, θέματα που αναπτύσσονται στο πολύ σημαντικό βιβλίο του «*Opus Novum de proportionibus*» (1570). Έγραψε πάνω από 200 εργασίες σε όλα τα πεδία ενδιαφέροντος του. Σήμερα, είναι γνωστός για τα επιτεύγματά του στην άλγεβρα. Έκανε την πρώτη συστηματική χρήση των αρνητικών αριθμών και αναγνώρισε την ύπαρξη φανταστικών αριθμών.

καθόλου άχρηστα! Πρέπει να επισημάνουμε ότι οι αλγεβριστές απέφευγαν τους φανταστικούς αριθμούς, ισχυριζόμενοι ότι η $x^2 + 1 = 0$ δεν έχει λύση, σύμφωνα με τους αρχαίους Έλληνες.



Εικόνα 9.3: Wallis, John (1616 - 1703)

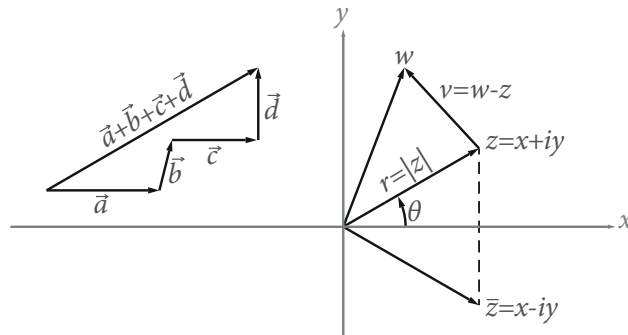
Μετά τη λύση της κυβικής εξίσωσης τα πράγματα άλλαξαν ριζικά. Μια κυβική εξίσωση έχει οπωσδήποτε μια πραγματική ρίζα τουλάχιστον. Αλλά ακόμα και στην περίπτωση που οι τρεις ρίζες μιας τριτοβάθμιας εξίσωσης είναι πραγματικές και μη μηδενικές, ο τύπος *Cardano - Tartaglia* οδηγεί αναπόφευκτα σε τετραγωνικές ρίζες αρνητικών αριθμών. Έτσι έπρεπε πλέον να ληφθούν υπόψη οι φανταστικοί αριθμοί, ακόμη κι αν κάποιος αποφάσιζε να περιοριστεί στις πραγματικές ρίζες. Οι μιγαδικοί αριθμοί δεν επινοήθηκαν απλά ως «γενίκευση για τη γενίκευση» («*l' art pour l' art*») αλλά χρησίμευσαν σε κάτι σημαντικό, δηλαδή την επίλυση εξισώσεων τρίτου και τετάρτου βαθμού.

Ο *Albert Girard*¹ το 1629, στο βιβλίο του «*Invention nouvelle en l' Algebre*» («*Νέα εφεύρεση στην Άλγεβρα*») διατύπωσε σαφώς τις σχέσεις ανάμεσα στις ρίζες και στους συντελεστές, γιατί αποδέχθηκε την ύπαρξη αρνητικών και φανταστικών ριζών. Γύρω στα 1693 ο Γερμανός μαθηματικός και φιλόσοφος *Gottfried Leibniz* αναφέρεται στους μιγαδικούς αριθμούς. Παρ' όλα αυτά ο *Leibnitz* δεν έγραψε τις τετραγωνικές ρίζες των μιγαδικών αριθμών στην κανονική μιγαδική μορφή.

Ο *Leonard Euler* (1707-1783), ενώ το 1770 διετείνετο ότι «επειδή όλοι οι αποδεκτοί αριθμοί είναι είτε μεγαλύτεροι ή μικρότεροι ή ίσοι με το μηδέν, είναι φανερό ότι η τετραγωνική ρίζα ενός αρνητικού αριθμού δεν μπορεί να περιληφθεί στους αριθμούς», εντούτοις γύρω στα 1777 αναγκάζεται να εισάγει σε ένα χειρόγραφο του το σύμβολο $i = \sqrt{-1}$, το οποίο βέβαια δημοσιεύθηκε το 1794. Ίσως να το χρησιμοποίησε τόσο αργά, επειδή στα προηγούμενα έργα του είχε χρησιμοποιήσει το i για να παραστήσει έναν «άπειρα μεγάλο αριθμό», για τον οποίο ο *John Wallis*² είχε χρησιμοποιήσει το σύμβολο ∞ .

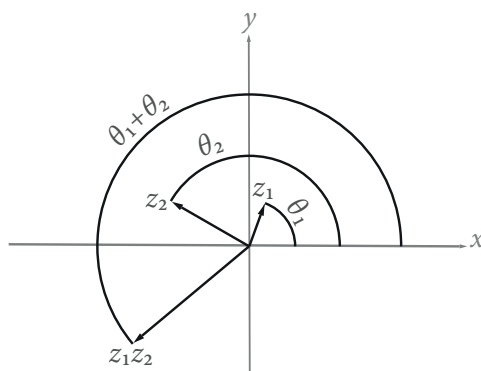
¹Girard, Albert (1595, Saint-Mihiel, France-8 December 1632, Leiden) Γάλλος μαθηματικός, που σπούδασε στο Πανεπιστήμιο του Leiden Ολλανδία. Είχε πρώιμες ιδέες για το «Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας» και έδωσε ένα εμπειρικό ορισμό για τους αριθμούς Fibonacci. Ήταν ο πρώτος που χρησιμοποίησε τα σύμβολα $\sin$, $\cos$ και $\tan$ στην Τριγωνομετρία. Ο Girard ήταν ο πρώτος, που διατύπωσε, στα 1632, την πρόταση ότι κάθε πρώτος αριθμός της μορφής 1 modulus 4 ήταν το άθροισμα δύο τετραγώνων (βλέπε το Θεώρημα Fermat για το άθροισμα δύο τετραγώνων).

²Wallis, John (23 November 1616-28 October 1703) Ήταν Άγγλος μαθηματικός, στον οποίο πιστώνουν μέρος της ανάπτυξης του Απειροστικού Λογισμού. Μεταξύ των ετών 1643 και 1689 υπηρέτησε ως κρυπτογράφος στο Κοινοβούλιο και αργότερα στα Ανάκτορα. Σε αυτόν πιστώνουν την χρησιμοποίηση του συμβόλου ∞ για το άπειρο. Ομοίως αυτός χρησιμοποίησε το σύμβολο $1/\infty$ για το απειροελάχιστο. Ο αστεροειδής 31982 John Wallis έχει το όνομα του.



Σχήμα 9.1: Πρόσθεση & Αφαίρεση στους Μιγαδικούς Αριθμούς - Πολικές Συντεταγμένες - Μιγαδικός Συζυγής

Σε πολικές συντεταγμένες r, θ ο μιγαδικός αριθμός $z = a + ib$ γράφεται $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, όπου το **μέτρο** ή **απολύτη τιμή** του z είναι $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$ και θ η **γωνία** ή **πλάτος** (συμβολισμός $\text{amp } z$) ή **όρισμα** (συμβολισμός $\arg z$) του z ορίζεται $\theta = \arg z = \sin^{-1} \frac{b}{r} = \cos^{-1} \frac{a}{r} = \tan^{-1} \frac{b}{a}$. Με τη βοήθεια των πολικών συντεταγμένων υπολογίζουμε το **γινόμενο** δύο μιγαδικών αριθμών. Συγκεκριμένα έχουμε, $z_1 \times z_2 = (a_1 + ib_1) \times (a_2 + ib_2) = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \times r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$. Παρατηρούμε λοιπόν ότι το **όρισμα** του γινομένου είναι το **άθροισμα** των ορισμάτων των δύο αριθμών, ενώ το **μέτρο** του είναι το **γινόμενο** των μέτρων, δηλαδή $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$ (βλέπε Σχήμα 9.2).



Σχήμα 9.2: Πολλαπλασιασμός Μιγαδικών Αριθμών

Από την τελευταία σχέση επαγωγικά έχουμε:

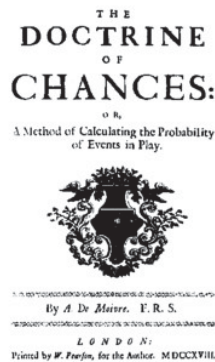
(Α) **Τύπος De Moivre**¹. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$.



Εικόνα 9.6: De Moivre, Abraham (1667-1754)

(Β) **(Ρίζα Μιγαδικού Αριθμού)** Για την n -τάξης ρίζα του μιγαδικού αριθμού $Z = R(\cos \Theta + i\sin \Theta)$ αποδεικνύεται το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Πρόταση 9.2.1. (Ρίζα Μιγαδικού Αριθμού) Ο μιγαδικός αριθμός $Z = R(\cos \Theta + i\sin \Theta)$ έχει n ακριβώς ρίζες n -τάξης. Συγκεκριμένα, οι n ρίζες έχουν όλες μέτρο $\sqrt[n]{R}$ και γωνίες $\theta_1 = \frac{\Theta}{n}$, $\theta_2 = \frac{\Theta+2\pi}{n}$, $\theta_3 = \frac{\Theta+4\pi}{n}$, ..., $\theta_n = \frac{\Theta+(n-1)2\pi}{n}$.



Εικόνα 9.7: De Moivre: Doctrine of Chance

$Z^{1/n}$. Αν $x \in \mathbb{R}^+$, τότε ο $\sqrt[n]{x}$ παριστάνει τη θετική τετραγωνική ρίζα του x (γωνία $\theta_1 = 0$) και ο $-\sqrt[n]{x}$ παριστάνει την αρνητική τετραγωνική ρίζα του x (γωνία $\theta_2 = \pi$), αφού εδώ έχουμε $\Theta = 0$.

Απόδειξη. Για την απόδειξη της Πρότασης θα λύσουμε την εξίσωση $w = Z^{1/n}$ ή την $Z = w^n$. Θέτουμε $w = r(\cos \phi + i\sin \phi)$, οπότε θα ισχύει η σχέση

$$w^n = r^n\{\cos(n\phi) + i\sin(n\phi)\} = R(\cos \Theta + i\sin \Theta).$$

Έτσι προκύπτουν οι σχέσεις $R = r^n$ ή $|w| = r = \sqrt[n]{R}$ και $n\theta_k = \Theta + 2k\pi$ ή $\arg w = \theta_k = \frac{\Theta+2k\pi}{n}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. Άρα πράγματι υπάρχουν n το πλήθος και διάφορες μεταξύ τους n -ιστές ρίζες του μιγαδικού αριθμού Z . $\diamond$

Από αυτές τις n το πλήθος n -ιστές ρίζες, αυτή με τη μικρότερη γωνία, ονομάζεται **κύρια ρίζα** του μιγαδικού αριθμού Z και συμβολίζεται με $\sqrt[n]{Z}$ ή

¹De Moivre, Abraham (26 May 1667, Vitry-le-François, Champagne, France - 27 November 1754, London, England). Γάλλος μαθηματικός, ο οποίος εξορίστηκε και έζησε όλη τη ζωή του στο Λονδίνο, λόγω θρησκευτικών διώξεων στη Γαλλία. Διατύπωσε τον ομώνυμο τύπο που συνδέει μιγαδικές με τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Επίσης παρουσίασε έργο στη Θεωρία Πιθανοτήτων, στις κανονικές κατανομές, στη Θεωρία Αριθμών (αριθμοί Fibonacci) και διατύπωσε το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα -από τους ακρογωνιαίους λίθους της Θεωρίας Πιθανοτήτων. Έγραψε το βιβλίο «*The doctrine of chances: or, a method for calculating the probabilities of events in play*» (1718, 1738, 1756), το οποίο εκτιμήθηκε ιδιαίτερώς τόσο από την ακαδημαϊκή κοινότητα όσο και από τους τζογαδόρους(!). Υπήρξε σύγχρονος και φίλος των Isaac Newton, Edmond Halley και James Stirling. Το 1697 εξελέγη Fellow of the Royal Society of London, αν και δεν έλαβε ποτέ καθηγητική θέση σε Πανεπιστήμιο.

Παράδειγμα 9.2.2. Να βρεθούν όλες οι λύσεις της $z = (2 - i)^{-2/3}$.

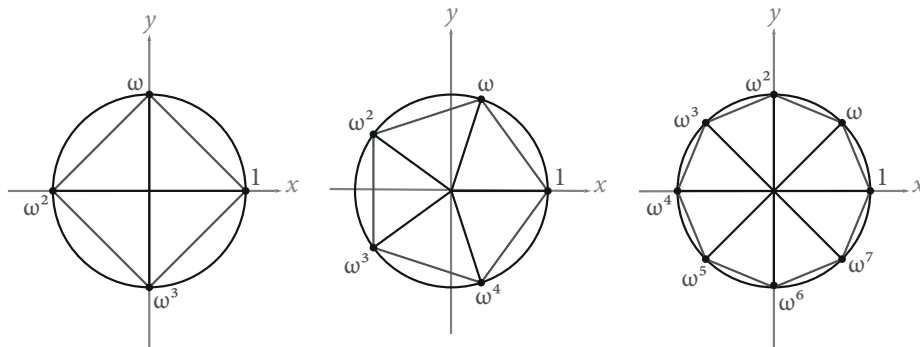
Λύση. Ισχύουν τα ακόλουθα:

$$z = (2 - i)^{-2/3} = \left(\frac{1}{2 - i} \right)^{2/3} = \left(\frac{2}{5} + i \frac{1}{5} \right)^{2/3} = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{5} + i \frac{1}{5} \right)^2} = \sqrt[3]{\frac{3}{25} + i \frac{4}{25}}.$$

Ο αριθμός $z_1 = \frac{3}{25} + i \frac{4}{25}$ έχει $|z_1| = \frac{1}{5}$ και $\theta = \arg z_1 = \tan^{-1} \frac{4}{3}$. Επομένως οι τιμές είναι $z_k = \left(\frac{1}{5} \right)^{1/3} \left\{ \cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 2k\pi}{3} \right) \right\}$, για $k = 0, 1, 2$.

Παράδειγμα 9.2.3. Να βρεθούν όλες οι n -ισστές ρίζες της μονάδας.

Λύση. Οι n -ισστές ρίζες της μονάδας είναι οι μιγαδικοί αριθμοί $z_k = \cos \left(\frac{2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{2k\pi}{n} \right)$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, αφού εδώ έχουμε $\theta = 0$. Οι ρίζες αυτές σχηματίζουν ένα κανονικό πολύγωνο με n πλευρές, το οποίο είναι εγγεγραμμένο στο μοναδιαίο κύκλο. Δείτε τις περιπτώσεις $n = 4, 5, 8$ στο Σχήμα 9.3.



Σχήμα 9.3: Οι n -ισστές Ρίζες της Μονάδας, $n = 4, 5, 8$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ για την Ενότητα 9.2.1

[1] Να έλθουν στη μορφή $x + iy$ οι ακόλουθοι μιγαδικοί αριθμοί:

(a) $(4 - 7i)(-5 + 7i)$, (b) $(1 - i)^3$, (c) $\frac{8+2i}{3+i}$, (d) $\frac{5}{2i}$, (e) $(7 - 2i)(-9 + 5i)$

(f) $\frac{z-a}{z+a}$, $a \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$.

[2] Να βρεθούν όλοι οι μιγαδικοί αριθμοί $z = x + iy$ έτσι ώστε $z^2 + z + 1 = 0$.

[3] Να αποδειχθεί ότι αν $zw = 0$ τότε είτε $z = 0$ ή $w = 0$.

[4] Να αποδειχθεί ότι για κάθε $z, w \in \mathbb{C}$ ισχύει:

a) $\overline{zw} = \overline{z} \overline{w}$, b) $\left(\frac{z}{w} \right) = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$, c) $||z| - |w|| \leq |z - w|$, d) $|zw| = |z||w|$,

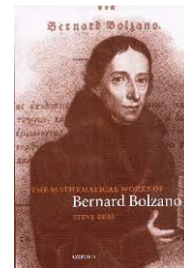
Απόδειξη. Έστω $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = m$. Το Λήμμα 9.2.6 συνεπάγεται ότι, δοθέντων θετικών ακεραίων i, n_i για τους οποίους έχουμε $|a_{n_i} - m| < \frac{1}{i}$, υπάρχει θετικός ακέραιος $k_{i+1} > k_{i+1}$ για το οποίο $|a_{n_{i+1}} - m| < \frac{1}{i+1}$. Έτσι κατασκευάζεται αύξουσα ακολουθία θετικών ακεραίων $n_1, n_2, n_3, \dots$, έτσι ώστε $|a_{n_i} - m| < \frac{1}{i}$, για όλα τα $i \in \mathbb{N}$. Τότε η $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots$, είναι μια υπακολουθία της $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$, η οποία συγκλίνει στο άνω όριο της ακολουθίας. Ανάλογα χειριζόμαστε και την περίπτωση $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$. $\diamond$

Το επόμενο αποτέλεσμα των Bolzano¹-Weierstrass αποτελεί άμεση συνέπεια του προηγούμενου Λήμματος.

Θεώρημα 9.2.8. (Θεώρημα Bolzano-Weierstrass) Κάθε φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία.

Θεώρημα 9.2.9. (Θεώρημα Bolzano-Weierstrass για Μιγαδικές Ακολουθίες) Κάθε φραγμένη ακολουθία μιγαδικών αριθμών έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία.

Απόδειξη. Έστω η φραγμένη ακολουθία μιγαδικών αριθμών $z_1, z_2, z_3, \dots$, όπου για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $z_n = a_n + ib_n$, $a_n, b_n \in \mathbb{R}$. Το Θεώρημα Bolzano - Weierstrass (για πραγματικές ακολουθίες) 9.2.8, διασφαλίζει την ύπαρξη μιας υπακολουθίας $z_{n_1}, z_{n_2}, z_{n_3}, \dots$, της αρχικής ακολουθίας έτσι ώστε η ακολουθία των πραγματικών μερών $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots$, να συγκλίνει. Μια δεύτερη εφαρμογή του Θεωρήματος 9.2.8 μας επιτρέπει να αντικαταστήσουμε την τελευταία υπακολουθία με μια νέα υπακολουθία ώστε των φανταστικών μερών $b_{n_1}, b_{n_2}, b_{n_3}, \dots$, να συγκλίνει επίσης. Έτσι αποδεικνύουμε τελικά ότι η $z_{n_1}, z_{n_2}, z_{n_3}, \dots$, αποτελεί μια συγκλίνουσα υπακολουθία της αρχικής $z_1, z_2, z_3, \dots$, σύμφωνα με το Λήμμα 9.2.1. $\diamond$



Εικόνα 9.8: Bolzano, Bernhard (1781-1848)

Ορισμός 9.2.10. (Ακολουθία Cauchy) Μια ακολουθία μιγαδικών αριθμών $z_1, z_2, z_3, \dots$, ονομάζεται **ακολουθία Cauchy**, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, έτσι ώστε $|z_n - z_m| < \varepsilon$, για κάθε $m, n \geq n_0$.

Λήμμα 9.2.11. Κάθε μιγαδική ακολουθία Cauchy είναι φραγμένη.

Απόδειξη. Έστω η $z_1, z_2, z_3, \dots$, μια ακολουθία Cauchy. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, έτσι ώστε $|z_n - z_m| < 1$. Ειδικά ισχύει $|z_n| \leq |z_{n_0}| + 1$, για $n \geq n_0$. Επομένως

¹Bolzano, Bernhard Placidus Johann Nepomuk (5 October 1781-18 December 1848). Βοημός μαθηματικός, λογικός, φυσικός, φιλόσοφος, θεολόγος και καθολικός ιερέας Ιταλικής καταγωγής, γνωστός επίσης για τις αντιμιλιταριστικές του απόψεις! Ο Bolzano έγραφε στα γερμανικά, που ήταν η μητρική του γλώσσα. Έγινε καθηγητής στο πανεπιστήμιο της Πράγας στην έδρα της «Φιλοσοφίας των Θρησκειών» (!) (1805), από όπου το 1819 διώχτηκε και εξορίστηκε στην επαρχία μέχρι το 1842. Το μεγαλύτερο μέρος του έργου του έγινε γνωστό και εκτιμήθηκε σημαντικά μετά το θάνατο του.

$|z_n| \leq M$, για $n \in \mathbb{N}$, $B = \max\{|z_1|, |z_2|, \dots, |z_{n_0-1}|, |z_{n_0}| + 1$ και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. $\diamond$

Θεώρημα 9.2.12. (Κριτήριο Σύγκλισης Cauchy ή Γενική Αρχή Σύγκλισης) Μια ακολουθία μιγαδικών αριθμών είναι συγκλίνουσα αν και μόνο αν είναι ακολουθία Cauchy.

Απόδειξη. (i) Ευθύ: Έστω η συγκλίνουσα ακολουθία μιγαδικών αριθμών $z_1, z_2, z_3, \dots$, και έστω ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = p$. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, έτσι ώστε $|z_n - p| < \frac{\varepsilon}{2}$, για κάθε $n \geq n_0$. Έτσι για $n \geq n_0$ $m \geq n_0$, θα ισχύει $|z_n - p| < \frac{\varepsilon}{2}$ και $|z_m - p| < \frac{\varepsilon}{2}$, δηλαδή

$$|z_n - z_m| = |(z_n - p) - (z_m - p)| \leq |z_n - p| + |z_m - p| < \varepsilon.$$

Άρα η $z_1, z_2, z_3, \dots$, είναι ακολουθία Cauchy.

(ii) Αντίστροφο: Έστω η ακολουθία Cauchy των μιγαδικών αριθμών $(z_n)_{n=1}^\infty$. Από το Λήμμα 9.2.11 η ακολουθία αυτή είναι φραγμένη. Επομένως, από το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass¹ 9.2.9 υπάρχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία $(z_{n_i})_{i=1}^\infty$. Έστω δε ότι $\lim_{i \rightarrow \infty} z_{n_i} = p$.

Θα αποδείξουμε ότι η ακολουθία $(z_n)_{n=1}^\infty$ η ίδια συγκλίνει στο p . Πράγματι, για δοθέν $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, έτσι ώστε $|z_n - z_m| < \frac{\varepsilon}{2}$, για κάθε $m, n \geq n_0$. Επιλέγουμε $j \in \mathbb{N}$ αρκετά μεγάλο ώστε να ισχύει $n_j \geq n_0$ και $|z_{n_j} - p| < \frac{\varepsilon}{2}$. Τότε ισχύει:

$$|z_n - p| \leq |z_n - z_{n_j}| + |z_{n_j} - p| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

για κάθε $n \geq n_0$, δηλαδή $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = p$. $\diamond$

Προβλήματα για την ΥποΕνότητα 9.2.2



Εικόνα 9.9: Weierstrass, Karl (1815-1897)

¹Weierstrass, Karl Theodor Wilhelm (31 October 1815-19 February 1897). Γερμανός μαθηματικός, ο οποίος αναφέρεται συχνά ως «ο πατέρας της Σύγχρονης Ανάλυσης». Εγκατέλειψε το University of Bonn χωρίς να πάρει πτυχίο, όπου είχε σταλεί από την οικογένεια του για να σπουδάσει Οικονομικά και Νομική, συνέχισε όμως τη μελέτη του στα μαθηματικά στο University of Münster. Δούλεψε σε Λύκειο ως καθηγητής Μαθηματικών, Φυσικής, Βοτανικής και γυμναστικής. Το 1856 έγινε καθηγητής στο Technical University of Berlin και το 1864 μετακινήθηκε στο Humboldt Universität zu Berlin. Ο Weierstrass διατύπωσε τον ορισμό της συνέχειας μιας συνάρτησης καθώς και την έννοια της ομοιόμορφης σύγκλισης ακολουθίας συναρτήσεων, τα οποία χρησιμοποίησε για να αποδείξει τα θεωρήματα Bolzano-Weierstrass και Heine-Borel.

[7] Να αποδειχθεί ότι δεν ορίζεται το $\lim_{z \rightarrow 0} [xy/(x^2 + y^2)]$.

[8] Να αποδειχθεί ότι δεν ορίζεται το $\lim_{z \rightarrow 0} [x^2y/(x^4 + y^2)]$, αν και η συνάρτηση αυτή προσεγγίζει το ίδιο όριο κατά μήκος κάθε ευθείας που περνά από την αρχή.

[9] Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, με $z = x + iy$, που ορίζεται από τον τύπο

$$f(z) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{y}, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0, \end{cases}$$

Να αποδειχθεί ότι $\lim_{y \rightarrow 0} [\lim_{x \rightarrow 0} f(z)]$ και $\lim_{x \rightarrow 0} f(z)$ υπάρχουν και είναι ίσα, αλλά το $\lim_{x \rightarrow 0} [\lim_{y \rightarrow 0} f(z)]$ δεν υπάρχει!

[10] Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, με $z = x + iy$, που ορίζεται από τον τύπο

$$f(z) = \frac{(x + y)^2}{x^2 + y^2}.$$

Να αποδειχθεί ότι $\lim_{y \rightarrow 0} [\lim_{x \rightarrow 0} f(z)] = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 0} [\lim_{y \rightarrow 0} f(z)] = 1$, αλλά το $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$ δεν υπάρχει!

[11] Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, που ορίζεται από τον τύπο

$$f(z) = \frac{z + 1}{z^2 + 3z + 2},$$

έχει όριο, καθώς το $z \rightarrow -1$.

[12] Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, με $z = x + iy$, που ορίζεται από τον τύπο

$$f(z) = \frac{x^2 - x + y^2}{(x - 1)^2 + y^2} + \frac{i}{(x - 1)^2 + y^2},$$

είναι συνεχής σε κάθε πεπερασμένο σημείο του χώρου $\mathbb{C}$ εκτός του σημείου $z = 1$.

9.2.4 Τοπολογία Μιγαδικού Επιπέδου

Ορισμός 9.2.28. (Ανοικτό Σύνολο - Ανοικτός Δίσκος) Ένα υποσύνολο A του μιγαδικού επιπέδου $\mathbb{C}$ ονομάζεται **ανοικτό σύνολο** αν και μόνο αν, δοθέντος ενός στοιχείου $z \in A$, υπάρχει $\delta > 0$, έτσι ώστε $D(z, \delta) \subset A$, όπου $D(z, \delta)$ είναι ο **ανοικτός δίσκος** κέντρου z και ακτίνας δ , δηλαδή $D(z, \delta) = \{v \in \mathbb{C} : |z - v| < \delta\}$. Σημειώνουμε ότι κατά σύμβαση το κενό σύνολο θεωρείται ως ένα ανοικτό υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου.

Ορισμός 9.2.29. (Γεωμετρία Συνόλου) Έστω το τυχαίο υποσύνολο A του μιγαδικού επιπέδου $\mathbb{C}$. (α) Ονομάζεται **εσωτερικό** του συνόλου A -συμβολίζεται δε με $\overset{\circ}{A}$ -

το σύνολο των μιγαδικών σημείων $z \in A$, για τα οποία υπάρχει $\delta > 0$, έτσι ώστε $D(z, \delta) \subset A$. (β) Ονομάζεται **εξωτερικό** του συνόλου A το σύνολο των μιγαδικών σημείων $z \in \mathbb{C}$, τα οποία δεν ανήκουν στο σύνολο A . (γ) Ονομάζεται **συνοριακό σημείο** του συνόλου A κάθε σημείο $z \in \mathbb{C}$, αν κάθε ανοικτός δίσκος με κέντρο το z περιέχει σημεία από το εσωτερικό και το εξωτερικό του A . Το σύνολο των συνοριακών σημείων του A συνιστούν το **σύνορο** του A - συμβολισμός ∂A .

Παράδειγμα 9.2.30. Έστω $v \in \mathbb{R}$ και $H_1 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > c\}$. Δοθέντος $w \in H_1$, τότε $\delta = \operatorname{Re} w - c > 0$. Όμως $\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} w > -|z - w|$, για όλους τους μιγαδικούς αριθμούς z , επομένως $\operatorname{Re} z > c$ για όλους τους μιγαδικούς αριθμούς z , που ικανοποιούν τη σχέση $|z - w| < \delta$, δηλαδή $D(w, \delta) \subset H_1$. Επομένως το σύνολο H_1 είναι ένα ανοικτό υποσύνολο στο μιγαδικό επίπεδο. Με την ίδια διαδικασία μπορούμε να αποδείξουμε ότι τα ακόλουθα σύνολα είναι επίσης ανοικτά στο $\mathbb{C}$: $H_2 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < c\}$, $H_3 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < c\}$ και $H_4 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > c\}$.

Λήμμα 9.2.31. Για κάθε μιγαδικό αριθμό z και κάθε θετικό αριθμό r ο δίσκος $D(z, r)$ είναι ένα ανοικτό σύνολο στο μιγαδικό επίπεδο $\mathbb{C}$. Επίσης το εσωτερικό $\dot{A}$ ενός συνόλου A είναι πάντα ένα ανοικτό σύνολο στο μιγαδικό επίπεδο $\mathbb{C}$.

Απόδειξη. Έστω $w \in D(z, r)$ και $\delta = r - |z - w| > 0$, αφού $r > |z - w|$. Επιπλέον, αν $v \in D(z, r)$, τότε $|v - w| < |v - z| + |z - w| < \delta + |z - w| = r$, που σημαίνει ότι $v \in D(z, r)$. Επομένως, $D(w, \delta) \subset D(z, r)$, δηλαδή ο δίσκος $D(z, r)$ είναι ένα ανοικτό σύνολο στο μιγαδικό επίπεδο $\mathbb{C}$. Άμεση εφαρμογή της παραπάνω διαδικασίας στο εσωτερικό $\dot{A}$ ενός τυχαίου συνόλου A στο μιγαδικό επίπεδο $\mathbb{C}$ μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το $\dot{A}$ είναι ανοικτό σύνολο. $\diamond$

Λήμμα 9.2.32. Για κάθε μιγαδικό αριθμό z και κάθε θετικό αριθμό r ο **εξωτερικός δίσκος** $\bar{D}(z, r) = \{v \in \mathbb{C} : |z - v| > r\}$ είναι ένα ανοικτό σύνολο στο μιγαδικό επίπεδο $\mathbb{C}$.

Απόδειξη. Η απόδειξη ακολουθεί τα βήματα της αντίστοιχης του προηγούμενου Λήμματος 9.2.31. $\diamond$

Πρόταση 9.2.33. (Ανοικτό Σύνολο - Ιδιότητες) Το σύνολο των ανοικτών συνόλων του μιγαδικού επιπέδου έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

- (α) Το κενό σύνολο $\emptyset$ και όλο το μιγαδικό επίπεδο είναι ανοικτά σύνολα,
- (β) Η ένωση οποιασδήποτε συλλογής ανοικτών συνόλων είναι ένα ανοικτό σύνολο,
- (γ) Η τομή οποιασδήποτε πεπερασμένης συλλογής ανοικτών συνόλων είναι ένα ανοικτό σύνολο.

Απόδειξη. (α) Η απόδειξη είναι τετριμμένη.

(β) Έστω $\mathbb{A}$ μια συλλογή ανοικτών συνόλων στο μιγαδικό επίπεδο, και με $\mathbb{W}$ συμβολίζουμε την ένωση όλων των στοιχείων του συνόλου $\mathbb{A}$. Έστω $z \in \mathbb{W}$. Τότε το

Απόδειξη. Επειδή το $v \in \bar{B}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θα υπάρχει $\{z_n \in B\}$ έτσι ώστε να ισχύει $|z_n - v| < 1/n$, για όλα τα $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = v$. $\diamond$

Πρόταση 9.2.46. Έστω B υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου. Τότε (α) η θήκη $\bar{B}$ του B είναι κλειστό σύνολο και (β) αν F κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και $B \subset F$, τότε $\bar{B} \subset F$.

Απόδειξη. (α) Έστω ότι ο μιγαδικός αριθμός $v \in \mathbb{C} \setminus \bar{B}$. Τότε υπάρχει $\delta > 0$, έτσι ώστε $D(v, \delta) \cap B = \emptyset$. Έστω $z \in \bar{B}$. Τότε υπάρχει κάποιο στοιχείο $b \in B$ έτσι ώστε $|z - b| < \delta$. Τότε $2\delta \leq |v - b| \leq |v - z| + |z - b| < |v - z| + \delta$, δηλαδή $|v - z| > \delta$. Αυτό αποδεικνύει ότι $D(v, \delta) \cap B = \emptyset$. Άρα το συμπλήρωμα του $\bar{B}$ είναι ανοικτό σύνολο, επομένως το $\bar{B}$ είναι ένα κλειστό σύνολο.

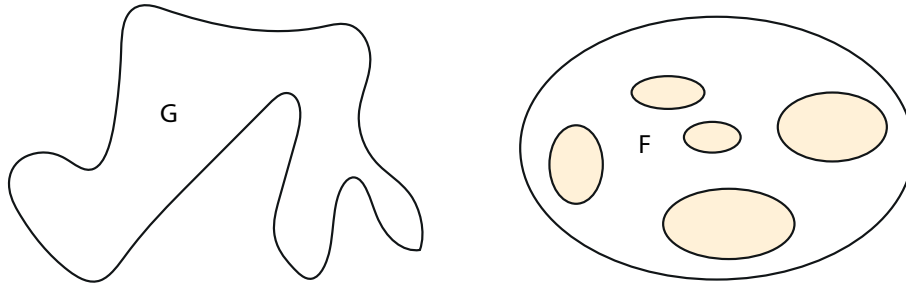
(β) Έστω F κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και $B \subset F$. Έστω τώρα $w \in \mathbb{C} \setminus F$. Τότε υπάρχει $\delta > 0$, έτσι ώστε $D(w, \delta) \cap F = \emptyset$. Αλλά τότε $D(w, \delta) \cap B = \emptyset$ και επομένως $w \notin \bar{B}$. Αυτό συνεπάγεται ότι $\mathbb{C} \setminus F \subset \mathbb{C} \setminus \bar{B}$. Άρα $\bar{B} \subset F$, όπως απαιτεί η Πρόταση. $\diamond$

Ορισμός 9.2.47. (Τμηματικά Λεία Καμπύλη ή Δρόμος) Μια καμπύλη $(x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$, που ορίζεται από συνεχείς συναρτήσεις, οι οποίες είναι τμηματικά διαφορίσιμες στο $[a, b]$, ονομάζεται **τμηματικά λεία ή δρόμος**. Ένας δρόμος στον οποίο ισχύει $(x(a), y(a)) = (x(b), y(b))$, ονομάζεται **κλειστός δρόμος**. Ένας κλειστός δρόμος, που δεν έχει πολλαπλά σημεία στο $[a, b]$, δηλαδή σημεία $t_1, t_2 \in [a, b]$, $t_1 \neq t_2$ για τα οποία ισχύει $(x(t_1), y(t_1)) = (x(t_2), y(t_2))$, ονομάζεται **απλά κλειστός δρόμος** ή **συνεχής θρόγγος** ή απλά **θρόγγος** ή **καμπύλη Jordan**.

Ορισμός 9.2.48. (Συνεκτικό Σύνολο - Πεδίο) Κάθε υποσύνολο D του $\mathbb{C}$, του οποίου οποιαδήποτε σημεία μπορούν να συνδεθούν με δρόμο, που ανήκει εξ ολοκλήρου σ' αυτό ονομάζεται **συνεκτικό**. Κάθε ανοικτό συνεκτικό υποσύνολο ονομάζεται **πεδίο (domain)**. Αν σε ένα πεδίο συνενωθούν και τα συνοριακά σημεία τότε προκύπτει ένα **κλειστό πεδίο** ή **περιοχή (region)**.

Παράδειγμα 9.2.49. Τα ακόλουθα υποσύνολα του μιγαδικού επιπέδου (α) $D_1 =: \{w \in \mathbb{C} : |w - a| < r_1, r_1 > 0\}$, (β) $D_2 =: \{w \in \mathbb{C} : r_2 < |w - a| < r_3, r_2, r_3 > 0\}$, αποτελούν πεδία. Ενώ τα σύνολα (γ) $D_3 =: \{w \in \mathbb{C} : |w - a| \leq r_4, r_4 > 0\}$, (δ) $D_4 =: \{w \in \mathbb{C} : r_5 \leq |w - a| \leq r_6, r_5, r_6 > 0\}$, αποτελούν κλειστά πεδία.

Ορισμός 9.2.50. (Συνεκτικό Πεδίο) Ένα υποσύνολο G του $\mathbb{C}$ λέγεται **απλά συνεκτικό πεδίο** αν ανήκουν στο G όλα τα σημεία, τα οποία περικλείονται από οποιονδήποτε κλειστό δρόμο που ανήκει στο G (βλέπε Σχήμα 9.4). Στην αντίθετη περίπτωση έχουμε ένα **πολλαπλά συνεκτικό πεδίο**. Θα λέμε ότι ένα πολλαπλά συνεκτικό πεδίο έχει **συνεκτικότητα** n , αν υπάρχουν $n - 1$ απλοί κλειστοί δρόμοι χωρίς



Σχήμα 9.4: Απλά Συνεκτικό και Πολλαπλά Συνεκτικό Πεδίο.

κοινά σημεία, των οποίων το εσωτερικό δεν ανήκει στο σύνολο. Για παράδειγμα, το σύνολο $D = \{w \in \mathbb{C} : r_2 < |w - a| < r_3, r_2, r_3 > 0\}$ έχει συνεκτικότητα 2. Ενώ το σύνολο F του Σχήματος 9.4 έχει συνεκτικότητα 6.

Προβλήματα για την Ενότητα 9.2.4

[1] Να σχεδιαστούν τα ακόλουθα σύνολα στο μιγαδικό επίπεδο:

a) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 2 + i| = 4\}$, b) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 2 + i| \leq 4\}$

c) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z + 3 - 3i) = 5\}$, d) $\{z \in \mathbb{C} : |z - i| + |z + i| = 5\}$,

e) $\{z \in \mathbb{C} : |2z| = |z + 2i|\}$, f) $|\operatorname{Im} z| < 1$, g) $0 < |z - 1| < 3$, h) $|z + 1| + |z - 1| < 3$.

Να εξετασθεί αν τα σύνολα αυτά είναι ανοικτά, κλειστά (ή τίποτα από αυτά), φραγμένα, απλά ή πολλαπλά συνεκτικά. Ποιό το σύνορο στα προηγούμενα σύνολα;

[2] Τι παριστάνει γεωμετρικά στο επίπεδο η εξίσωση: $|2z| = |z + i|$, $z \in \mathbb{C}$;

[3] Να αποδειχθεί ότι αν $A \subset B$ και το B είναι κλειστό, τότε $\partial A \subset B$. Ομοίως, αν $A \subset B$ και το A είναι ανοικτό, τότε $A \subset \overset{\circ}{B}$.

[4] Να εξεταστεί ποιά από τα παρακάτω υποσύνολα $X \subset \mathbb{C}$ είναι συνεκτικά. Αν κάποιο X δεν είναι συνεκτικό να προσδιορισθούν οι συνεκτικές συνιστώσες του:

(a) $X = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z - 2| < 1\}$, (b) $X = [0, 1) \cap \{1 + \frac{1}{n} : n \leq 1\}$,

(c) $X = \mathbb{C} \setminus (A \cap B)$,

όπου $A = [0, \infty)$, $B = \{z \in \mathbb{C} : z = r \cos \theta, r = \theta, 0 \leq \theta \leq \infty\}$.

[5] Να εξεταστεί ποιά από τα παρακάτω υποσύνολα $X \subset \mathbb{C}$ είναι συνεκτικά. Αν κάποιο X δεν είναι συνεκτικό να προσδιορισθούν οι συνεκτικές συνιστώσες του:

(a) $X = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ (b) $X = \{z \in \mathbb{C} : 2 \leq |z - 1| \leq 4\}$,

(c) $X = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Im} z < \operatorname{Re} z\}$, (d) $X = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1\}$,

(e) $X = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq |z - i|\}$, (f) $X = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq |\operatorname{Im} z|\}$,

Λύση. Αν αντικαταστήσουμε το z με το $z + \Delta z$ και το $\bar{z}$ με το $\bar{z} + \bar{\Delta z}$, πέρνουμε

$$w + \Delta w = (z + \Delta z)(\bar{z} + \bar{\Delta z}) = z\bar{z} + \bar{z}\Delta z + z\bar{\Delta z} + \Delta z\bar{\Delta z}.$$

Επομένως $\Delta w = \bar{z}\Delta z + z\bar{\Delta z} + \Delta z\bar{\Delta z}$ και

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \bar{z} + z\frac{\bar{\Delta z}}{\Delta z} + \bar{\Delta z}. \quad (3.3)$$

Παρατηρούμε ότι αυτό το πηλίκο γενικά δεν έχει μοναδική τιμή. Πράγματι, επειδή $z = x + iy$, $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, $\bar{\Delta z} = \Delta x - i\Delta y$, η σχέση (3.3) λαμβάνει τη μορφή

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = x - iy + (x + iy)\frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} + \Delta x - i\Delta y. \quad (3.4)$$

Αν στη σχέση (3.4) παίρνουμε πρώτα το $QR = \Delta y \rightarrow 0$ και μετά το $PR = \Delta x \rightarrow 0$ (δηλαδή ακολουθούμε το δρόμο QRP), τότε προκύπτει $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = 2x$. Ενώ αν ακολουθήσουμε το δρόμο $QR'P$, οπότε παίρνουμε πρώτα $QR' = \Delta x \rightarrow 0$ και στη συνέχεια $R'P = \Delta y \rightarrow 0$ έχουμε $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = -2iy$. Επομένως δεν υπάρχει η παράγωγος της συνάρτησης (3.2) εκτός από το σημείο $z = 0$!

Παράδειγμα 9.3.3. Να εξαστασθεί αν έχει παράγωγο η συνάρτηση $w = f(z) = z^2$.

Λύση. Τότε ισχύει $w + \Delta w = (z + \Delta z)^2 = z^2 + 2z\Delta z + (\Delta z)^2$. Επομένως $\Delta w = 2z\Delta z + (\Delta z)^2$ και

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{2z\Delta z + (\Delta z)^2}{\Delta z} = 2z + \Delta z.$$

Παρατηρούμε ότι αυτό το πηλίκο γενικά έχει μοναδική τιμή ($= 2z$) ανεξάρτητα από το δρόμο που ακολουθεί το Δz καθώς τείνει στο 0. Επομένως η συνάρτηση $w = f(z) = z^2$ έχει παράγωγο, που ισούται με τη συνάρτηση $w' = f'(z) = 2z$.

Θεώρημα 9.3.3. (Εξισώσεις Cauchy - Riemann) Έστω πεδίο D του $\mathbb{C}$ και $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ μια μιγαδική συνάρτηση με μορφή $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$. Η $f(z)$ έχει συνεχή παράγωγο αν και μόνο αν οι u_x, u_y, v_x, v_y είναι συνεχείς συναρτήσεις και ικανοποιούν τις εξισώσεις Cauchy - Riemann (C-R) στο D :

$$u_x(x, y) = v_y(x, y), \quad u_y(x, y) = -v_x(x, y). \quad (3.5)$$

Απόδειξη. (i) Θέτοντας $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, ο τύπος (3.1) γίνεται

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y}. \quad (3.6)$$

Ειδικά, αν $\Delta y = 0$ και $\Delta x \rightarrow 0$, τότε $f'(z) = u_x + iv_x$ και αν $\Delta x = 0$ και $\Delta y \rightarrow 0$, τότε $f'(z) = v_y - iu_y$. Επομένως για να υπάρχει το όριο, δηλαδή η παράγωγος $f'(z)$ θα πρέπει να ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy - Riemann (3.5).

(ii) Αντίστροφα, αν οι $u(x, y), v(x, y)$ είναι δύο διαφορίσιμες συναρτήσεις στο σημείο $z = x + iy$ και ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy - Riemann, τότε η $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ έχει παράγωγο που δίδεται από τη σχέση

$$f'(z) = u_x + iv_x = \frac{1}{i}(u_y + iv_y). \quad (3.7)$$



Πράγματι, επειδή οι u, v είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις, έπεται ότι

Εικόνα 9.10: Riemann, Bernhard (1826 - 1866)

$$\Delta u = hu_x + kv_y + n_1h + n_2k, \quad (3.8)$$

$$\Delta v = hv_x + kv_y + n_3h + n_4k, \quad (3.9)$$

όπου τα $n_i \rightarrow 0$ καθώς τα $h, k \rightarrow 0$. Από τις εξισώσεις Cauchy - Riemann (3.5) προκύπτει

$$\Delta u + i\Delta v = (u_x + iv_x)(h + ik) + nh + n'k,$$

όπου $n = n_1 + in_3, n' = n_2 + in_4$. Άρα, καθώς τα $h, k \rightarrow 0$, θα έχουμε

$$\frac{\Delta u + i\Delta v}{h + ik} \rightarrow u_x + iv_x,$$

αφού ισχύει $\frac{|h|}{|h+ik|} \leq 1$ και $\frac{|h|}{|h+ik|} \leq 1$. Άρα υπάρχει η παράγωγος $f'(z)$ της συνάρτησης $f(z)$ και είναι συνεχής. $\diamond$

Μιγαδικές συναρτήσεις που έχουν παράγωγο σε ένα σημείο έχουν ελάχιστο ενδιαφέρον για τις εφαρμογές. Ενώ αντίθετα έχουν μεγάλο ενδιαφέρον εκείνες που δέχονται παράγωγο σε ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$.

Ορισμός 9.3.4. (Αναλυτική ή Ολόμορφη Συνάρτηση) Μια μιγαδική συνάρτηση $f(z)$ που έχει συνεχή παράγωγο $f'(z)$ σ' ένα πεδίο $D \subset \mathbb{C}$ ονομάζεται **αναλυτική** (ή **ολόμορφη**) στο πεδίο D .

Η συνάρτηση $f(z)$ ονομάζεται **αναλυτική** σ' ένα σημείο $z \in \mathbb{C}$, αν είναι αναλυτική σε μια γειτονιά του σημείου z . Μια συνάρτηση αναλυτική σε κάθε σημείο $z \in \mathbb{C}$ ονομάζεται **ακεραία** (*entire*).

Αποδεικνύεται ότι, αν η συνάρτηση $f(z)$ είναι αναλυτική στο πεδίο D , τότε έχει συνεχείς μερικές παραγώγους κάθε τάξης στο πεδίο D . Ειδικότερα, υπάρχουν οι δεύτερης τάξης παράγωγοι των u, v και είναι συνεχείς στο πεδίο D . Έτσι, από τις

εξισώσεις Cauchy - Riemann¹ (3.5) προκύπτει ότι $u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0$, $v_{xx} + v_{yy} = -u_{yx} + u_{xy} = 0$, δηλαδή έχουμε αποδείξει το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Θεώρημα 9.3.5. (Εξίσωση Laplace) Αν η μιγαδική συνάρτηση $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ είναι αναλυτική στο πεδίο D , τότε τόσο η u όσο και η v πρέπει να ικανοποιούν την εξίσωση Laplace

$$\Delta u(x, y) \equiv u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0, \quad \Delta v(x, y) \equiv v_{xx}(x, y) + v_{yy}(x, y) = 0, \quad (3.10)$$

Ορισμός 9.3.6. (Αρμονικές Συναρτήσεις - Αρμονικές Συζυγείς) Οι λύσεις της εξίσωσης Laplace καλούνται **αρμονικές συναρτήσεις** και δύο τέτοιες συναρτήσεις που ικανοποιούν τις εξισώσεις Cauchy-Riemann ονομάζονται **αρμονικές συζυγείς**.

Όταν δίδεται μια αρμονική συνάρτηση $u(x, y)$, μια αρμονική συζυγής αυτής $v(x, y)$ μπορεί να βρεθεί με ολοκλήρωση γιατί από τις εξισώσεις Cauchy - Riemann προκύπτει ότι $dv = v_x dx + v_y dy = u_x dy - u_y dx$ και στη συνέχεια

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (u_x dy - u_y dx) \quad (\text{ανεξάρτητα του δρόμου}) \quad (3.11)$$

Οι εξισώσεις Cauchy - Riemann είναι ισοδύναμες με τη διανυσματική εξίσωση

$$\nabla v(x, y) = e_3 \times \nabla u \quad \text{ή} \quad \nabla u(x, y) = \nabla v \times e_3. \quad (3.12)$$

Πράγματι, αυτό αποδεικνύεται εύκολα, αν γράψουμε $\nabla u = u_x e_1 + u_y e_2$, $\nabla v = v_x e_1 + v_y e_2$. Επειδή ο τύπος (3.12) είναι ανεξάρτητος από την εκλογή των συντεταγμένων, σε πολικές συντεταγμένες δίδει

$$u_r R + u_\varphi \frac{P}{r} = (v_r R + v_\varphi \frac{P}{r}) \times e_3 = \frac{v_\varphi}{r} R - v_r P,$$

¹Riemann, Bernhard Georg Friedrich (September 17, 1826 - July 20, 1866) Ήταν Γερμανός μαθηματικός με σημαντική επιρροή, που πραγματοποίησε μια διαρκή και επαναστατική συμβολή στην Ανάλυση, τη Θεωρία Αριθμών και τη Διαφορική Γεωμετρία. Στο αντικείμενο της Πραγματικής Ανάλυσης είναι κυρίως γνωστός για την πρώτη αυστηρή διατύπωση του ορισμού του (ορισμένου) ολοκληρώματος, το ολοκλήρωμα Riemann, και για το έργο του στη μαθηματική θεμελίωση των σειρών Fourier. Η συμβολή του στη Μιγαδική Ανάλυση περιλαμβάνει κυρίως την εισαγωγή των επιφανειών Riemann, ανοίγοντας έτσι νέους ορίζοντες σε μια φυσική και γεωμετρική αντιμετώπιση της Μιγαδικής Ανάλυσης. Η περίφημη εργασία του 1859 σχετικά με τη «συνάρτηση καταμέτρησης των αρρήτων» (*prime-counting function*) $\pi(x)$, που περιέχει την αρχική διατύπωση της «Υπόθεση Riemann», θεωρείται, αν και είναι η μόνη εργασία του στο αντικείμενο, ως μια από τις εργασίες με τη μεγαλύτερη επίδραση στην Αναλυτική Θεωρία Αριθμών. Μέσω της πρωτοπόρας συμβολής του (μαζί με το συνάδελφο στο Göttingen και μέντορά του Johann Gauss) στην Διαφορική Γεωμετρία, ο Riemann έθεσε τα θεμέλια των μαθηματικών εργαλίων της Γενικής Σχετικότητας.

10

Μιγαδική Ολοκλήρωση

Περιεχόμενα

- 10.1 Μιγαδική Ολοκλήρωση - Προβλήματα.
- 10.2 Επικαμπύλιο Μιγαδικό Ολοκλήρωμα - Προβλήματα.
- 10.3 Ολοκληρωτικό Θεώρημα Cauchy - Προβλήματα.
- 10.4 Αόριστο Μιγαδικό Ολοκλήρωμα - Προβλήματα.
- 10.5 Ολοκληρωτικός Τύπος Cauchy και Εφαρμογές 10.5.1 Παράγωγος Αναλυτικών Συναρτήσεων, 10.4.2 Θεώρημα Morera 10.5.3 Αρχή Μεγίστου 10.5.4 Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας - Προβλήματα.
- 10.6 Γενικά Προβλήματα για το Κεφάλαιο 10.

10.1 Εισαγωγή

Η θεωρία της Μιγαδικής Ολοκλήρωσης είναι ιδιαίτερα σημαντική, τόσο στην περαιτέρω ανάπτυξη των αναλυτικών συναρτήσεων, όσο και στις εφαρμογές των Μαθηματικών στους διάφορους κλάδους των Φυσικών Επιστημών. Η ύπαρξη παραγώγων οποιασδήποτε τάξης των αναλυτικών συναρτήσεων είναι μια απλή συνέπεια του ολοκληρωτικού τύπου του Cauchy. Επίσης η τιμή μιας αναλυτικής συνάρτησης σε κάθε σημείο του πεδίου αναλυτικότητας, καθορίζεται από την τιμή της σε κάποια αυθαίρετη καμπύλη σ' αυτό το πεδίο.

Ακόμα, όπως θα δούμε σε επόμενο κεφάλαιο, ο υπολογισμός πολύπλοκων πραγματικών ολοκληρωμάτων επιτυγχάνεται με απλό τρόπο μέσω των μιγαδικών ολοκληρώσεων. Τέλος, απλή απόρροια της θεωρίας αυτής αποτελούν η Αρχή Μεγίστου και το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας, βασικά εργαλεία αντίστοιχα στις Διαφορικές Εξισώσεις και τη θεωρία των Πολυωνύμων.

Όλα αυτά φανερώνουν, αφ' ενός τη σπουδαιότητα του Μιγαδικού Λογισμού και αφ' ετέρου μια σημαντική διαφοροποίηση αυτού από τον Πραγματικό Λογισμό.

10.2 Επικαμπύλιο Μιγαδικό Ολοκλήρωμα

Σ' αυτή την ενότητα θα δοθεί η έννοια του Ορισμένου Ολοκληρώματος μιας μιγαδικής συνάρτησης $f(z)$ μιγαδικής μεταβλητής z , πάνω σε μια καμπύλη C , που αρχίζει από το σημείο $z = \alpha$ και τελειώνει στο σημείο $z = \beta$ στο μιγαδικό επίπεδο. Ένα τέτοιο ολοκλήρωμα συμβολίζεται:

$$\int_C f(z) dz \quad \text{ή} \quad \int_{\alpha}^{\beta} f(z) dz.$$

Για τον ορισμό θα χρησιμοποιηθεί η έννοια του επικαμπυλίου ολοκληρώματος πραγματικής συνάρτησης, αντί της διαδικασίας του ορίου των μερικών αθροισμάτων μέσω διαδοχικών λεπτότερων διαμερίσεων του πεδίου ορισμού, δηλαδή της καμπύλης C .

Οι ακόλουθες υποθέσεις είναι απαραίτητες για το σκοπό μας. Η καμπύλη C αποτελεί δρόμο που ορίζεται από την εξίσωση $z(t) = x(t) + iy(t)$, $a \leq t \leq b$, όπου $z(a) = \alpha$ και $z(b) = \beta$. Η συνάρτηση $f(z) = u(x, y) + v(x, y)$ είναι κατά τμήματα συνεχής στην καμπύλη C , πράγμα που σημαίνει ότι οι $u(x(t), y(t))$, $v(x(t), y(t))$ είναι κατά τμήματα συνεχείς συναρτήσεις του t .

Ορίζουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $f(z)$ κατά μήκος της καμπύλης C από

[8] Αν C είναι ο κύκλος $2|z-1| = 1$, όπου το αρχικό σημείο είναι το $1/2 - i0$ και το τερματικό σημείο είναι το $1/2 + i0$ να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα:

$$\int_C \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}}, \quad \text{δοθέντος ότι } \sqrt{z^2-1} = \exp \left[\frac{1}{2} \operatorname{Ln}(z-1) + \frac{1}{2} \operatorname{Ln}(z+1) \right]$$

[Υπόδειξη: Μια αντιπαράγωγος είναι $F(z) = \ln[z + (z^2-1)^{1/2}]$.]

10.3 Ολοκληρωτικό Θεώρημα Cauchy. Γενίκευση Goursat

Το Ολοκληρωτικό Θεώρημα του Cauchy έχει σημαντικές εφαρμογές τόσο στη Μιγαδική Ανάλυση όσο και σε μια ευρύτατη οικογένεια πρακτικών προβλημάτων. Η διατύπωση του είναι η ακόλουθη:

Θεώρημα 10.3.1. (Ολοκληρωτικό Θεώρημα Cauchy- Goursat) *Αν η συνάρτηση $f(z)$, $z \in \mathbb{C}$ είναι αναλυτική σ' ένα απλά συνεκτικό και φραγμένο πεδίο D , τότε για κάθε απλό κλειστό δρόμο C στο D , ισχύει $\int_C f(z) dz = 0$.*

Απόδειξη. Η αποδεικτική διαδικασία θα προσεγγισθεί με τρεις τρόπους:

(1ος Τρόπος) Αν η $f(z)$ έχει μια παράγουσα συνάρτηση $F(z)$ στο πεδίο D , δηλαδή $F'(z) = f(z)$, τότε $\int_C f(z) dz = F(z_0) - F(z_0) = 0$, για κάθε $z_0 \in C$ σύμφωνα με το Θεώρημα 10.2.6.

(2ος Τρόπος) (Απόδειξη του Cauchy) Βασικό ρόλο σε αυτή την απόδειξη παίζει η υπόθεση ότι η $f(z)$ είναι συνεχής στο πεδίο D , η οποία όπως θα δούμε στη συνέχεια αναίρεται. Από τον ορισμό του μιγαδικού ολοκληρώματος έχουμε ότι

$$\int_C f(z) dz = \int_C (u dx - v dy) + i \int_C (u dy + v dx).$$

Επεδή οι $u(x, y)$, $v(x, y)$ έχουν συνεχείς πρώτες μερικές παραγώγους, το Θεώρημα Green συνεπάγεται:

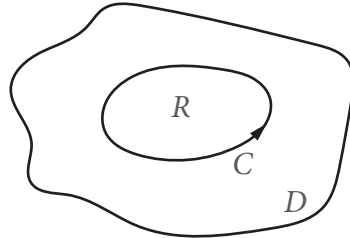
$$I_1 = \int_C (u dx - v dy) = \int \int_R \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy,$$

όπου R είναι περιοχή που περικλείεται από τον δρόμο C (βλέπε Σχήμα 10.4). Οι συνθήκες C-R δίδουν ότι $I_1 = 0$. Ομοίως αποδεικνύεται ότι και το

$$I_2 = \int_C (u dy + v dx) = \int \int_R \left(-\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = 0.$$

Επομένως

$$\int_C f(z) dz = I_1 + I_2 = 0.$$



Σχήμα 10.4: Σχήμα Θεωρήματος 10.3.1 (2ο Τρόπος).

(3ος Τρόπος) (Απόδειξη του Goursat¹) Η απόδειξη του Goursat δεν χρησιμοποιεί τη συνέχεια της $f'(z)$. Αυτό το σημείο είναι ιδιαίτερα σημαντικό, γιατί με τη χρήση αυτού του Θεωρήματος στη συνέχεια θα αποδειχθεί ότι η $f'(z)$ είναι επίσης αναλυτική και γενικότερα ότι υπάρχουν οι παράγωγοι της $f(z)$ οποιασδήποτε τάξης.

Βήμα 1ον. Αρχίζουμε την απόδειξη στην περίπτωση που ο δρόμος C είναι ένα τρίγωνο και στη συνέχεια θα υποδείξουμε πως θα αντιμετωπισθεί η περίπτωση πιο πολύπλοκων χωρίων. Προσανατολίζουμε το τρίγωνο κατά τη θετική φορά και το χωρίζουμε σε 4 τρίγωνα, ενώνοντας τα μέσα των πλευρών. Τότε



Εικόνα 10.1: Goursat, Édouard (1858-1936)

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz + \int_{C_3} f(z)dz + \int_{C_4} f(z)dz.$$

όπου C_i , $i = 1, 2, 3, 4$ είναι τα σύνορα των τριγώνων (βλέπε Σχήμα 10.5). Ανάμεσα στα 4 τρίγωνα θα υπάρχει ένα που το καλούμε C_1 , για το οποίο θα ισχύει

$$\left| \int_C f(z)dz \right| \leq 4 \left| \int_{C_1} f(z)dz \right|.$$

¹Goursat, Édouard Jean-Baptiste (21 May 1858-25 November 1936) Ήταν ένας Γάλλος μαθηματικός. Είναι πολύ γνωστός για το βιβλίο του στη «Μαθηματική Ανάλυση», που εκδόθηκε κατά την πρώτη δεκαετία του εικοστού αιώνα. Αποτέλεσε το πρότυπο για τη διδασκαλία σε υψηλό επίπεδο της Μαθηματικής Ανάλυσης, ιδιαίτερα της Μιγαδικής Ανάλυσης. Ο Goursat έγραψε επίσης βιβλία στις Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις και στις Υπεργεωμετρικές Σειρές. Ο Édouard Goursat φοίτησε και αργότερα δίδαξε στην École Normale Supérieure. Εκείνη την εποχή δεν είχαν ακόμη πλήρως αποσαφηνιστεί τα τοπολογικά θεμέλια της Μιγαδικής Ανάλυσης, με το Θεώρημα της καμπύλης Jordan να θεωρείται μια μεγάλη πρόκληση για αυστηρή απόδειξη, κάτι που θα έπρεπε να περιμένει τον L.E.J. Brouwer, ο οποίος το απέδειξε με τη βοήθεια της Συνδυαστικής Τοπολογίας. Το έργο του Goursat θεωρήθηκε από τους συγχρόνους του, συμπεριλαμβανομένου και του G.H. Hardy, ως υποδειγματικό για την αντιμετώπιση των δυσκολιών που συναντούσε η πλήρης απόδειξη του Θεμελιώδους Θεωρήματος Cauchy. Για το λόγο αυτό τώρα πλέον αποκαλείται Θεώρημα των Cauchy-Goursat.

Αν το μήκος του δρόμου C είναι l , τότε το C_1 έχει μήκος $l/2$, το C_2 έχει μήκος $l/4$, και γενικά ο δρόμος C_n έχει μήκος $\frac{l}{2^n}$. Συνοψίζοντας έχουμε λοιπόν

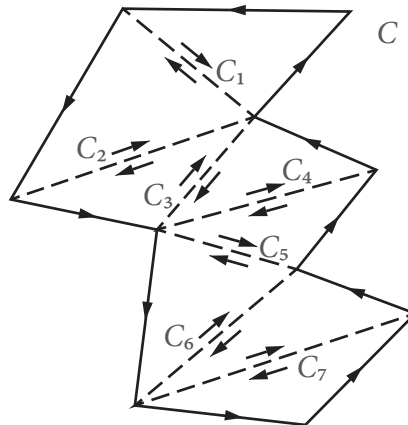
$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq 4^n \left| \int_{C_n} f(z) dz \right| < 4^n \frac{\varepsilon l_n^2}{2} = 4^n \frac{\varepsilon}{2} \frac{l^2}{4^n}$$

Άρα τελικά ισχύει

$$\int_C f(z) dz = 0.$$

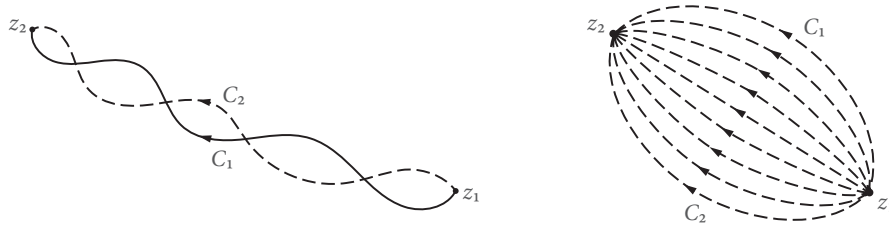
Βήμα 2ον. Αν ο δρόμος C είναι ένα πολύγωνο, τότε αυτό μπορεί να υποδιαιρεθεί σε τρίγωνα (βλέπε Σχήμα 10.6). Τα ολοκληρώματα που αντιστοιχούν σε καθένα από αυτά τα τρίγωνα είναι μηδέν. Το δε άθροισμα τους είναι το ολοκλήρωμα πάνω στην πολυγωνική γραμμή, αφού τα ολοκληρώματα στα εσωτερικά τμήματα απαλείφονται ανά δύο ως αντιθέτου φοράς.

Βήμα 3ον. Αν η καμπύλη C είναι ένας απλός κλειστός δρόμος, τότε αυτός μπορεί να αναχθεί στην προηγούμενη περίπτωση με εγγραφή ενός κλειστού πολυγώνου P από χορδές, το οποίο προσεγγίζει το δρόμο C αρκετά ικανοποιητικά, ώστε το ολοκλήρωμα πάνω στο P να διαφέρει από αυτό πάνω στο C κατά οποιοδήποτε δοσμένο ε οσοδήποτε μικρό. $\diamond$



Σχήμα 10.6: Σχήμα Θεωρήματος 10.3.1. (3ος Τρόπος- / 2ο Βήμα)

Παρατήρηση 10.3.2. (Αρχή Παραμόρφωσης του Δρόμου) (i) Αν χωρίσουμε τον κλειστό δρόμο C του Θεωρήματος Cauchy σε δύο τόξα C_1, C_2^* (βλέπε Σχήμα 10.7).



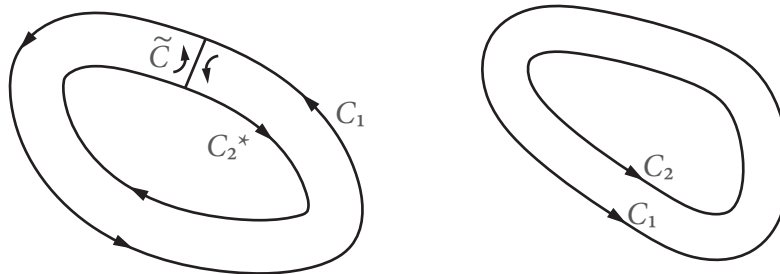
Σχήμα 10.8: Σχήμα Παρατήρησης 10.3.2 (ii), (iii).

περάσουμε από σημείο στο οποίο η συνάρτηση $f(z)$ να μην είναι αναλυτική, τότε η τιμή του ολοκληρώματος

$$\int_C f(z) dz$$

παραμένει σταθερή. Συχνά αυτή η ιδιότητα ονομάζεται **Αρχή Παραμόρφωσης του Δρόμου (deformation principle)**.

Παρατήρηση 10.3.3. (Πολλαπλά Συνεκτικά Χωρία) Ένα πολλαπλά συνεκτικό χωρίο D μπορεί να τμηθεί έτσι ώστε το χωρίο D^* , που προκύπτει χωρίς τις τομές, να είναι απλά συνεκτικό. Έτσι στο χωρίο D^* για μια αναλυτική συνάρτηση $f(z)$ θα ισχύει το Ολοκληρωτικό Θεώρημα Cauchy. Επομένως, εύκολα φαίνεται ότι ισχύει



Σχήμα 10.9: Σχήμα Παρατήρησης 10.3.3.

$$\int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2^*} f(z) dz = 0,$$

όπου τα τόξα C_1, C_2^* έχουν αντίθετη φορά (βλέπε Σχήμα 10.9). Η τελευταία εξίσωση μπορεί να γραφεί

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz,$$

(b) Έστω το χωρίο $D_2 = \mathbb{C} \setminus \{(0, 0)\}$. Τότε στο χωρίο D_2 η συνάρτηση z^{-1} είναι αναλυτική, όμως το χωρίο D_2 **δεν είναι απλά συνεκτικό** (βλέπε Σχήμα 10.16). Ακόμα η συνάρτηση $\operatorname{Ln} z$ δεν είναι μια παράγουσα της συνάρτησης $\frac{1}{z}$ στο χωρίο D_2 , διότι η $\operatorname{Ln} z$ είναι αναλυτική μόνο στο $-\pi < \operatorname{Arg} z < \pi$, το οποίο δηλαδή αποκλείει τον αρνητικό (πραγματικό) ημιάξονα. Έτσι εξηγείται γιατί έχουμε

$$\int_C \frac{1}{z} dz = 2\pi i \neq 0$$

σε κάθε κλειστό δρόμο C , γύρω από την αρχή, χωρίς αυτό να αντιβαίνει στα συμπεράσματα του Θεωρήματος 10.4.3.

Προβλήματα για την Ενότητα 10.4

[1] Να υπολογισθούν τα ακόλουθα ολοκληρώματα:

- (α) $\int_{2i}^{3+2i} z^2 dz$, (β) $\int_i^{5i} (z^2 - 2)^4 dz$, (γ) $\int_i^{5i} (z + 8)^2 dz$, (δ) $\int_5^{5+i\pi} e^{5z} dz$,
 (ε) $\int_5^{5+i\pi} 3ze^{5z} dz$, (στ') $\int_0^{i\pi} 3z \sin(2z) dz$, (ζ) $\int_{-i\pi}^{i\pi} \cos^2(2z) dz$,
 (η) $\int_{-i\pi}^{i\pi} \cos^2(2z) dz$, (θ) $\int_{-i}^i z \sinh^2(z^2) dz$.

[2] Να υπολογισθούν τα ακόλουθα ολοκληρώματα:

- (a) $\int_1^2 \left(\frac{1}{t} - i\right)^2 dt$, (b) $\int_0^{\pi/6} e^{2it} dt$, (c) $\int_0^\infty e^{-zt} dt$, $\operatorname{Re} z > 0$.

[3] Να αποδειχθεί ότι, για κάθε $m, n \in \mathbb{Z}$, ισχύει

$$\int_0^{2\pi} e^{im\theta} e^{-in\theta} d\theta = \begin{cases} 0, & \text{όταν } m \neq n, \\ 2\pi, & \text{όταν } m = n. \end{cases}$$

10.5 Ολοκληρωτικός Τύπος Cauchy και οι Συνέπειες Αυτού

Στη συνέχεια αυτής της Ενότητας θα λέμε ότι μια συνάρτηση $f(z)$ είναι αναλυτική σ' ένα χωρίο D , αν υπάρχει η $f'(z)$ σε κάθε σημείο $z \in D$, δηλαδή δεν θα υποθέτουμε την συνέχεια της $f'(z)$ στο D . Στη συνέχεια θα δώσουμε την πιο σημαντική συνέπεια του Θεωρήματος Cauchy, που είναι ο Ολοκληρωτικός Τύπος Cauchy. Η σπουδαιότητα αυτού του τύπου θα φανεί στη συνέχεια από μια σειρά εφαρμογών που θα παρουσιασθεί. Το σχετικό θεώρημα διατυπώνεται ως εξής:

Θεώρημα 10.5.1. (Ολοκληρωτικός Τύπος Cauchy) Αν η συνάρτηση $f(z)$ είναι αναλυτική σ' ένα απλά συνεκτικό πεδίο $D \subset \mathbb{C}$, τότε για κάθε $z_0 \in D$ και κάθε απλό κλειστό δρόμο C στο χωρίο D , που περικλείει το $z_0 \in D$ (βλέπε Σχήμα 10.17) ισχύει

$$\int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0), \quad (5.1)$$

όπου η ολοκλήρωση γίνεται κατά τη θετική φορά στο δρόμο C .

Λύση. (i) Έστω ότι ο δρόμος C δεν περικλείει το $z = 1$. Τότε για το ολοκλήρωμα ισχύει

$$I = \oint_C \frac{2 \sin z^3}{(z-1)^4} dz = 0.$$

(ii) Έστω ότι ο δρόμος C περικλείει το $z = 1$. Τότε, αν θέσουμε $f(z) = 2 \sin z^3$, θα ισχύει

$$f'''(z) = \frac{3!}{2\pi i} \oint_C \frac{2 \sin z^3}{(z-1)^4} dz.$$

Επομένως, τελικά θα έχουμε

$$\oint_C \frac{2 \sin z^3}{(z-1)^4} dz = \frac{\pi i}{3} f'''(1) = \frac{\pi i}{3} [-108 \sin 1 - 42 \cos 1].$$

Παράδειγμα 10.5.13. Έστω $f(z)$ αναλυτική συνάρτηση μέσα και πάνω στον απλό, κλειστό δρόμο C . Υποθέτουμε ότι $f(z) = 0$, για κάθε $z \in C$. Τότε $f(z_0) = 0$, για κάθε z_0 στο εσωτερικό του δρόμου C .

Λύση. Έστω z_0 στο εσωτερικό του δρόμου C . Τότε, σύμφωνα με το Ολοκληρωτικό Θεώρημα Cauchy 10.5.1, θα ισχύει

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{z - z_0}.$$

όπου $f(z) = 0$ και $z - z_0 \neq 0$. Επομένως, $f(z_0) = 0$, για κάθε z_0 στο εσωτερικό του δρόμου C .

10.5.2 Θεώρημα Morera

Στην προηγούμενη Ενότητα 10.4 (βλέπε Θεώρημα 10.4.1) έχει αποδειχθεί ότι η παράγωγος της συνάρτησης

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(s) ds$$

υπάρχει σε κάθε σημείο οποιουδήποτε απλά συνεκτικού χωρίου D , όπου η συνάρτηση $f(z)$ είναι αναλυτική και ισχύει $F'(z) = f(z)$. Για την απόδειξη στο Θεώρημα 10.4.1 χρησιμοποιείται τελικά μόνο το γεγονός ότι η συνάρτηση $f(z)$ είναι συνεχής και ότι το ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(z)$ γύρω από κάθε απλό κλειστό δρόμο είναι μηδέν (βλέπε Παρατήρηση 10.4.2 και παραπομπές).

Επομένως, γνωρίζοντας ότι η συνάρτηση $f(z)$ έχει αυτές τις δύο ιδιότητες, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση $F(z)$ είναι αναλυτική στο χωρίο D , και μάλιστα ισχύει $F'(z) = f(z)$. Άρα, η $f(z)$ είναι αναλυτική στο χωρίο D , ως παράγωγος αναλυτικής συνάρτησης. Με αυτούς τους συλλογισμούς έχουμε καταλήξει σε ένα αποτέλεσμα που οφείλεται στο Morera.

Θεώρημα 10.5.14. (Θεώρημα Morera) Αν η συνάρτηση $f(z)$ είναι συνεχής σ' ένα απλά συνεκτικό χωρίο $D \subset \mathbb{C}$ και αν, για κάθε απλά κλειστό δρόμο C μέσα στο χωρίο D , το ολοκλήρωμα

$$\int_C f(z) dz = 0 \quad (5.7)$$

τότε η συνάρτηση $f(z)$ είναι αναλυτική στο χωρίο D .

Το Θεώρημα αυτό μπορεί να θεωρηθεί ως ένα αντίστροφο του Ολοκληρωτικού Θεωρήματος των Cauchy- Goursat 10.3.1.

Παρατήρηση 10.5.15. Το Θεώρημα Morera επεκτείνεται σ' οποιοδήποτε χωρίο με τη συνθήκη (5.7) να ισχύει για κάθε απλό κλειστό δρόμο C , του οποίου το εσωτερικό βρίσκεται μέσα στο χωρίο D . Γιατί, αν $z_0 \in D$, υπάρχει μια ε -γειτονιά του z_0 με $|z - z_0| < \varepsilon$, που περιέχεται στο χωρίο D και το Θεώρημα Morera μπορεί να εφαρμοστεί σ' αυτή την περιοχή και να αποδειχθεί έτσι ότι η συνάρτηση $f(z)$ είναι αναλυτική στο σημείο z_0 . Άρα η συνάρτηση $f(z)$ είναι αναλυτική παντού στο χωρίο D .

Το Θεώρημα Morera¹ αποδεικνύει ότι το αξίωμα της διαφορησιμότητας μπορεί να αντικατασταθεί με αυτό της ολοκληρωσιμότητας - δηλαδή ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα είναι ανεξάρτητο του δρόμου ολοκλήρωσης. Η ισοδυναμία αυτών των δύο αξιωμάτων είναι χαρακτηριστικό της θεωρίας των συναρτήσεων μιγαδικής μεταβλητής.

10.5.3 Αρχή Μεγίστου

Έστω ότι η $f(z)$ είναι μια μη σταθερή αναλυτική συνάρτηση στον ανοικτό δίσκο $D := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r_0, r_0 > 0\}$. Αν C οποιοσδήποτε κύκλος $C =: \{z : |z - z_0| = r, 0 < r < r_0\}$, (βλέπε Σχήμα 10.21), τότε σύμφωνα με το Θεώρημα του Ολοκληρωτικού τύπου του Cauchy 10.5.1, θα ισχύει

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{z - z_0}. \quad (5.8)$$

Ο δρόμος C διαγράφεται κατά τη θετική φορά και μια παραμετρική παράσταση αυτού σε πολικές συντεταγμένες είναι $z(\theta) = z_0 + re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Έτσι η σχέση

¹Ο Morera, Giacinto (18 July 1856-8 February 1909), ήταν ένας Ιταλός μηχανικός και μαθηματικός. Είναι γνωστός για το Θεώρημα Morera στη θεωρία των μιγαδικών συναρτήσεων και για το έργο του στη θεωρία της γραμμικής ελαστικότητας. Γεννήθηκε στη Νοβάρα στις 18 Ιουλίου το 1856. Σύμφωνα με τον Tricomi (1962), η οικογένειά του ήταν πλούσιοι έμποροι. Ο ίδιος ήταν εξαιρετικά σκληρά εργαζόμενος και αυτό το χρησιμοποίησε και στην έρευνα του. Μετά τις σπουδές του στο Τορίνο, πήγε στην Παβία, Πίζα και τη Λειψία. Επέστρεψε πίσω στη Γένοβα το 1886, που έζησε για τα επόμενα 15 χρόνια. Από το 1901 μέχρι το θάνατό του το 1909 εργάστηκε στο Τορίνο.

Άμεση συνέπεια του Θεωρήματος Liouville¹ αποτελεί το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Παράδειγμα 10.5.21. Έστω $f(z)$ ακεραία συνάρτηση για την οποία ισχύει $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{z} = 0$. Τότε η $f(z)$ είναι σταθερή συνάρτηση.

Λύση. Έστω

$$g(z) = \frac{f(z) - f(0)}{z}.$$

Τότε η συνάρτηση $g(z)$ είναι αναλυτική στο πεδίο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Επίσης ισχύει $\lim_{z \rightarrow 0} g(z) = f'(0)$. Επομένως, αν ορίσουμε $g(0) = f'(0)$, τότε η συνάρτηση $g(z)$ θα είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{C}$. Από το Θεώρημα Morera 10.5.14 προκύπτει ότι η συνάρτηση $g(z)$ θα είναι ακεραία. Επίσης ισχύει

$$\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z) - f(0)}{z} = 0.$$

¹Liouville, Joseph (24 March 1809-8 September 1882). Ήταν Γάλλος μαθηματικός. Αποφοίτησε από την École Polytechnique στο 1827. Αφού δίδαξε μερικά χρόνια ως βοηθός σε διάφορα ιδρύματα, συμπεριλαμβανομένης της École Centrale à Paris, διορίστηκε ως καθηγητής στην École Polytechnique στο 1838. Εξελέγει σε Έδρα Μαθηματικών στο Collège de France το 1850 και σε έδρα Μηχανικής στη Faculté des Sciences το 1857. Εκτός από τις ακαδημαϊκές επιτυχίες του, ήταν πολύ ταλαντούχος σε οργανωτικά θέματα. Ο Liouville είναι ο ιδρυτής του πολύ σημαντικού περιοδικού «*Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*», προκειμένου να προωθήσει το έργο άλλων μαθηματικών και το οποίο διατηρεί πολύ υψηλά τη φήμη του συνεχώς μέχρι σήμερα. Ήταν ο πρώτος που αναγνώρισε τη σημασία του ανέκδοτου έργου του Évariste Galois και το δημοσίευσε στο περιοδικό του το 1846. Ο Liouville έχει εργαστεί σε διάφορους τομείς των μαθηματικών, όπως Θεωρία Αριθμών, Μιγαδική Ανάλυση, Διαφορική Γεωμετρία, Τοπολογία, Μαθηματική Φυσική και Αστρονομία. Παραμένει γνωστός μέχρι σήμερα για το θεώρημα Liouville στη Μιγαδική Ανάλυση. Στη Θεωρία Αριθμών, υπήρξε ο πρώτος που απέδειξε την ύπαρξη των υπερβατικών αριθμών χρησιμοποιώντας τους λεγόμενους αριθμούς Liouville. Στη Μαθηματική Φυσική, ο Liouville έκανε δύο θεμελιώδεις συνεισφορές: τη «*θεωρία Sturm-Liouville*», η οποία ήταν από κοινού εργασία με τον Charles François Sturm, και τώρα αποτελεί μια τυπική διαδικασία για την επίλυση ορισμένων τύπων διαφορικών και ολοκληρωτικών εξισώσεων με τον προσδιορισμό των ιδιοσυναρτήσεων, καθώς και το γεγονός (επίσης γνωστό ως Θεώρημα Liouville) ότι η χρονική εξέλιξη είναι συντηρητική στα Hamiltonian συστήματα. Στη Hamiltonian Δυναμική, ο Liouville επίσης εισήγαγε την έννοια των «*μεταβλητών δράσης-γωνίας*» ως περιγραφή των πλήρως ολοκληρώσιμων συστημάτων. Η σύγχρονη διαμόρφωση αυτής της θεωρίας ονομάζεται μερικές φορές ως «*θεώρημα Liouville-Arnold*», και η βασική έννοια ολοκληρωσιμότητας αναφέρεται ως «*ολοκληρωσιμότητα Liouville*». Το 1851, εξελέγη μέλος της Βασιλικής Ακαδημίας Επιστημών της Σουηδίας. Ο Liouville συμμετείχε στην ενεργό πολιτική για λίγο, ως μέλος της Assemblée Constituante το 1848. Ωστόσο, μετά την αποτυχία του στις εκλογές του 1849, αποστασιοποιήθηκε. Ο «*κρατήρας Liouville*» στη Σελήνη έχει το όνομά του. Τέλος η «*συνάρτηση Liouville*» αποτελεί μια σημαντική συνάρτηση στη Θεωρία των Αριθμών.

Επομένως θα υπάρχει $M > 0$, έτσι ώστε για $|z| > M$ να ισχύει $|g(z)| < 1$. Όμως η $g(z)$ ως συνεχής είναι φραγμένη στον κλειστό δίσκο $|z| \leq M$. Τα παραπάνω συνεπάγονται ότι η συνάρτηση $g(z)$ είναι ακεραία σε όλο το χώρο $\mathbb{C}$.

Σύμφωνα λοιπόν με το Θεώρημα Liouville 10.5.20 θα είναι σταθερή, δηλαδή υπάρχει $c \in \mathbb{C}$, έτσι ώστε

$$\frac{f(z) - f(0)}{z} = c, \text{ για κάθε } z \in \mathbb{C}.$$

Επειδή δε

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z) - f(0)}{z} = 0.$$

συνεπάγεται ότι $c = 0$, δηλαδή

$$\frac{f(z) - f(0)}{z} = 0 \text{ ή } f(z) = f(0), \text{ για κάθε } z \in \mathbb{C}.$$



Εικόνα 10.3: Liouville, Joseph (1809-1882)

10.5.4 Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας

Το επόμενο θεώρημα είναι γνωστό από τη στοιχειώδη Άλγεβρα.

Θεώρημα 10.5.22. (Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας) Κάθε πολυώνυμο

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n, \quad a_n \neq 0, n \geq 1, \text{ για κάθε } z \in \mathbb{C}. \quad (5.15)$$

μηδενίζεται για τουλάχιστον ένα $z \in \mathbb{C}$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι για κάθε $z \in \mathbb{C}$, το $P(z) \neq 0$. Τότε η συνάρτηση $f(z) = 1/P(z)$ θα είναι ακεραία και φραγμένη, για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Πράγματι, η συνάρτηση $f(z) = 1/P(z)$ ως συνεχής, είναι φραγμένη σε κάθε κλειστό δίσκο $C_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$ με κέντρο την αρχή. Επίσης αποδεικνύεται ότι για όλα τα σημεία εξωτερικά του δίσκου C_R , ισχύει

$$f(z) = \frac{1}{P(z)} < \frac{2}{a_n R^n}, \quad a_n \neq 0, n \geq 1, \text{ για κάθε } z \in \mathbb{C}.$$

Πράγματι, αποδεικνύεται ότι για κάθε πολυώνυμο $P(z)$, $n \geq 1$, υπάρχει ένας αριθμός $R \in \mathbb{R}^+$, έτσι ώστε

$$P(z) > \frac{a_n R^n}{2}, \quad n \geq 1, \text{ για κάθε } z \in \mathbb{C} \text{ με } |z| \leq R.$$

11

Μιγαδική Σειρά

Περιεχόμενα

- 11.1 Εισαγωγή - Προβλήματα.
- 11.2 Σειρές Taylor, 11.2.1 Βασική Θεωρία, 11.2.2 Πρακτικές Μέθοδοι Εύρεσης Δυναμοσειρών - Προβλήματα.
- 11.3 Σειρές Laurent - Προβλήματα.
- 11.4 Ιδιότητες Σειρών και άλλες Παρατηρήσεις - Προβλήματα.
- 10.5 Γενικά Προβλήματα για το Κεφάλαιο 11.

$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$ και υπάρχει σταθερά $M > 0$ έτσι ώστε να ισχύει $|S_n| < M$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

[6] Να αποδειχθεί ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} z_n v_n$ συγκλίνει, αν συγκλίνει η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ και ισχύει η συνθήκη $v_0 > v_1 > v_2 > \dots > P$, όπου P είναι μια πραγματική σταθερά.

11.2 Σειρές Taylor

Στη θεωρία των μιγαδικών σειρών ειδική βαρύτητα έχουν οι **δυναμοσειρές**, οι ονομαζόμενες σειρές Taylor¹, δηλαδή σειρές της μορφής

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots + a_n(z - z_0)^n + \dots, \quad (2.1)$$

όπου οι a_n είναι μιγαδικές σταθερές, οι **συντελεστές** της σειράς (2.1), το z_0 είναι επίσης μια μιγαδική σταθερά, το **κέντρο** της σειράς (2.1), και η μεταβλητή $z \in D$ με D κάποιο πεδίο στο $\mathbb{C}$. Στις δυναμοσειρές που περικλείουν μια μεταβλητή $z \in \mathbb{C}$ θα συμβολίζουμε και πάλι με $S(z)$, $S_N(z)$, $R_N(z)$ το άθροισμα, το μερικό άθροισμα και το υπόλοιπο αυτών, αντίστοιχα.



Στις σειρές που περικλείουν μεταβλητή (ή μεταβλητές) είναι προφανές ότι η σειρά θα συγκλίνει για κάποιες τιμές της μεταβλητής και θα αποκλίνει για άλλες. Συνήθως το πεδίο στο οποίο μια τέτοια σειρά συγκλίνει είναι σε πολύπλοκη μορφή. Όμως στις μιγαδικές δυναμοσειρές -όπως και στις πραγματικές- το πεδίο σύγκλισης είναι ένας δίσκος

Εικόνα 11.1: Taylor, Brook (1685-1731)

¹Taylor, Brook FRS (18 August 1685-29 December 1731), Άγγλος μαθηματικός, ο οποίος εισήγαγε τον ομώνυμο τύπο για πραγματικές σειρές. Φοίτησε στο St John's College, Cambridge, από το 1701 έως το 1714. Το 1708 έδωσε μια αξιόλογη λύση στο πρόβλημα του «Κέντρου της Ταλάντωσης», η οποία παρέμεινε ανέκδοτη μέχρι το Μάιο του 1714. Όμως τότε η προτεραιότητα για τη λύση αμφισβητήθηκε από τον Johann Bernoulli. Η εργασία του Taylor «*Methodus Incrementorum Directa et Inversa*» (1715) προσέθεσε ένα νέο κλάδο στα μαθηματικά, αυτόν του «Λογισμού Πεπερασμένων Διαφορών». Χρησιμοποίησε τη μέθοδο για τον προσδιορισμό της μορφής της «κίνησης της παλλόμενης χορδής». Αυτό το έργο περιείχε τον περίφημο «τύπος του Taylor», η σπουδαιότητα του οποίου αναγνωρίστηκε το 1772, όταν ο Joseph Louis Lagrange τον χαρακτήρισε ως το «κύριο θεμέλιο του Διαφορικού Λογισμού». Ο Taylor εξελέγη μέλος της Royal Society of London το 1712, και συμμετείχε στην επιτροπή για την εκδίκαση της ιστορικής διαμάχης μεταξύ του Sir Isaac Newton και του Gottfried Leibniz. Υπηρέτησε ως Γραμματέας της Εταιρείας από το 1714 έως το 1718. Ως μαθηματικός, ήταν ο μόνος Άγγλος, μετά τον Isaac Newton και το Roger Cotes, που μπορούσαν να επικοινωνούν με την οικογένεια των Bernoullis.

Επομένως, $|\cos J| \leq \frac{e^{r_1} + 1}{2} = M$, όπου $|J| = r_1$. Τώρα θέτοντας $n = 2m + 1$ στη σχέση (2.6) προκύπτει ότι

$$\left| \cos z - \sum_{k=1}^m (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} \right| = |R_n(z)| \leq \frac{e^{r_1} + 1}{2} \frac{r_1}{r_1 - r} \left(\frac{r}{r_1} \right)^n$$

$$= \frac{e^{r_1} + 1}{r_1 - r} \frac{r_1}{2} \left(\frac{r}{r_1} \right)^{2m+1},$$

για κάθε $|z| \leq r < r_1$.



Εικόνα 11.2: Maclaurin, Colin (1698 - 1746)

Παράδειγμα 11.2.10. (i) Για τη συνάρτηση $f(z) = e^z$ έχουμε $f^n(z) = e^z$, δηλαδή $f^n(0) = 1$ έτσι ισχύει

$$e^z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \text{ όπου } |z| < \infty.$$

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να πάρουμε τα επόμενα αναπτύγματα Maclaurin:

$$(ii) \quad \sin z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}, \text{ όπου } |z| < \infty.$$

$$(iii) \quad \sinh z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}, \text{ όπου } |z| < \infty.$$

$$(iv) \quad \cosh z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \text{ όπου } |z| < \infty.$$

$$(v) \quad \frac{1}{1+z} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n z^n, \text{ γεωμετρική σειρά όπου } |z| < 1.$$

$$(vi) \quad \frac{1}{1+w^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n w^{2n}, \text{ γεωμετρική σειρά όπου } |w| < 1.$$

$$(vii) \quad \frac{1}{1-c} = 1 + c + c^2 + \dots + c^n + \dots, \text{ γεωμετρική σειρά όπου } |c| < 1.$$

11.2.2 Πρακτικές Μέθοδοι Εύρεσης Δυναμοσειρών

Υπάρχει ένας αριθμός απλών διαδικασιών μέσω των οποίων μπορούμε πρακτικά να βρούμε άμεσα τη δυναμοσειρά-ανάπτυγμα ενός μεγάλου αριθμού συναρτήσεων (αναλυτικών) αποφεύγοντας έτσι πολύπλοκες και χρονοβόρες διαδικασίες που θα πρέπει να ακολουθήσουμε αν θέλουμε να εφαρμόσουμε τον τύπο που μας δίνει το Θεώρημα Taylor. Μερικές από αυτές τις τεχνικές θα αναπτυχθούν

- (n) $f(z) = \arctan z$, $z_0 = 0$, (πρώτα μελετήστε την παράγωγο της συνάρτησης)
 (o) $f(z) = \cos(z^2) - \sin z$, $z_0 = 0$, (p) $f(z) = \frac{\cos(z^2)-1}{z}$, $z_0 = 0$,
 (q) $f(z) = \cosh(3z) - \sinh(3z)$, $z_0 = 0$, (r) $f(z) = \frac{1}{4i+z^2}$, $z_0 = -2 + 5i$,

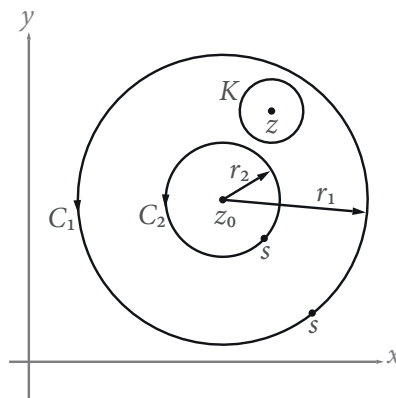
11.3 Σειρές Laurent

Έστω C_1, C_2 δύο ομόκεντροι κύκλοι με ακτίνες r_1, r_2 , αντίστοιχα ($r_1 > r_2$) και κέντρο z_0 . Τότε ισχύει το ακόλουθο αποτέλεσμα του Laurent¹:

Θεώρημα 11.3.1. (Θεώρημα Laurent) Έστω ότι η συνάρτηση $f(z)$ είναι αναλυτική παντού μέσα στους κύκλους C_1, C_2 και στο δακτύλιο μεταξύ αυτών, όπως φαίνεται στο Σχήμα 11.2). Τότε σε κάθε σημείο z σε αυτό το πεδίο η



Εικόνα 11.3: Laurent, Alphonse (1813-1854)



Σχήμα 11.2: Σχήμα Θεωρήματος Laurent 11.3.1.

συνάρτηση $f(z)$, παριστάνεται από το ανάπτυγμα:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}, \quad (3.1)$$

¹Laurent, Pierre Alphonse (18 Ιουλίου 1813-2 Σεπτεμβρίου 1854). Γάλλος μαθηματικός γνωστός για τις ομώνυμες σειρές, που γενίκευσαν τις σειρές Taylor. Τα αποτελέσματα του περιέχονται σε μια μελέτη που υποβλήθηκε για το Μεγάλο Βραβείο της Académie des Sciences à Paris το 1843, αλλά η υποβολή έγινε εκπρόθεσμα, η εργασία δεν δημοσιεύτηκε και ποτέ δεν κρίθηκε για το βραβείο. Ο Laurent πέθανε σε ηλικία μόλις 41 ετών στο Παρίσι. Το έργο του δημοσιεύτηκε μετά το θάνατό του.

12

Ολοκληρωτικά Υπόλοιπα και Εφαρμογές

Περιεχόμενα

- 12.1 Ολοκληρωτικά Υπόλοιπα - Προβλήματα.
- 12.2 Θεώρημα Ολοκληρωτικών Υπολοίπων - Προβλήματα.
- 12.3 Γενικευμένα Ολοκληρώματα Ρητών Συναρτήσεων / Κύρια Τιμή- Προβλήματα.
- 12.4 Ολοκληρώματα Fourier - Προβλήματα.
- 12.5 Ολοκλήρωση γύρω από Κλαδικό Σημείο / Κλαδικές Τομές - Προβλήματα.
- 12.6 Ορισμένα Ολοκληρώματα Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων - Προβλήματα.
- 12.7 Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace - Προβλήματα.
- 12.8 Άθροισμα Σειρών - Προβλήματα.
- 12.9 Αρχή Ορίσματος - Προβλήματα.
- 12.10 Θεωρία Ευστάθειας: 12.10.1 Εισαγωγή, 12.10.2 Αλγεβρικά Κριτήρια Ευστάθειας, 12.10.3 Αλγεβρικά Κριτήρια Ευστάθειας και Αρχή Ορίσματος - Προβλήματα.
- 12.11 Ολοκληρωτικό Υπόλοιπο στο Άπειρο - Προβλήματα.

12.1 Ολοκληρωτικά Υπόλοιπα

Γνωρίζουμε ότι αν η συνάρτηση $f(z)$ είναι παντού αναλυτική σε μια γειτονιά του σημείου $z = a$, τότε ισχύει

$$\oint_C f(z) dz = 0, \quad (1.1)$$

σε κάθε κλειστό δρόμο C σ' αυτή τη γειτονιά. Αν εντούτοις η συνάρτηση $f(z)$ έχει μια μεμονωμένη ανωμαλία στο σημείο $z = a$, τότε εν γένει το

$$\oint_C f(z) dz \neq 0.$$

Σ' αυτή την περίπτωση μπορούμε να παραστήσουμε τη συνάρτηση $f(z)$ σε ανάπτυγμα Laurent

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-a)^n}, \quad (1.2)$$

το οποίο συγκλίνει στην περιοχή $0 < |z-a| < R$, όπου R η απόσταση του $z = a$ από το πλησιέστερο ανώμαλο σημείο της συνάρτησης $f(z)$. Από το Θεώρημα Laurent έχουμε ότι

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz.$$

Επομένως αποδεικνύεται ότι ισχύει

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i b_1, \quad (1.3)$$

όπου η ολοκλήρωση γίνεται κατά τη θετική φορά γύρω από ένα απλό, κλειστό δρόμο C , που βρίσκεται στην περιοχή $0 < |z-a| < R$ και περιέχει το σημείο $z = a$ στο εσωτερικό του.

Ορισμός 12.1.1. (Ολοκληρωτικό Υπόλοιπο) Ο συντελεστής b_1 στο ανάπτυγμα (1.2) της συνάρτησης $f(z)$ ονομάζεται **ολοκληρωτικό υπόλοιπο** της συνάρτησης $f(z)$ στο $z = a$ και συμβολίζεται

$$b_1 = \text{Res}_{z=a} f(z).$$

Έχουμε δει ότι τα αναπτύγματα Laurent μπορούν να επιτευχθούν χωρίς να χρησιμοποιηθεί ο ολοκληρωτικός τύπος για τους συντελεστές. Επομένως μπορούμε να ορίσουμε το ολοκληρωτικό υπόλοιπο και στη συνέχεια από τον τύπο (1.3) να υπολογίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα.

[1] Να βρεθεί το ολοκληρωτικό υπόλοιπο στα ανώμαλα σημεία των ακόλουθων συναρτήσεων:

$$(a) f(z) = \frac{\cos 2z}{z^4}, \quad (b) f(z) = \frac{e^z}{(z+\pi i)^6}, \quad (c) f(z) = \frac{z^2+11z+1}{(z+1)^2(z-2)}, \quad (d) f(z) = \sec(z),$$

$$(e) f(z) = \tan z, \quad (f) f(z) = \frac{z}{z^2+1}, \quad \text{στα (i) } z = i, \text{ (ii) } z = -i \quad (g) f(z) = \frac{z}{z^2+2z+5},$$

$$(h) f(z) = \frac{z}{\cosh z - \cos z}, \quad \text{στο } z = 0, \quad (j) f(z) = \frac{z}{z - \sin z}, \quad \text{στο } z = 0,$$

[2] Να βρεθεί το ολοκληρωτικό υπόλοιπο στα ανώμαλα σημεία των ακόλουθων συναρτήσεων, που βρίσκονται μέσα στον ανοικτό δίσκο $|z| < 2$:

$$(a) f(z) = \frac{3z^2}{1-z^4}, \quad (b) f(z) = \frac{4-3z}{z^3-3z^2+2z}, \quad (c) f(z) = \frac{6-4z}{z^3+3z^2}, \quad (d) f(z) = \frac{-z^2-22z+8}{z^3-5z^2+4z},$$

12.2 Θεώρημα Ολοκληρωτικών Υπολοίπων

Στα προηγούμενα είδαμε πως να υπολογίζουμε το (επικαμπύλιο) ολοκλήρωμα συναρτήσεων, οι οποίες έχουν μια μόνο μεμονωμένη ανωμαλία μέσα στο κλειστό δρόμο ολοκλήρωσης. Εδώ θα επεκταθεί αυτή η μέθοδος στην περίπτωση περισσότερων μεμονωμένων ανωμαλιών.

Θεώρημα 12.2.1. (Θεώρημα Ολοκληρωτικών Υπολοίπων) Έστω ότι η $f(z)$ είναι μια αναλυτική συνάρτηση μέσα και πάνω στον απλό κλειστό δρόμο C εκτός ενός πεπερασμένου πλήθους μεμονωμένων ανώμαλων σημείων $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$ μέσα στο C . Τότε ισχύει

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^m \text{Res}_{z=a_j} f(z), \quad (2.1)$$

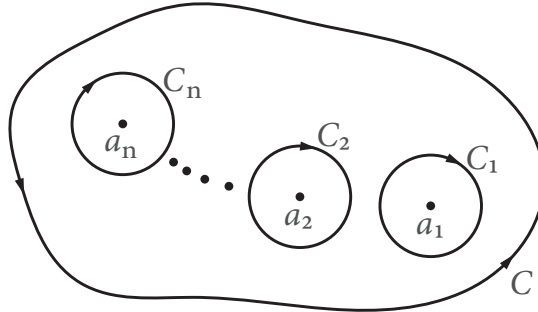
όπου η ολοκλήρωση γίνεται κατά τη θετική φορά στο C .

Απόδειξη. Γύρω από τα σημεία a_j γράφουμε κύκλους C_j με ακτίνα αρκετά μικρή ώστε να μην τέμνονται οι κύκλοι C_j και ο δρόμος C μεταξύ τους (βλέπε Σχήμα 12.1). Τότε η $f(z)$ είναι αναλυτική στο χωρίο D , που φράσσεται από το δρόμο C και τους κύκλους C_j και το οποίο είναι πολλαπλά συνεκτικό. Από το ολοκλήρωμα Θεώρημα Cauchy έχουμε

$$\oint_C f(z) dz + \oint_{C_1} f(z) dz + \oint_{C_2} f(z) dz + \dots + \oint_{C_m} f(z) dz = 0,$$

όπου η ολοκλήρωση στο δρόμο C γίνεται κατά τη θετική φορά και στα C_j κατά την αρνητική. Αντιστρέφουμε τη φορά ολοκλήρωσης στα C_j , οπότε προκύπτει

$$\oint_C f(z) dz = \oint_{C_1} f(z) dz + \oint_{C_2} f(z) dz + \dots + \oint_{C_m} f(z) dz,$$



Σχήμα 12.1: Σχήμα για Θεώρημα 12.2.1.

όπου τώρα η ολοκλήρωση σ' όλους τους δρόμους γίνεται κατά τη θετική φορά. Επομένως σύμφωνα με την προηγούμενη παράγραφο, σχέση (1.6), έχουμε

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^m \text{Res}_{z=a_j} f(z). \quad \diamond$$

Το παραπάνω Θεώρημα έχει διάφορες σημαντικές εφαρμογές κυρίως σε σχέση με τον υπολογισμό μιγαδικών και πραγματικών ολοκληρωμάτων.

Παράδειγμα 12.2.2. Να υπολογισθεί το ακόλουθο ολοκλήρωμα κατά τη θετική φορά πάνω σε οποιοδήποτε απλό κλειστό δρόμο C έτσι ώστε **(a)** τα σημεία $z = 0$ και $z = 1$ να είναι μέσα στο δρόμο C , **(b)** το σημείο $z = 0$ να είναι μέσα στο C και το $z = 1$ έξω, **(c)** το σημείο $z = 1$ να είναι μέσα στο C και το $z = 0$ έξω και τέλος **(d)** τα σημεία $z = 0$, $z = 1$ να είναι έξω από το C :

$$I = \oint_C \frac{4 - 3z}{z^2 - z} dz.$$

Λύση. Η ολοκληρωτέα συνάρτηση $f(z) = \frac{4-3z}{z^2-z}$ έχει απλούς πόλους τα σημεία $z = 0$ και $z = 1$, με ολοκληρωτικά υπόλοιπα, σύμφωνα με το Παράδειγμα 12.1.4 της προηγούμενης Ενότητας 12.1

$$\text{Res}_{z=0} f(z) = \left[\frac{4-3z}{2z-1} \right]_{z=0} = -4, \quad \text{Res}_{z=1} f(z) = \left[\frac{4-3z}{2z-1} \right]_{z=1} = 1.$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Ολοκληρωτικών Υπολοίπων 12.2.1 βρίσκουμε κατά περίπτωση:

$$\textbf{(a)} \quad \oint_{C_1} f(z) dz = 2\pi i(-4 + 1) = -6\pi i \quad (\text{βλέπε Σχήμα 12.2}),$$

$$\textbf{(b)} \quad \oint_{C_2} f(z) dz = 2\pi i(-4 + 0) = -8\pi i \quad (\text{βλέπε Σχήμα 12.3}),$$

[4] Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα $\oint_C f(z)dz$ των ακόλουθων συναρτήσεων, στις περιπτώσεις όπου (i) $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 4\}$ και (ii) $C = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| = 3/2\}$, διατρεχόμενος κατά τη θετική φορά:

$$(a) f(z) = \frac{z}{z^2-1}, \quad (b) f(z) = \frac{z+1}{z^2(z+2)}, \quad (c) f(z) = \frac{1}{z(z-2)^3}, \quad (d) f(z) = \frac{z^2}{(z^2+3z+2)^2},$$

$$(e) f(z) = \frac{1}{z^2+z+1}, \quad (f) f(z) = \frac{1}{z(z^2+6z+4)},$$

[5] Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα $\oint_C f(z)dz$ των ακόλουθων συναρτήσεων, στις περιπτώσεις όπου (i) $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ και (ii) $C = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| = 3/2\}$, διατρεχόμενος κατά τη θετική φορά:

$$(a) f(z) = \tan z, \quad (b) f(z) = \frac{1}{z \sin z}, \quad (c) f(z) = \frac{1}{z^2 \sin z}, \quad (d) f(z) = \frac{e^{-z}}{z^2},$$

$$(e) f(z) = ze^{1/z}, \quad (f) f(z) = \frac{z}{\cos z},$$

12.3 Γενικευμένα Ολοκληρώματα Ρητών Συναρτήσεων-Κύρια Τιμή

Τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα αποδεικνύονται πολύ χρήσιμα στον υπολογισμό πραγματικών γενικευμένων ολοκληρωμάτων ορισμένου τύπου. Γνωρίζουμε ότι ένα γενικευμένο ολοκλήρωμα της μορφής

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx, \quad (3.1)$$

όπου η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής παντού στο $\mathbb{R}$, συγκλίνει και έχει τιμή

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^0 f(x)dx + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f(x)dx, \quad (3.2)$$

όταν τα επιμέρους όρια υπάρχουν. Ένας άλλος σημαντικός αριθμός συνδεδεμένος με το ολοκλήρωμα (3.1) είναι η **κύρια τιμή Cauchy (Κ.Τ.)** του ολοκληρώματος (3.1) ορισμένη από την εξίσωση

$$K.T. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x)dx, \quad (3.3)$$

αν το όριο στο δεξιό μέρος συγκλίνει.

Πρόταση 12.3.1. (Κύρια Τιμή Cauchy) Αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα (3.1) συγκλίνει, τότε η τιμή του συμπίπτει με την Κύρια Τιμή Cauchy (3.3).

Το αντίστροφο δεν ισχύει εν γένει. Ως ένα αντιπαράδειγμα μπορούμε να θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = x$. Τότε η κύρια τιμή Cauchy αυτής είναι

$$K.T. \int_{-\infty}^{+\infty} xdx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R xdx = 0.$$

πραγματικό άξονα αλλά κατά τα λοιπά ικανοποιεί τις υπόλοιπες υποθέσεις του Θεωρήματος 12.3.5, τότε η κύρια τιμή Cauchy του ολοκληρώματος $\int_{-\infty}^{\infty} e^{imx} f(x) dx$ είναι ίση με $2i\pi$ φορές το άθροισμα των υπολοίπων της συνάρτησης $e^{imz} f(z)$ στους πόλους της στο άνω ημιεπίπεδο συν $i\pi$ φορές το άθροισμα των υπολοίπων της συνάρτησης $e^{imz} f(z)$ στους πόλους της στον πραγματικό άξονα. [Υπόδειξη: Να χρησιμοποιηθεί ένας απλός κλειστός δρόμος, όπως ο εμφανιζόμενος στο Σχήμα 12.10, με κατάλληλες εσοχές στους πόλους πάνω στον πραγματικό άξονα.]

12.4 Ολοκληρώματα Fourier

Θα χρησιμοποιήσουμε τη θεωρία των ολοκληρωτικών υπολοίπων για τον υπολογισμό των Ολοκληρώματα Fourier, δηλαδή ολοκληρωμάτων της μορφής

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) \cos(mx) dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) \sin(mx) dx, \quad (4.1)$$

όπου η συνάρτηση $F(z)$ είναι αναλυτική στο άνω ημιεπίπεδο του μιγαδικού επιπέδου εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος πόλων, κανείς από τους οποίους όμως δεν κείται στον πραγματικό άξονα.

Εδώ πρέπει να σημειωθεί ότι η μέθοδος της προηγούμενης Ενότητας 12.3 δεν μπορεί να εφαρμοσθεί άμεσα, διότι οι συναρτήσεις $|\cos(mz)|$ και $|\sin(mz)|$ συμπεριφέρονται όπως οι συναρτήσεις $\sinh y$ ή e^y , καθώς το $y \rightarrow \infty$. Όμως παρατηρούμε ότι τα ολοκληρώματα (4.1) αποτελούν το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του ολοκληρώματος

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)}{q(x)} e^{imx} dx, \quad (4.2)$$

και το μέτρο της e^{imz} είναι το e^{-my} , το οποίο είναι φραγμένο στο άνω ημιεπίπεδο. Για ολοκληρώματα αυτής της μορφής ισχύουν τα ακόλουθα αποτελέσματα:

Θεώρημα 12.4.1. (Θεώρημα Γενικευμένων Ολοκληρωμάτων Fourier) Αν η συνάρτηση $F(z)$ είναι αναλυτική στο άνω ημιεπίπεδο του μιγαδικού επιπέδου εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος πόλων, κανείς από τους οποίους δεν κείται στον πραγματικό άξονα, και συγχρόνως η συνάρτηση $zF(z)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο μηδέν καθώς το $z \rightarrow \infty$ από τιμές που βρίσκονται στο άνω ημιεπίπεδο (για τις οποίες δηλαδή ισχύει $0 \leq \arg z \leq \pi$), τότε

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(mx) F(x) dx &= -2\pi \sum \text{φανταστικά μέρη των υπολοίπων της } e^{imz} F(z) \\ &\quad \text{σ' όλους τους πόλους στο άνω ημιεπίπεδο,} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(mx) F(x) dx &= +2\pi \sum \text{πραγματικά μέρη των υπολοίπων της } e^{imz} F(z) \\ &\quad \text{σ' όλους τους πόλους στο άνω ημιεπίπεδο,} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Απόδειξη. Η απόδειξη του θεωρήματος είναι άμεση απόρροια των συμπερασμάτων του Θεωρήματος 12.3.5, λαμβάνοντας υπόψη τις παρατηρήσεις στην αρχή αυτής της ενότητας. $\diamond$

Τα επόμενα παραδείγματα μας δείχνουν τη μέθοδο υπολογισμού των Γενικευμένων Ολοκληρωμάτων Fourier.

Παράδειγμα 12.4.2. Να αποδειχθεί ότι

$$(i) I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{\pi}{e}, \quad (ii) I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{(x^2 + 1)^2} dx = 0. \quad (4.4)$$

Λύση. (i) Το ολοκλήρωμα I_1 αποτελεί το πραγματικό μέρος του

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

Η συνάρτηση $f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2 + 1)^2}$ είναι αναλυτική παντού εκτός από τους πόλους τάξης 2 στα σημεία $z_1 = i, z_2 = -i$. Ο πόλος $z_1 = i$ βρίσκεται στο εσωτερικό της ημικυκλικής περιοχής με σύνορο, που αποτελείται από το τμήμα $-R \leq x \leq R, y = 0$ και το άνω μισό του κύκλου $|z| = R, R > 1$. Δείτε για παράδειγμα το Σχήμα 12.13, όπου θεωρούμε ότι ισχύει $|z| = R, R > 1$. Ολοκληρώνοντας την $f(z)$ κατά τη θετική φορά, βρίσκουμε

$$\int_{-R}^{+R} \frac{e^{ix}}{(x^2 + 1)^2} dx = 2\pi i B_1 - \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{(z^2 + 1)^2} dz. \quad (4.5)$$

όπου $B_1 = \text{Res } f(z)$. Από τον τύπο (1.6) έχουμε

$$B_1 = \text{Res}_{z=i} f(z) = \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d^2}{dz^2} (z - i)^2 f(z) = \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d^2}{dz^2} \frac{e^{iz}}{(z + i)^2} = -\frac{i}{2e}. \quad (4.6)$$

(ii) Για να αποδείξουμε ότι το ολοκλήρωμα I_2 μηδενίζεται καθώς το $R \rightarrow \infty$, παρατηρούμε ότι για κάθε $z \in C_R$ ισχύει $|z^2 + 1|^2 \geq (R^2 - 1)^2$. Τότε, επειδή $|e^{iz}| = |e^{-y}| \leq 1$, για $y \geq 0$, προκύπτει ότι

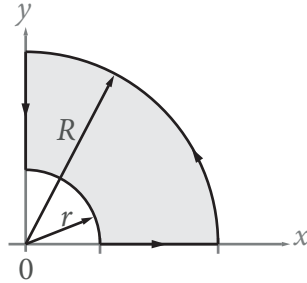
$$\left| \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{(z^2 + 1)^2} dz \right| \leq \frac{\pi R}{(R^2 - 1)^2} \quad (4.7)$$

Σύμφωνα με τις σχέσεις (4.5), (4.6) η σχέση (4.4) έρχεται στη μορφή

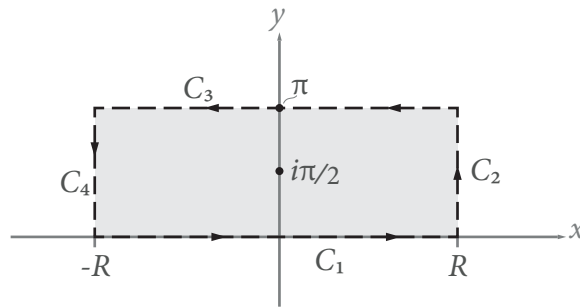
$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^{+R} \frac{e^{ix}}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{\pi}{e}.$$

Πράγμα, που συνεπάγεται ότι

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^{+R} \frac{\cos x}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{\pi}{e}.$$



Σχήμα 12.22: Σχήμα Προβλήματος 5.



Σχήμα 12.23: Σχήμα Προβλήματος 6.

12.5 Ολοκλήρωση γύρω από Κλαδικό Σημείο - Κλαδικές Τομές

Υπάρχουν μιγαδικές συναρτήσεις οι οποίες δεν έχουν πόλους ή ουσιώδη ανώμαλα σημεία για καμιά τιμή του $z \neq \infty$, αλλά δεν είναι ούτε αναλυτικές σε όλο το πεδίο $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Αυτό φαίνεται καθαρά αν για παράδειγμα πάρουμε τη συνάρτηση $f_a(z) =: z^a$, $a \in (0, 1)$. Θέτοντας $z = re^{i\theta}$, $r \geq 0$, $\theta \in (-\pi, \pi]$ και εξετάζοντας τις τιμές που παίρνει η συνάρτηση $f_a(z)$ σε μια γειτονιά του αρνητικού πραγματικού ημιάξονα $z = x \leq 0$ βλέπουμε ότι έχουμε

$$f_a(re^{-i\pi}) = r^a e^{-ia\pi} \quad \text{και} \quad f_a(re^{i\pi}) = r^a e^{ia\pi} \quad (5.1)$$

όπου ισχύει

$$\frac{f_a(re^{-i\pi})}{f_a(re^{i\pi})} = e^{2ia\pi} \neq 1 \quad \text{για κάθε} \quad a \notin \mathbb{Z} \quad (5.2)$$

Αν για παράδειγμα πάρουμε το $a = 1/2$, τότε ισχύει $f_{1/2}(re^{-i\pi/2}) = -ir$ ενώ $f_{1/2}(re^{i\pi/2}) = ir$. Η παρατήρηση αυτή μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι όλα τα σημεία του αρνητικού πραγματικού ημιάξονα $z = x \leq 0$ είναι σημεία ιδιομορφίας της συγκεκριμένης συνάρτησης, αφού σε αυτά τα σημεία η συνάρτηση $f_a(z)$, $a \in (0, 1)$ όχι μόνο δεν είναι αναλυτική αλλά ούτε καν συνεχής.

Παρατήρηση 12.5.1. Θα πρέπει σε αυτό το σημείο να τονισθεί ότι τον παραπάνω ημιάξονα ασυνέχειας μπορούμε να τον επιλέξουμε με όποια κλίση θέλουμε. Γι αυτό αρκεί να αλλάξουμε το διάστημα ορισμού της γωνίας θ , για παράδειγμα αν έχουμε $\theta \in (-\pi + \omega, \pi + \omega]$ η ασυνέχεια θα εμφανισθεί στον ημιάξονα $z = re^{i(\pi+\omega)} = -re^{i\omega}$. Αν τώρα περαιτέρω διευρύνουμε το πεδίο ορισμού της γωνίας $\theta \in (-\infty, +\infty)$, βλέπουμε ότι σε κάθε σημείο

$$\bar{z} = \bar{x} + i\bar{y} = \bar{r}e^{i\bar{\theta}} = \bar{r}e^{i(\bar{\theta}+2n\pi)}, \quad \bar{\theta} \in (-\pi, \pi], \quad n \in \mathbb{Z} \quad (5.3)$$

αντιστοιχεί ένα άπειρο πλήθος τιμών της συνάρτησης $f_a(z)$

$$\bar{w}_n = \bar{r}^a e^{ia\bar{\theta}} e^{2an\pi i}, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (5.4)$$

οι οποίες εξαρτώνται από την εκάστοτε τιμή του $n \in \mathbb{Z}$.

Οι παραπάνω παρατηρήσεις οδήγησαν τον Bernhard Riemann να θεωρήσει τις τιμές

$$\bar{z}_n = \bar{r}e^{i(\bar{\theta}+2n\pi)} = \bar{r} \cos \bar{\theta} + i\bar{r} \sin \bar{\theta}, \quad \bar{\theta} \in (-\pi, \pi], \quad n \in \mathbb{Z} \quad (5.5)$$

ως διαφορετικές παρά το γεγονός ότι αντιστοιχούν στις ίδιες καρτεσιανές συντεταγμένες, παρακάμπτοντας έτσι τις έννοιες της συνέχειας και της “πλειονοτιμίας”. Για να κάνουμε αυτή την υπέρβαση θεωρούμε ότι το βασικό επίπεδο Gauss $\mathbb{C}$, όπου ισχύει $\theta \in (-\pi, \pi]$ παρουσιάζει μια τομή κατά μήκος του αρνητικού ημιάξονα και ότι, όταν το $\theta > \pi$ συνεχίζεται πέραν της τομής “ελικοειδώς” προς τα επάνω σε πιο πάνω επίπεδα, ενώ για $\theta < -\pi$ συνεχίζεται πέραν της τομής “ελικοειδώς” προς τα κάτω σε πιο κάτω επίπεδα.

Έτσι το σημείο $\bar{z}_1$ βρίσκεται ακριβώς πάνω από το σημείο $\bar{z}_0$, το σημείο $\bar{z}_2$ βρίσκεται ακριβώς πάνω από το σημείο $\bar{z}_1$, κ.λ.π., ενώ αντίστοιχα το σημείο $\bar{z}_0$ βρίσκεται ακριβώς πάνω από το σημείο $\bar{z}_{-1}$, το σημείο $\bar{z}_{-1}$ βρίσκεται ακριβώς πάνω από το σημείο $\bar{z}_{-2}$ κ.λ.π. Έτσι με αυτή τη θεώρηση όλα αυτά τα άπειρα το πλήθος σημεία έχουν τις ίδιες καρτεσιανές συντεταγμένες. Η ίδια προσέγγιση εφαρμόζεται σε κάθε άλλη συνάρτηση, προκειμένου να αρθούν φαινόμενα ασυνέχειας ή/και πλειονοτιμίας.

Ορισμός 12.5.2. (Κλαδικά Σημεία) Η γραμμή κατά μήκος της οποίας γίνεται η τομή, ονομάζεται **κλαδική τομή (branch cuts)** και τα άκρα αυτής ονομάζονται **κλαδικά**

12.6 Ορισμένα Ολοκληρώματα Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων

Με τη βοήθεια των ολοκληρωτικών υπολοίπων θα υπολογίσουμε ορισμένα ολοκληρώματα του τύπου

$$\int_0^{2\pi} F(\cos \theta, \sin \theta) d\theta. \quad (6.1)$$

Επειδή το θ μεταβάλλεται από 0 έως 2π , μπορεί να θεωρηθεί ως το όρισμα ενός μιγαδικού αριθμού z στο μοναδιαίο κύκλο με κέντρο την αρχή: δηλαδή θέτουμε $z = e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Οπότε προκύπτουν οι σχέσεις

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i}, \quad d\theta = \frac{dz}{iz}. \quad (6.2)$$

Έτσι συγκεκριμένα, έχουμε το παραπάνω αποτέλεσμα για αυτή την οικογένεια των συναρτήσεων.

Θεώρημα 12.6.1. (Θεώρημα Ορισμένων ολοκληρωμάτων Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων) Αν η συνάρτηση $F(\theta) = F(\cos \theta, \sin \theta)$ είναι μια ρητή συνάρτηση των $\cos \theta, \sin \theta$, η οποία είναι φραγμένη στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $0 \leq \theta \leq 2\pi$ και αν $f(z)$ είναι η συνάρτηση που προκύπτει από την $F(\theta)$ και τις σχέσεις (6.2), τότε το ολοκλήρωμα $\int_0^{2\pi} F(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$ είναι ίσο με $2i\pi$ φορές το άθροισμα των υπολοίπων της συνάρτησης $f(z)/iz$ σε κάθε πόλο, που βρίσκεται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου.

Απόδειξη. Με τις αντικαταστάσεις (6.2) το (6.1) γίνεται επικαμπύλιο μιγαδικό ολοκλήρωμα της μορφής

$$\int_C F\left(\frac{z - z^{-1}}{2i}, \frac{z + z^{-1}}{2}\right) \frac{dz}{iz}. \quad (6.3)$$

όπου C ο μοναδιαίος κύκλος $|z| = 1$, που διαγράφεται κατά τη θετική φορά. Όταν η ολοκληρωτέα συνάρτηση στην τελευταία σχέση (6.3), δηλαδή η $f(z)/iz$, είναι μια ρητή συνάρτηση του z , μπορούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα με τη χρήση του Θεωρήματος των Ολοκληρωτικών Υπολοίπων, αφού βρεθούν οι ρίζες του παρονομαστή και καμιά από αυτές δεν βρίσκεται πάνω στο μοναδιαίο κύκλο C . $\diamond$

Παράδειγμα 12.6.2. Να αποδειχθεί ότι

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a \sin \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}}, \quad -1 < a < 1.$$

Λύση. Για $a = 0$ το αποτέλεσμα είναι προφανές. Έστω λοιπόν ότι $a \neq 0$, τότε με την αντικατάσταση (6.2) το ολοκλήρωμα I έρχεται στη μορφή

$$\int_C \frac{2/a}{z^2 + (2i/a)z - 1} dz,$$

όπου C είναι ο μοναδιαίος κύκλος $|z| = 1$, που διαγράφεται κατά τη θετική φορά. Ο παρονομαστής έχει ρίζες τις

$$z_1 = \left(\frac{-1 + \sqrt{1 - a^2}}{a} \right) i, \quad z_2 = \left(\frac{-1 - \sqrt{1 - a^2}}{a} \right) i.$$

Έτσι η ολοκληρωτέα συνάρτηση γράφεται

$$f(z) = \frac{2/a}{(z - z_1)(z - z_2)}.$$

Επειδή $-1 < a < 1$, ισχύει

$$|z_2| = \frac{1 + \sqrt{1 - a^2}}{|a|} > 1.$$

Επίσης, επειδή $|z_1 z_2| = 1$, έπεται ότι $|z_1| < 1$. Επομένως δεν υπάρχουν ανώμαλα σημεία στο μοναδιαίο κύκλο C και το μόνο εσωτερικό ανώμαλο σημείο είναι ο απλός πόλος z_1 . Έτσι το αντίστοιχο ολοκληρωτικό υπόλοιπο είναι

$$b_1 = \operatorname{Res}_{z=z_1} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) f(z) = \frac{2/a}{z_1 - z_2} = \frac{1}{i\sqrt{1 - a^2}}.$$

Βρήκαμε λοιπόν ότι

$$I = \int_C \frac{2/a}{z^2 + (2i/a)z - 1} dz = 2\pi i b_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}},$$

πράγμα που ολοκληρώνει την απόδειξη του προβλήματος.

Παράδειγμα 12.6.3. Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2p \cos \theta + p^2}, \quad 0 < p < 1.$$

Λύση. Θεωρούμε το $z = e^{i\theta}$, οπότε $z \in C =: \{|z| = 1\}$. Έτσι έχουμε

$$I = \int_C \frac{dz/iz}{1 - 2p(1/2)(z + (1/z)) + p^2} = \int_C \frac{dz}{i(1 - pz)(z - p)},$$

$$(a) \int_0^{2\pi} \frac{3d\theta}{4+\cos^2 \theta}, \quad (b) \int_0^{2\pi} \frac{\sin(2\theta)d\theta}{\cos \theta + \sin \theta}, \quad (c) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\cos \theta + \sin^2 \theta}, \quad (d) \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \theta d\theta}{3+\cos^2 \theta},$$

[7] Να αποδειχθεί ότι

$$I = \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cos(nx - \sin x) dx = \frac{2\pi}{n!}$$

[8] Να αποδειχθεί ότι (a) $\int_0^{2\pi} (\cos^3 x + \sin^2 x) dx = \pi$ και b) $\int_0^{2\pi} \cos x \sin x dx = 0$.

[9] Να αποδειχθεί ότι (a) $\int_0^{2\pi} \frac{[1+\cos(3\theta)]d\theta}{1-2p\cos\theta+p^2} = 2\pi \frac{1-p+p^2}{1-p}$, $0 < p < 1$,

b) $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} = \frac{2\pi}{ab}$, $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ και

c) $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{[a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta]^2} = \frac{\pi(a^2+b^2)}{a^3 b^3}$, $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

12.7 Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace

Στο σύγγραμμα [211, Κεφάλαιο 7] η εύρεση του αντίστροφου Μετασχηματισμού Laplace μιας πραγματικής συνάρτησης $F(s)$, $s > c$, $c > 0$ πραγματικής μεταβλητής s είναι αποτέλεσμα της σωστής χρήσης των ιδιοτήτων του ευθύ και αντίστροφου Μετασχηματισμού Laplace, μιας ανάλυσης της εκ των πραγμάτων ρητής συνάρτησης $F(s)$ (ή με κορμό ένα ρητό κλάσμα) σε απλά κλάσματα συγκεκριμένης μορφής, ώστε να μπορεί να βρεθεί ο αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace καθενός από αυτά τα κλάσματα στους σχετικούς υπάρχοντες πίνακες (βλέπε [211, Κεφάλαιο 7, Ενότητα 7.10]).

Επίσης γίνεται εκμετάλλευση των πινάκων αυτών και σε γινόμενα απλών κλασμάτων μέσω των ιδιοτήτων της συνέλιξης. Στη συνέχεια γίνεται χρήση όλων αυτών των ιδιοτήτων και των Πινάκων του Μετασχηματισμού Laplace στην επίλυση συνήθων διαφορικών εξισώσεων στο ημιανοικτό διάστημα $[0, +\infty)$ (βλέπε [211, Κεφάλαιο 7, Ενότητες 7.5-7.8]), ολοκληρωτικών και ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων (βλέπε [211, Κεφάλαιο 7, Ενότητα 7.9]) καθώς και μερικών διαφορικών εξισώσεων παραβολικού και υπερβολικού τύπου σε άπειρα ή ημίπειρα διαστήματα, όπως κάποιος μπορεί να δει στο Κεφάλαιο 6, Ενότητα 6.3 στο παρόν σύγγραμμα.

Όμως λόγω των δυσκολιών που παρουσιάζει η προαναφερθείσα τεχνική αλλά και της ιδιαίτερης πολυπλοκότητας που παρουσιάζουν οι εμφανιζόμενες συναρτήσεις στην περίπτωση μερικών διαφορικών εξισώσεων σε φραγμένα πεδία, επιβάλλεται η διαμόρφωση μιας τεχνικής άμεσου υπολογισμού του αντίστροφου

Μετασχηματισμού Laplace δοθείσας συνάρτησης $F(s)$.

Σε αυτή την ενότητα θα αναπτύξουμε μια τεχνική άμεσου υπολογισμού του αντίστροφου Μετασχηματισμού Laplace δοθείσας μιγαδικής συνάρτησης $F(s)$ μιγαδικής μεταβλητής $s \in \mathbb{C}$. Αποτελεί απλή συνέπεια απευθείας υπολογισμών η επαλήθευση όλων των βασικών ιδιοτήτων του Μετασχηματισμού Laplace στην περίπτωση μιγαδικής μεταβλητής $s \in \mathbb{C}$.

Στο επόμενο Θεώρημα αποδεικνύουμε ότι ο μετασχηματισμός Laplace $F(s) = F(x+iy) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ μιας συνάρτησης $f(t)$, $t \in \mathbb{R}^+$ είναι μια αναλυτική συνάρτηση της μιγαδικής μεταβλητής $s \in \mathbb{C}$.

Θεώρημα 12.7.1. (Αναλυτικότητα Μετασχηματισμού Laplace) Αν η συνάρτηση $f(t)$ είναι τμηματικά συνεχής και εκθετικής τάξης α^1 σε κάθε πεπερασμένο διάστημα $t \in [0, T]$, $T > 0$, τότε ο μετασχηματισμός Laplace $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ της συνάρτησης $f(t)$ είναι μια αναλυτική συνάρτηση του $s = x + iy \in \mathbb{C}$ στο ημιεπίπεδο $x > \alpha$.

Απόδειξη. Έστω ότι ισχύει

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) &= F(x+iy) = u(x, y) + iv(x, y) \\ &= \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt = \int_0^\infty f(t)e^{-(x+iy)t} dt. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Τότε έχουμε

$$u(x, y) = \int_0^\infty f(t)e^{-xt} \cos(yt) dt \quad \text{και} \quad v(x, y) = \int_0^\infty f(t)e^{-xt} \sin(yt) dt.$$

Για να αποδείξουμε την αναλυτικότητα της συνάρτησης $F(x+iy)$, αποδεικνύουμε ότι οι συναρτήσεις έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους, οι οποίες ικανοποιούν τις εξισώσεις Cauchy - Riemann στο ημιεπίπεδο $x > \alpha$. Προφανώς ισχύει ότι

$$|f(t)e^{-xt} \cos(yt)| \leq |f(t)|e^{-xt} \quad \text{και} \quad |f(t)e^{-xt} \sin(yt)| \leq |f(t)|e^{-xt}$$

και επειδή η συνάρτηση $f(t)$ είναι $O(e^{\alpha t})$, υπάρχουν θετικές σταθερές M, T , έτσι ώστε για όλα τα $t > T$, $|f(t)| < Me^{\alpha t}$. Επομένως, όταν $t > T$ και $x \geq \alpha_0 > \alpha$, ισχύουν τα ακόλουθα

$$|f(t)e^{-xt} \cos(yt)| < e^{-xt} Me^{\alpha t} \leq Me^{(\alpha-x)t} \quad |f(t)e^{-xt} \sin(yt)| < e^{-xt} Me^{\alpha t} \leq Me^{(\alpha-x)t},$$

¹Η συνάρτηση $f(t)$ είναι εκθετικής τάξης α ή συνάρτηση $O(e^{\alpha t})$, αν υπάρχει $\alpha > 0$ και $k > 0$ έτσι ώστε $|f(t)| < ke^{\alpha t}$, για κάθε $t \in (M, +\infty)$, για κάποια θετική σταθερά M .

12.8 Άθροισμα Σειρών

Συχνά ο υπολογισμός του αθροίσματος μιας σειράς αποτελεί ένα πολύ δύσκολο στόχο. Στην παρούσα ενότητα θα δείξουμε ότι η θεωρία των ολοκληρωτικών υπολοίπων, μπορεί να συνδράμει σημαντικά στην εύρεση των αθροισμάτων ορισμένων κατηγοριών σειρών, μπορεί να επιτευχθεί με απλές μάλιστα διαδικασίες. Οι σειρές που μπορούν να υπολογιστούν είναι της μορφής

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{P(n)} \quad \text{και} \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{P(n)}, \quad (8.1)$$

όπου $P(z)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού 2 και ανώτερα, που δεν έχει ρίζα ακέραιο. Πράγματι, μπορεί να αποδειχθεί το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 12.8.1. (Θεώρημα Υπολογισμού Αθροίσματος Σειράς) Αν $z_1, z_2, z_3, \dots, z_k$, είναι οι (μη ακέραιες) ρίζες του πολυωνύμου $P(z)$, βαθμού ≥ 2 , τότε

$$(i) \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{P(n)} = -\pi \sum_{j=1}^k \operatorname{Res}_{z=z_j} \left(\frac{\cot(\pi z)}{P(z)} \right), \quad \text{και} \quad (8.2)$$

$$(ii) \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{P(n)} = -\pi \sum_{j=1}^k \operatorname{Res}_{z=z_j} \left(\frac{\csc(\pi z)}{P(z)} \right). \quad (8.3)$$

Απόδειξη. (i) Θεωρούμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\oint_{C_n} \left[\frac{\pi \cot(\pi z)}{P(z)} \right] dz,$$

όπου C_n είναι ο απλός κλειστός δρόμος, που φαίνεται στο Σχήμα 12.31). Επιλέγουμε n αρκετά μεγάλο έτσι ώστε όλες οι ρίζες z_i , $i = 1, 2, \dots, k$ να βρίσκονται εντός του C_n . Από το Θεώρημα Ολοκληρωτικών υπολοίπων προκύπτει ότι

$$\oint_{C_n} \left[\frac{\pi \cot(\pi z)}{P(z)} \right] dz = 2\pi i \sum \operatorname{Res} \frac{\pi \cot(\pi z)}{P(z)} \quad \text{στους πόλους εντός του } C_n,$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε όλα τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα του δεξιού μέλους και αποδεικνύουμε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \oint_{C_n} \left[\frac{\pi \cot(\pi z)}{P(z)} \right] dz = 0,$$

για να καταλήξουμε στο επιδιωκόμενο αποτέλεσμα, δηλαδή τη σχέση (8.2).

(ii) Για τη σχέση (8.3) ακολουθούμε την ίδια διαδικασία για τη συνάρτηση $\pi \csc(\pi z)/P(z)$ στη θέση της συνάρτησης $\pi \cot(\pi z)/P(z)$, που χρησιμοποιήθηκε παραπάνω. $\diamond$

$$\begin{aligned}
 & \text{(a)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^4+a^4}, \quad a > 0, \quad \text{(b)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{5(-1)^n}{n^4+a^4}, \quad a > 0, \quad \text{(c)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(4n+3)^2}, \\
 & \text{(d)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{4(-1)^n}{(4n+7)^2}, \quad \text{(e)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n^2+1)^2}, \quad \text{(f)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(9n^2+5)^2}, \quad \text{(g)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-2}, \\
 & \text{(h)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{3(-1)^n}{5n^4+16}, \quad \text{(i)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{10}{n^8-16}, \quad \text{(k)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^6+1}, \quad \text{(l)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^6+4}, \\
 & \text{(m)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^5+2}, \quad \text{(n)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^3+2},
 \end{aligned}$$

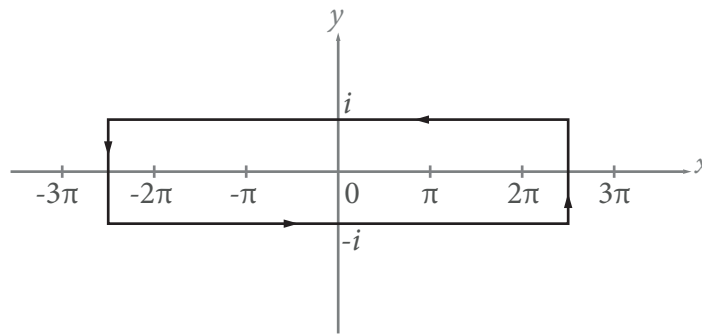
12.9 Αρχή Ορίσματος

Η θεωρία που θα αναπτυχθεί σε αυτή την ενότητα είναι συχνά χρήσιμη για τον προσδιορισμό του αριθμού των ριζών μιας συνάρτησης καθώς και τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων. Συγκεκριμένα, αποδεικνύεται το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 12.9.1. (Θεώρημα Cauchy) Έστω $f(z)$ μια αναλυτική συνάρτηση σ' ένα ανοικτό πεδίο $D \subset \mathbb{C}$ εκτός ενός πεπερασμένου αριθμού πόλων και C ένας απλός κλειστός δρόμος στο πεδίο D . Τότε ισχύει

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \# \text{ ριζών της } f(z) \text{ εντός } C \text{ μείον } \# \text{ πόλων της } f(z) \text{ εντός } C. \quad (9.1)$$

[Σημείωση. Γενική παρατήρηση για όλη αυτή την Ενότητα: Κάθε ρίζα και κάθε πόλος υπολογίζονται με την πολλαπλότητα τους]



Σχήμα 12.32: Αρχή Ορίσματος.

Απόδειξη. Θεωρούμε ότι η $f(z)$ έχει ένα πόλο τάξης m στο σημείο $z = a$ εντός του δρόμου C , όπως φαίνεται στο Σχήμα 12.32. Αναπτύσσουμε την $f(z)$ σε σειρά Laurent γύρω από το $z = a$ και έχουμε

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-a)^{m+1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \dots,$$

12.10 Θεωρία Ευστάθειας

12.10.1 Εισαγωγή

Σε πολλά προβλήματα αρχικών ή/και συνοριακών προβλημάτων διαφορικών εξισώσεων ή συστημάτων, στα οποία γνωρίζουμε από τη γενική θεωρία ότι υπάρχει μοναδική λύση, δεν είναι αναγκαίο για πρακτικούς αλλά και ουσιαστικούς λόγους να προχωρήσουμε στον ακριβή προσδιορισμό της λύσης του προβλήματος, ακόμα και όταν αυτό είναι δυνατόν να γίνει. Αυτό όμως που έχει μεγάλη σημασία είναι το είδος εξάρτησης της λύσης από τις αρχικές ή συνοριακές συνθήκες, δηλαδή αν η εξάρτηση είναι συνεχής ή όχι σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού.

Η συνεχής εξάρτηση της λύσης από τις συνθήκες συνδέεται με την **ευστάθεια** του συστήματος, δηλαδή μικρές διαταραχές (ή σφάλματα) στις συνθήκες (αρχικές ή/και συνοριακές) οδηγούν σε μικρές και ελεγχόμενες διακυμάνσεις της λύσης, καθώς ο χρόνος $t \rightarrow \infty$ και όχι σε λύσεις, που τείνουν στο ∞ , καταστάσεις που χαρακτηρίζουν τα **ασταθή** συστήματα, αντίστοιχα.

Έστω ότι έχουμε ένα μη ομογενές γραμμικό σύστημα στο οποίο έχουμε εφαρμόσει το μετασχηματισμό Laplace $\mathcal{L}^{-1}$ σύμφωνα με τη σχετική θεωρία, για παράδειγμα, βλέπε [211, Κεφάλαιο 7]. Αν $F(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$, τότε η συνάρτηση $F(s)$ είναι συνήθως μια ρητή συνάρτηση, δηλαδή

$$F(s) = \frac{P(s)}{G(s)}, \quad s \in \mathbb{C}, \quad (10.1)$$

όπου $P(s)$, $G(s)$ είναι δύο πραγματικά πολυώνυμα της μιγαδικής μεταβλητής $s = x + iy$. Γνωρίζουμε από την άλγεβρα ότι κάθε πραγματικό πολυώνυμο, όπως το $G(s)$, μπορεί πάντα να γίνει γινόμενο παραγόντων, οι οποίοι είναι πραγματικές γραμμικές και τετραγωνικές συναρτήσεις, που μπορεί να επαναλαμβάνονται ή όχι.

Επιπλέον, από τα θεωρήματα Heaviside γνωρίζουμε ότι η μορφή του αντιστρόφου μετασχηματισμού Laplace $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ ορίζεται πλήρως και κατά μοναδικό τρόπο από τους παράγοντες του πολυωνύμου $G(s)$ και οι μόνοι όροι που μπορούμε να συναντήσουμε είναι της μορφής, που παρουσιάζονται στον Πίνακα 12.1 (βλέπε [211, Ενότητα 7.4, Προβλήματα 29, 35] ή [225, Section 10.9, Theorems 1-3, pg 638-644])

Ομαδοποιώντας τις διάφορες περιπτώσεις παραγοντοποίησης της πολυωνυμικής εξίσωσης $G(s) = 0$, μπορούμε εύκολα να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι η λύση $y(t)$ είναι ευσταθής αν και μόνο αν ικανοποιείται κάποια από τις ακόλουθες συνθήκες:

(α) κάθε απλή πραγματική ρίζα είναι μη θετική,

- (β) κάθε πολλαπλή πραγματική ρίζα είναι αρνητική,
 (γ) κάθε φανταστική ρίζα είναι απλή,
 (δ) κάθε γνήσια μιγαδική ρίζα έχει αρνητικό πραγματικό μέρος.

Ρίζες Πολυωνύμου-Όροι Λύσεων Διαφορικών Εξισώσεων

	Απλές Ρίζες	Όροι Λύσεων Διαφορικών Εξισώσεων
1.	s	1, δηλαδή $u(t)$
2.	$s^2 + b^2$	$\cos bt, \sin bt$
3.	$s - a, a \neq 0$	e^{at}
4.	$(s - a)^2 + b^2$	$e^{at} \cos bt, e^{at} \sin bt$
	Πολλαπλές Ρίζες	Όροι Λύσεων Διαφορικών Εξισώσεων
5.	$s^n, n > 1$	$t^k, 0 \leq k \leq n - 1$
6.	$(s^2 + b^2)^n, n > 1$	$t^k \cos bt, t^k \sin bt, 0 \leq k \leq n - 1$
7.	$(s - a)^n, n > 1, a \neq 0$	$t^k e^{at}, 0 \leq k \leq n - 1$
8.	$[(s - a)^2 + b^2]^n, n > 1, a \neq 0$	$t^k e^{at} \cos bt, t^k e^{at} \sin bt, 0 \leq k \leq n - 1$

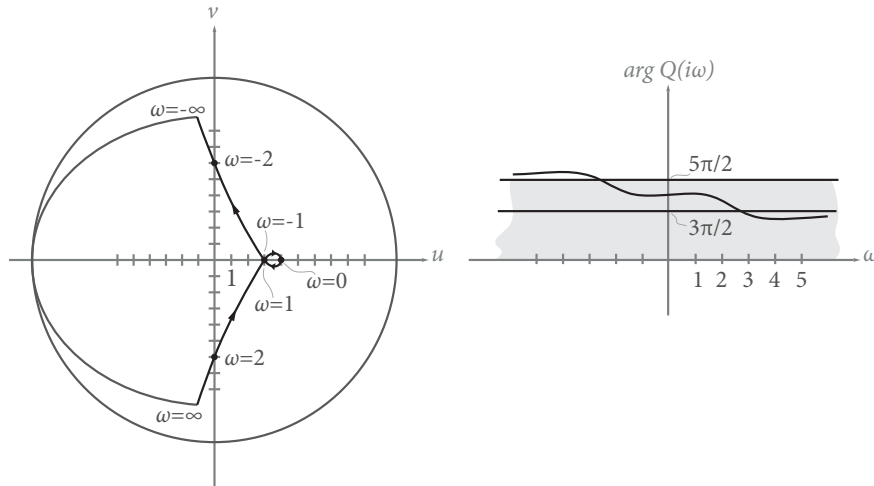
Πίνακας 12.1: Ρίζες χαρακτηριστικού πολυωνύμου και οι αντίστοιχοι όροι των λύσεων των διαφορικών εξισώσεων.

Μια γεωμετρική προσέγγιση, που συνοψίζει τα παραπάνω δίδεται από το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 12.10.1. Η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι ευσταθής η λύση $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{P(s)/G(s)\}$ είναι η εξίσωση $G(s) = 0$ να μην έχει ρίζες στα δεξιά του φανταστικού άξονα στο μιγαδικό επίπεδο s και κάθε ρίζα που βρίσκεται στο φανταστικό άξονα είναι απλή.

Υπάρχουν διάφορες μέθοδοι για τον προσδιορισμό των ριζών μιας πολυωνυμικής εξίσωσης, που έχουν μη θετικό το πραγματικό μέρος. Στην πράξη όμως αυτές οι μέθοδοι είναι διαμορφωμένες με μεγαλύτερη σαφήνεια για τις περιπτώσεις που οι ρίζες έχουν αυστηρά θετικό πραγματικό μέρος. Οι περιπτώσεις που είτε οι ρίζες είναι μηδενικές ή φανταστικές ανιχνεύονται με μεγαλύτερη ευκολία.

Θεώρημα 12.10.2. Αν το πραγματικό μέρος κάθε ρίζας της πολυωνυμικής εξίσωσης $G(s) = 0$ είναι μικρότερο από ή ίσο με το μηδέν, τότε όλοι οι συντελεστές του πολυωνύμου $G(s)$ έχουν το ίδιο πρόσημο.



Σχήμα 12.35: Γράφημα της $w = G(s) = s^3 + s^2 + s + 4$ και του $\arg G(i\tau)$.

$D_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| \leq 1\}$ και δύο ρίζες μέσα στο δίσκο $D_i = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2\}$, σχεδιάζοντας το γράφημα της συνάρτησης $f(z)$ καθώς το z διαγράφει τους αντίστοιχους κύκλους.

[2] Χρησιμοποιείστε μεθόδους που έχουν αναπτυχθεί σε αυτή και την προηγούμενη ενότητα για να βρείτε αν οι ακόλουθες εξισώσεις έχουν κάποιες ρίζες -και πόσες- με μη αρνητικό πραγματικό μέρος: (a) $s^3 + s + 9 = 0$, (b) $s^3 + 6s^2 + 10s + 6 = 0$, (c) $s^4 + 2s^3 + 7s^2 + 4s + 10 = 0$, (d) $s^4 + s^3 + s^2 + 10s + 10 = 0$,

12.11 Ολοκληρωτικό Υπόλοιπο στο Άπειρο

Έστω ότι η συνάρτηση $f(z)$ έχει μια μεμονωμένη ανωμαλία στο σημείο $z = \infty$, τότε έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 12.11.1. (Ολοκληρωτικό Υπόλοιπο στο ∞) Το Ολοκληρωτικό Υπόλοιπο της συνάρτησης $f(z)$ στο ∞ ορίζεται από τον τύπο:

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -\frac{1}{2i\pi} \oint_C f(z) dz, \quad (11.1)$$

όπου ο κύκλος $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$ για R τόσο μεγάλο, ώστε το μοναδικό ανώμαλο σημείο στον εξωτερικό δίσκο $|z| \geq R$ να είναι το σημείο $z = \infty$.

Το αρνητικό πρόσημο εμφανίζεται στον ορισμό, γιατί το ανώμαλο σημείο $z = \infty$, στο οποίο υπολογίζεται το υπόλοιπο, βρίσκεται εξωτερικά του κύκλου C , επομένως η ολοκλήρωση γίνεται κατά την αρνητική φορά ως προς το σημείο.

Παρατήρηση 12.11.2. (Εναλλακτικός ορισμός) Το Ολοκληρωτικό Υπόλοιπο της συνάρτησης $f(z)$ στο $z = \infty$ μπορεί να ορισθεί να είναι η ποσότητα $-a_{-1}$, όπου το a_{-1} είναι ο συντελεστής του όρου $1/z$ στο ανάπτυγμα Laurent της συνάρτησης $f(z)$ κοντά στο σημείο $z = \infty$. Επομένως, το $-Res_{z=\infty} f(z)$ είναι ο συντελεστής του ζ στο ανάπτυγμα της συνάρτησης $f(1/\zeta)$ κοντά στο σημείο 0 και αποτελεί το συντελεστή του $1/\zeta$ στο ανάπτυγμα της συνάρτησης $F(\zeta) = \zeta^{-2}f(1/\zeta)$ κοντά στο σημείο 0 . Από τα παραπάνω συνεπάγεται ότι $Res_{z=\infty} f(z) = -Res_{\zeta=0} F(\zeta)$.

Η αλλαγή μεταβλητής $z = 1/\zeta$ αποδεικνύει ότι

$$\oint_{|\zeta|=1/R} f(1/\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta^2} = \oint_{|z|=R} f(z) dz.$$

έτσι το ολοκλήρωμα στον Ορισμό 12.11.1 συμφωνεί με το ολοκλήρωμα στο υπόλοιπο $Res_{\zeta=0} F(\zeta)$. Τα παραπάνω δηλώνουν ότι οι δύο ορισμοί του $Res_{z=\infty} f(z)$ είναι συνεπείς και η τιμή του ολοκληρώματος στη σχέση (11.1) δεν εξαρτάται από το R .

Παρατήρηση 12.11.3. (Ιδιότητες) Οι ιδιότητες του υπολοίπου της $Res_{\zeta=0} F(\zeta)$ δίδουν αντίστοιχους τύπους για το υπόλοιπο $Res_{z=\infty} f(z)$ στο σημείο $z = \infty$. Για παράδειγμα, έχουμε $Res_{\zeta=0} F(\zeta) = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \zeta F(\zeta)$, αν η συνάρτηση $F(\zeta)$ έχει ένα απλό πόλο στο $\zeta = 0$, έτσι ισχύει

$$Res_{z=\infty} f(z) = - \lim_{z \rightarrow \infty} zf(z), \text{ αν } f(\infty) = 0. \quad (11.2)$$

Το ίδιο αποτέλεσμα θα πάρουμε αν εξετάσουμε τη σειρά Laurent, διότι η συνθήκη $f(\infty) = 0$ σημαίνει ότι $a_n = 0$, για όλα τα $n \geq 0$. Επομένως θα ισχύει σ' αυτή την περίπτωση

$$zf(z) = a_{-1} + \frac{a_{-2}}{z} + \frac{a_{-3}}{z^2} + \dots,$$

δηλαδή ισχύει πράγματι, $\lim_{z \rightarrow \infty} zf(z) = a_{-1}$.

Για ρητές συναρτήσεις αποδεικνύεται ότι το άθροισμα όλων των υπολοίπων στο επεκταμένο μιγαδικό επίπεδο είναι μηδέν. Μια ειδική περίπτωση αυτού του αποτελέσματος αποτελεί το ακόλουθο θεώρημα

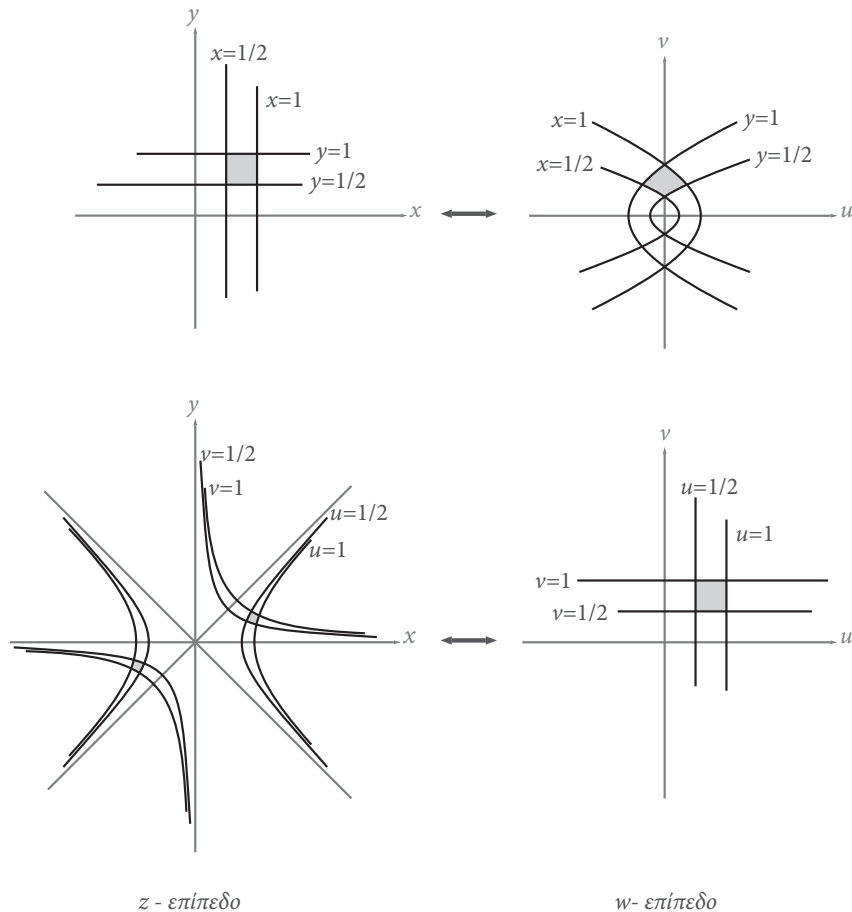
Θεώρημα 12.11.4. Αν τα ανώμαλα σημεία της συνάρτησης $f(z)$ στο επίπεδο $|z| \leq \infty$ είναι μεμονωμένα και σε πλήθος πεπερασμένο, τότε το άθροισμα όλων των ολοκληρωτικών υπολοίπων είναι μηδέν.

13

Σύμμορφη Απεικόνιση

Περιεχόμενα

- 13.1 Μιγαδικές Απεικονίσεις: Α. Ο Γραμμικός Μετασχηματισμός $w = az + b$, Β. Τετραγωνικός Μετασχηματισμός $w = z^2$, Γ. Αντίστροφη Απεικόνιση $w = z^{-1}$, Δ. Εκθετική και Λογαριθμική Απεικόνιση-Προβλήματα.
- 13.2 Σύμμορφη Απεικόνιση - Προβλήματα.
- 13.3 Ρητογραμμικοί Μετασχηματισμοί ή Μετασχηματισμοί Möbius- Προβλήματα.
- 13.4 Μετασχηματισμοί Zhukovsky & Kármán-Trefftz.
- 13.5 Μετασχηματισμός Schwarz-Christoffel - Προβλήματα.
- 13.6 Στοιχειώδεις Σύμμορφες Απεικονίσεις: 1. Ημιτονική Συνάρτηση, 2. Συνημιτονική Συνάρτηση, 3. Η Συνάρτηση Εφαπτομένη, 4. Υπερβολικές Συναρτήσεις - Προβλήματα.



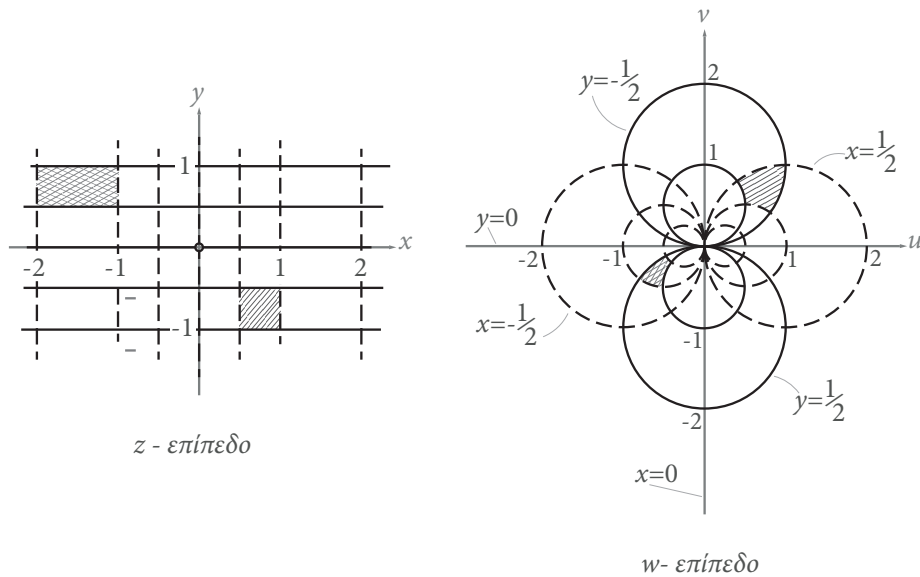
Σχήμα 13.6: Απεικόνιση ευθειών παραλλήλων προς τους άξονες στα δύο επίπεδα w - και z - μέσω του Τετραγωνικού Μετασχηματισμού $w = z^2$.

Οι άλλες δυνάμεις $w = z^n$, $n = 3, 4, \dots$, μπορούν να μελετηθούν με ανάλογο τρόπο, φυσικά όμως πιο πολύπλοκο. Για παράδειγμα, η περιοχή $0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{n}$ απεικονίζεται σ' όλο το πάνω ημιεπίπεδο του w -επιπέδου, όπως βλέπουμε στο Σχήμα 13.7.

Επίσης με τον ίδιο τρόπο αντιμετωπίζονται οι απεικονίσεις $w = z^{-n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Η πιο σημαντική απεικόνιση, ιδιαίτερα χρήσιμη στις εφαρμογές, είναι η $w = z^{-1}$, την οποία θα μελετήσουμε στη συνέχεια.

Γ. Αντίστροφη Απεικόνιση $w = z^{-1}$, $z \in \mathbb{C}$.

Πρόταση 13.1.1. (Πρόταση Αντίστροφης Απεικόνισης) Η Αντίστροφη Απεικόνιση $w = z^{-1}, z \in \mathbb{C}$ απεικονίζει κάθε ευθεία γραμμή ή κύκλο σε κύκλο ή ευθεία γραμμή.



Σχήμα 13.9: Η Αντίστροφη Απεικόνιση $w = z^{-1}$ απεικονίζει κάθε ευθεία γραμμή ή κύκλο σε κύκλο ή ευθεία γραμμή.

Απόδειξη. Κάθε ευθεία γραμμή ή κύκλος στο z -επίπεδο γράφεται

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0, \quad A, B, C \in \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

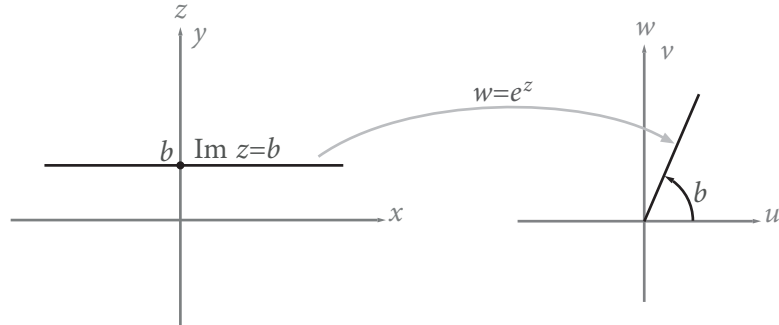
όπου για $A = 0$ παίρνουμε ευθεία γραμμή και για $A \neq 0$ κύκλο. Αντικαθιστούμε τα x, y συναρτήσεις των $z, \bar{z}$ ¹, οπότε η εξίσωση (1.1) γίνεται

$$Az\bar{z} + B\frac{z+\bar{z}}{2} + C\frac{z-\bar{z}}{2i} + D = 0, \quad (1.2)$$

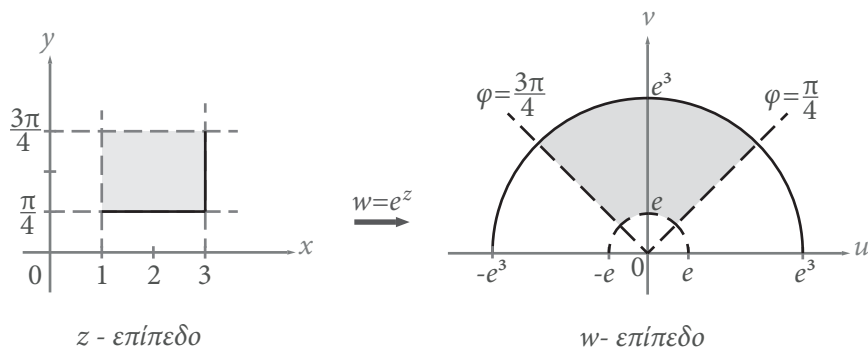
Η αντικατάσταση του z με το $1/w$ στην εξίσωση (1.2) και ο πολλαπλασιασμός της εξίσωσης με το $w\bar{w}$ οδηγεί στην εξίσωση

$$A + B\frac{\bar{w} + w}{2} + C\frac{\bar{w} - w}{2i} + Dw\bar{w} = 0, \quad (1.3)$$

¹Η χρήση των $z, \bar{z}$ αντί των πραγματικών μεταβλητών x, y είναι συνήθης και αρκετά χρήσιμη στην Μιγαδική Ανάλυση.



Σχήμα 13.11: Η $w = e^z$ απεικονίζει ευθείες παράλληλες με τον άξονα των x ($\text{Im } z = b$) στην ακτίνα, που ξεκινά από την αρχή και σχηματίζει γωνία $\varphi = \arg z = b$



Σχήμα 13.12: Η $w = e^z$ και το ορθογώνιο: $1 < x \leq 3$, $\pi/4 \leq y < 3\pi/4$.

μεταξύ τους, καλύπτουν όλο το w -επίπεδο.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ για την Ενότητα 13.1

[1] Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $w = (1+i)z - 2$, $z \in \mathbb{C}$. Να σχεδιαστούν οι εικόνες των ακόλουθων καμπυλών ή περιοχών:

(a) $x = 0, 2, 4, 8$, (b) $y = -2, 0, 3, 5$, (c) $|z - 1| \leq 4$.

[2] Θεωρούμε την τετραγωνική απεικόνιση $w = z^2$, $z \in \mathbb{C}$. Να σχεδιαστούν οι εικόνες των ακόλουθων περιοχών:

(a) $|z| > 1$, (b) $|z| \leq 5$, (c) $|\arg z| < \pi/2$, (d) $1/2 < |z| < \sqrt{2}$,

(e) $\pi \leq \arg z \leq 3\pi/2$, (f) $-\pi/2 \leq \arg z \leq \pi/4$.

13.2 Σύμμορφη Απεικόνιση

Σε αυτή την Ενότητα θα μελετηθεί η πιο σημαντική γεωμετρική ιδιότητα των απεικονίσεων, που ορίζονται από μιγαδικές αναλυτικές συναρτήσεις. Θεωρούμε μια αμφιμονοσήμαντη και επί¹ απεικόνιση

$$f: D \subset \mathbb{C} \mapsto G \subset \mathbb{C}, \quad \text{με}$$

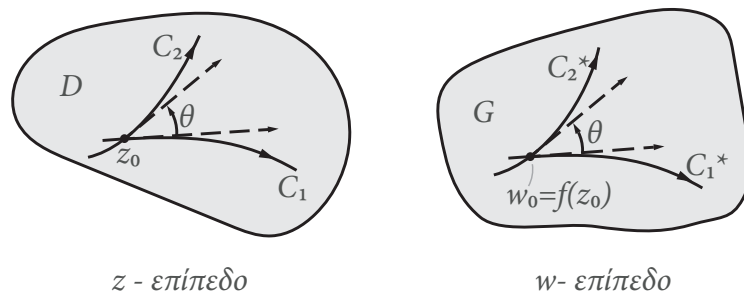
$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad \text{όπου } z = x + iy \in D \subset \mathbb{C}. \quad (2.1)$$

Η απεικόνιση αυτή ορίζει επίσης μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των καμπυλών C_j , $j = 1, 2$ του D

$$C_j: x_j = x_j(t), y_j = y_j(t), \quad \text{ή } z_j = z_j(t) = x_j(t) + iy_j(t), \quad j = 1, 2, \quad (2.2)$$

και των εικόνων τους C_j^* , $j = 1, 2$ στο πεδίο G , όπως αυτά παρουσιάζονται παραστατικά στο Σχήμα 13.16.

$$C_j^*: u_j = u_j(t), v_j = v_j(t), \quad \text{ή } w_j = w_j(t) = u_j(t) + iv_j(t) \quad j = 1, 2. \quad (2.3)$$



Σχήμα 13.16: Η Σύμμορφη Απεικόνιση $w = f(z)$.

Η φορά αύξησης των τιμών του t στη σχέση (2.2) ονομάζεται **θετική φορά της καμπύλης** C . Έτσι η σχέση (2.2) ορίζει ένα **προσανατολισμό** στην καμπύλη C . Όταν η απεικόνιση $z(t)$ είναι παραγωγίσιμη με συνεχή την πρώτη παράγωγο, τότε υπάρχει μοναδική εφαπτομένη σε κάθε σημείο της καμπύλης C και η καμπύλη

¹Μια απεικόνιση $\varphi: A \mapsto B$ ονομάζεται **επί**, αν κάθε στοιχείο του B είναι η εικόνα ενός τουλάχιστον στοιχείου του A . Η απεικόνιση φ ονομάζεται **αμφιμονοσήμαντη** ή **ένα προς ένα** ή **1-1**, αν διαφορετικά στοιχεία στο πεδίο A απεικονίζονται σε διαφορετικά στοιχεία του πεδίου B . Η απεικόνιση φ ονομάζεται **αμφιμονοσήμαντη και επί**, αν συγχρόνως ισχύουν και οι δύο παραπάνω προϋποθέσεις.

κληρώματα

$$E = \int \int_S \left| J \left(\frac{u, v}{x, y} \right) \right| dx dy, \quad \text{για να αποδείξετε ότι } E = \int \int_S |f'(z)|^2 dx dy$$

[11] Η συνάρτηση $w = f(z)$ απεικονίζει σύμμορφα το δίσκο $|z| < R_0$ επί ενός πεδίου του w -επιπέδου εμβαδού A . Αποδείξτε ότι $A \geq \pi |f'(0)|^2 R_0^2$. [Υπόδειξη: Ξεκινήστε με τον τελικό τύπο του προηγούμενου προβλήματος [10], κάνετε αλλαγή σε πολικές συντεταγμένες, αναπτύξτε τη συνάρτηση $f(z)$ σε σειρά της μορφής $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ και δείξτε ότι αν $r < R_0$, τότε ισχύει

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

13.3 Ρητογραμμικοί Μετασχηματισμοί ή Μετασχηματισμοί Möbius

Η πιο απλή ίσως αλλά και μια από τις πιο σημαντικές και χρήσιμες οικογένειες σύμμορφων απεικονίσεων είναι η οικογένεια των **ρητογραμμικών (linear fractional) ή διγραμμικών (bilinear) μετασχηματισμών ή μετασχηματισμών Möbius**.¹ Ένας ρητογραμμικός μετασχηματισμός $f: \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ ορίζεται από την απεικόνιση

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0, a, b, c, d \in \mathbb{C} \quad (3.1)$$

Η παράγωγος του ρητογραμμικού μετασχηματισμού είναι

$$w' = f'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}. \quad (3.2)$$

Από τη μορφή της παραγώγου (3.2) συμπεραίνουμε ότι η συνθήκη $ad - bc \neq 0$ ισοδυναμεί με τη συμμορφία του μετασχηματισμού Möbius $w = f(z)$ - βλέπε

¹Ο Möbius, August Ferdinand (17, Νοέμβριος 1790-26, Σεπτέμβριος, 1868) ήταν Γερμανός μαθηματικός και θεωρητικός αστρονόμος. Φοίτησε στο University of Leipzig, όπου σπούδασε αστρονομία. Το 1813 συνέχισε τη μελέτη του στην αστρονομία κοντά στον Carl Friedrich Gauss στο University of Göttingen. Από εκεί πήγε στο University of Halle όπου συνεργάστηκε με τον καθηγητή του Gauss, τον Johann Pfaff, όπου και ολοκλήρωσε τη διδακτορική του διατριβή «*The occultation of fixed stars*» (Η απόκρυψη των σταθερών αστέρων) το 1815. Το 1816 διορίστηκε έκτακτος καθηγητής στην έδρα της «Αστρονομίας και της Ανώτερης Μηχανικής» στο Πανεπιστήμιο της Λειψίας. Είναι πολύ γνωστός για την ανακάλυψη της ταινίας του Möbius, μιας μη-προσανατολισμένης δισδιάστατης επιφάνειας με μια μόνο πλευρά εμφυτευμένη στον τρισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο. Είχε ανακαλυφθεί ανεξάρτητα από τον Johann Benedict Listing around την ίδια εποχή. Η *σύνθεση Möbius (Möbius configuration)*, που σχηματίζεται από δύο αμοιβαία εγγεγραμμένα τετράεδρα, επίσης, πήρε το όνομά του. Τέλος, ο Möbius ήταν ο πρώτος που εισήγαγε τις ομογενείς συντεταγμένες στην Προβολικής Γεωμετρίας.

σχέση (3.1). Ας σημειώσουμε ότι αν ισχύει η ισότητα $ad - bc = 0$, τότε προκύπτει ότι $w' = f'(z) = 0$, δηλαδή $w = f(z) = c$, ο οποίος είναι ένας μετασχηματισμός χωρίς κανένα ιδιαίτερο ενδιαφέρον!

Ειδικές περιπτώσεις του μετασχηματισμού Möbius αποτελούν οι μετασχηματισμοί που μελετήθηκαν στην Ενότητα 13.1, όπως
μετάθεση

$$w = f(z) = z + b, \quad a = 1, c = 0, d = 1, b \in \mathbb{C} \quad (3.3)$$

στροφή και συστολή ή διαστολή

$$w = f(z) = az, \quad b = 0, c = 0, d = 1, a \in \mathbb{C} \quad (3.4)$$

αντιστροφή και ανάκλαση στον άξονα των x

$$w = f(z) = \frac{1}{z}, \quad a = 0, b = 1, c = 1, d = 0 \quad (3.5)$$

γραμμικός μετασχηματισμός

$$w = f(z) = az + b, \quad c = 0, d = 1, a, b \in \mathbb{C} \quad (3.6)$$

Επεκταμένο Μιγαδικό Επίπεδο. Με τη χρήση του μετασχηματισμού Möbius (3.1) μπορούμε να δώσουμε την έννοια του ∞ στο μιγαδικό επίπεδο $\mathbb{C}$. Παρατηρούμε ότι, αν $cz + d \neq 0$ στη σχέση (3.1), τότε σε κάθε z αντιστοιχεί ακριβώς ένας μιγαδικός αριθμός $w \in \mathbb{C}$. Αν τώρα το $c \neq 0$, τότε στην τιμή του $z = -d/c$, για την οποία το $cz + d = 0$, δεν αντιστοιχεί κανένας αριθμός $w \in \mathbb{C}$. Το γεγονός αυτό μας οδηγεί στη θεώρηση των ακόλουθων εννοιών:

Ορισμός 13.3.1. (Σημείο στο Άπειρο - Επεκταμένο Μιγαδικό Επίπεδο) Ονομάζουμε σημείο στο άπειρο στο μιγαδικό επίπεδο $\mathbb{C}$ και συμβολίζεται $w = \infty$ (άπειρο) την εικόνα του σημείου $z = -d/c$ ($c \neq 0$) μέσω της ρητογραμμικής απεικόνισης (3.1). Συμβολίζουμε δε αυτό με το σύμβολο ∞ . Το μιγαδικό επίπεδο μαζί με το σημείο στο άπειρο (∞) ονομάζεται Επεκταμένο Μιγαδικό Επίπεδο.

Αν τώρα $c = 0$ στην σχέση (3.1), τότε θα πρέπει να ισχύει $a \neq 0$, $d \neq 0$ και θεωρούμε ότι το $w = \infty$ είναι η εικόνα του $z = \infty$. Η αντίστροφη απεικόνιση της (3.1) είναι η απεικόνιση

$$z = f^{-1}(w) = \frac{-dw + b}{cw - a}, \quad ad - bc \neq 0, a, b, c, d \in \mathbb{C}. \quad (3.7)$$



Εικόνα 13.1: Möbius, August (1790 - 1868)

[26] Να αποδειχθεί ότι το σύνολο G όλων των ρητογραμμικών μετασχηματισμών, που απεικονίζουν το μοναδιαίο δίσκο $|z| < 1$ στο z -επίπεδο στο μοναδιαίο δίσκο $|w| < 1$ του w -επιπέδου, συνιστά μια ομάδα.

[27] Να αποδειχθεί ότι το σύνολο G όλων των ρητογραμμικών μετασχηματισμών συνιστά μια ομάδα. Επίσης να αποδειχθεί ότι:

(a) το υποσύνολο του G , για το οποίο ισχύει $ad - bc = 1$, συνιστά μια υποομάδα,

(b) το υποσύνολο του G , για το οποίο τα $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ και $ad - bc = 1$: (i) συνιστά μια υποομάδα, (ii) $Im(az + b)/(cz + d) = y/(|cz + d|^2)$, και (iii) τα στοιχεία αυτής της υποομάδας απεικονίζουν το άνω ημιεπίπεδο στον εαυτό του καθώς και το κάτω ημιεπίπεδο στον εαυτό του.

13.4 Μετασχηματισμοί Zhukovsky & Kármán-Trefftz

Η ακόλουθη συνάρτηση μιγαδικής μεταβλητής εισάγει το μετασχηματισμό Zhukovsky¹

$$w = f(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad z = x + iy \in \mathbb{C}, \quad (4.1)$$

ο οποίος στη διεθνή βιβλιογραφία αναφέρεται και ως μετασχηματισμός Joukowski ή μετασχηματισμός Joukowski. Η σχέση (4.1) ονομάζεται **συνάρτηση Zhukovsky**.

Στην αεροδυναμική, χρησιμοποιείται ο μετασχηματισμός για την επίλυση του προβλήματος του διδιάστατου δυναμικού ροής γύρω από μια κατηγορία επιφανειών γνωστών ως αεροτομές Zhukovsky. Μια αεροτομή Zhukovsky δημιουργείται στο z -επίπεδο εφαρμόζοντας το Μετασχηματισμό Zhukovsky σε ένα κύκλο στο

¹Ο Zhukovsky, Nikolay Yegorovich (5 Ιανουαρίου, 1847-17 Μαρτίου, 1921) ήταν Ρώσος επιστήμονας και ιδρυτής της σύγχρονης αερο- και υδροδυναμική. Λαμβάνοντας υπόψη ότι οι σύγχρονοί του επιστήμονες χλεύαζαν την ιδέα της πτήσης του ανθρώπου, ο Zhukovsky ήταν ο πρώτος, που ανέλαβε τη μελέτη της ροής του αέρα. Ο Zhukovsky αποφοίτησε από το Πανεπιστήμιο της Μόσχας, όπου σπούδασε υπό τον Αύγουστο Davidov. Από το 1872, διετέλεσε καθηγητής στο Imperial Technical School. Το 1904, ίδρυσε το πρώτο στον κόσμο Αεροδυναμικό Ινστιτούτο στο Kachino κοντά στη Μόσχα. Ενώ από το 1918, ήταν ο επικεφαλής του TsAGI (Central AeroHydroDynamics Institute). Ήταν ο πρώτος επιστήμονας που εξήγησε με μαθηματικά την αρχή της αεροδυναμικής ανύψωσης. Ήταν ο πρώτος που απέδειξε ότι η ανυψωτική δύναμη που παράγεται από ένα σώμα που κινείται μέσα από ένα ιδανικό υγρό είναι ανάλογη με την ταχύτητα και την κυκλοφορία γύρω από το σώμα. Χρησιμοποίησε ένα σύμμορφο μαθηματικό μετασχηματισμό για να καθορίσει το ιδανικό σχήμα της αεροδυναμικής μορφής. Έχτισε την πρώτη αεροδυναμική σήραγγα στη Ρωσία. Τέλος, διαμόρφωσε και μελέτησε την ομώνυμη εξίσωση Zhukovsky (ή Joukowski), που χρησιμοποιείται από τους πολιτικούς μηχανικούς. Μια πόλη κοντά στη Μόσχα, ο κρατήρας Zhukovskiy στη Σελήνη και η Zhukovsky Air Force Engineering Academy έχουν ονομαστεί προς τιμήν του.

w -επίπεδο.

Οι συντεταγμένες του κέντρου του κύκλου είναι μεταβλητές, και καθώς μεταβάλλονται τροποποιείται το σχήμα της προκύπτουσας αεροτομής. Ο κύκλος περικλείει το σημείο $w = -1$ (όπου η παράγωγος του μετασχηματισμού είναι μηδέν) και τέμνει το σημείο $w = 1$. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί για κάθε επιτρεπόμενη θέση του κέντρου $mu_x + imu_y$ μεταβάλλοντας την ακτίνα του κύκλου.

Η συνάρτηση (4.1) είναι αναλυτική σε όλο το μιγαδικό επίπεδο εκτός του σημείου $z = 0$, όπου εμφανίζει ένα πόλο πρώτης τάξης. Η παράγωγος της συνάρτησης είναι

$$w' = f'(z) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{z^2} \right), \quad (4.2)$$

η οποία είναι διάφορη του μηδενός παντού εκτός των δύο σημείων $z = \pm 1$. Επομένως, η απεικόνιση που ορίζεται από αυτή τη συνάρτηση είναι σύμμορφη παντού σε όλο το μιγαδικό επίπεδο εκτός των δύο σημείων $z = \pm 1$. Για τον προσδιορισμό των πεδίων μονοσήμαντου της συνάρτησης Zhukovsky, παρατηρούμε ότι αν δύο διαφορετικά σημεία του z -επιπέδου $z_1 \neq z_2$ μετασχηματίζονται στο ίδιο σημείο του w -επιπέδου, δηλαδή αν ισχύει

$$z_1 + \frac{1}{z_1} = z_2 + \frac{1}{z_2} \quad \text{ή} \quad z_1 - z_2 = \frac{z_1 - z_2}{z_1 z_2}. \quad (4.3)$$

τότε, επειδή $z_1 \neq z_2$, από τη σχέση (4.3) συνεπάγεται ότι

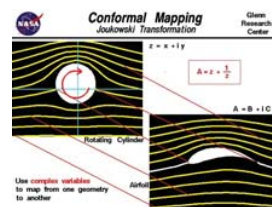
$$z_1 z_2 = 1. \quad (4.4)$$

Η τελευταία σχέση συνεπάγεται ότι τα πεδία μονοσήμαντου της συνάρτησης Zhukovsky είναι τα πεδία μέσα στο μοναδιαίο δίσκο ($|z| < 1$) και έξω από αυτόν ($|z| > 1$). Αμφότερα τα πεδία απεικονίζονται σύμμορφα από τη συνάρτηση (4.1) σε ένα και το αυτό πεδίο του w -επιπέδου. Για να καθορίσουμε αυτό το πεδίο, θεωρούμε την απεικόνιση του κύκλου $|z| = r_0$ από τη συνάρτηση (4.1). Για να προχωρήσουμε χρησιμοποιούμε την εκθετική μορφή των μιγαδικών, δηλαδή $z = e^{i\theta}$ και βρίσκουμε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της συνάρτησης (4.1), που είναι

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \theta, \quad v(r, \theta) = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \theta. \quad (4.5)$$



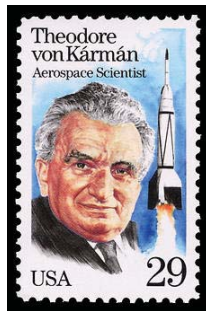
Εικόνα 13.3: Nikolay Zhukovsky (1847-1921)



Εικόνα 13.4: Αεροτομή Zhukovsky

Οι αεροτομές Zhukovsky σχηματίζουν μια ανάκαμψη στο ουραίο άκρο. Μία στενά συνδεδεμένη σύμμορφη απεικόνιση, ο **μετασχηματισμός Kármán-Trefftz**, δημιουργεί μια πολύ ευρύτερη κατηγορία, αυτή των αεροτομών Kármán-Trefftz, "απελευθερώνοντας" τη γωνία του ουραίου άκρου. Όταν η γωνία του ουραίου άκρου τεθεί ίση με το μηδέν, τότε ο μετασχηματισμός Kármán-Trefftz μετατρέπεται στο μετασχηματισμό Zhukovsky. Για περισσότερα, σχετικά με το μετασχηματισμό Zhukovsky παραπέμπουμε στα [142], [149], [174], [176] και [196]. Στη συνέχεια δίδουμε τα βασικά σημεία της θεωρίας του μετασχηματισμού Kármán-Trefftz.

Μετασχηματισμός Kármán-Trefftz



Εικόνα 13.5: Kármán, Theodore (1881-1963)

Θεωρούμε ότι η αεροτομή Kármán¹-Trefftz σχηματίζει γωνία $\alpha \neq 0$ στο ουραίο τμήμα μεταξύ της άνω και της κάτω επιφάνειας της αεροτομής.

$$z = n \frac{\left(1 + \frac{1}{w}\right)^n + \left(1 - \frac{1}{w}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{w}\right)^n - \left(1 - \frac{1}{w}\right)^n}, \quad (4.9)$$

με το n λίγο μικρότερο από το 2. Η γωνία α μεταξύ των εφαπτόμενων των άνω και κάτω επιφανειών της αεροτομής κοντά στο ουραίο άκρο σχετίζεται με το n μέσα από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\alpha = 2\pi - n\pi \quad \text{και} \quad n = 2 - \frac{\alpha}{\pi}. \quad (4.10)$$

Η παράγωγος dz/dw , είναι ίση με

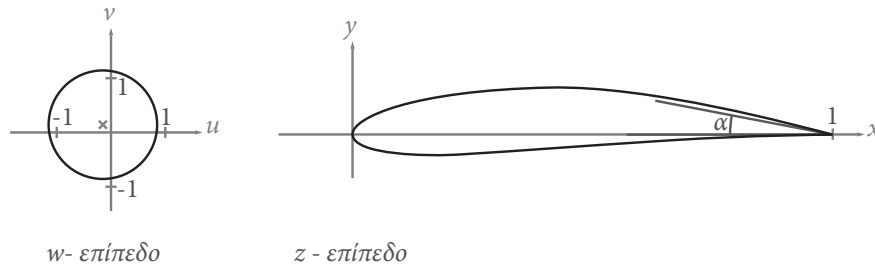
$$\frac{dz}{dw} = \frac{4n^2}{w^2 - 1} \frac{\left(1 + \frac{1}{w}\right)^n \left(1 - \frac{1}{w}\right)^n}{\left[\left(1 + \frac{1}{w}\right)^n - \left(1 - \frac{1}{w}\right)^n\right]^2}. \quad (4.11)$$

Σχέση μετασχηματισμών Zhukovsky και Kármán-Trefftz²

Κατ' αρχήν προσθέτουμε και αφαιρούμε το 2 στον τύπο του μετασχηματισμού

¹Kármán, Theodore von (11 Μαΐου 1881-6η Μάη του 1963) ήταν Ούγγρο-Αμερικανός μαθηματικός, μηχανικός αεροδιαστημικής και φυσικός που έδρασε κατά κύριο λόγο στους τομείς της αεροναυπηγικής και Αστροναυτικής. Είναι υπεύθυνος για πολλές βασικές εξελίξεις στην αεροδυναμική, ιδίως την εργασία του σχετικά με τον υπερηχητικό χαρακτηρισμό της ροής του αέρα. Έχει θεωρηθεί ως ο εξαιρετικός θεωρητικός της αεροδυναμικής στον εικοστό αιώνα.

²Trefftz, Eric Emmanuel (21 Φεβρουαρίου 1888-21 Γενάρη 1937) ήταν Γερμανός μηχανικός, μαθηματικός και καθηγητής πανεπιστημίου.



Σχήμα 13.22: Μετασχηματισμός Kármán-Trefftz και η Αεροτομή Kármán-Trefftz.

Zhukovsky (4.1) και παίρνουμε:

$$\begin{aligned} w + 2 &= z + 2 + \frac{1}{z} = \frac{1}{z}(z + 1)^2 \\ w - 2 &= z - 2 + \frac{1}{z} = \frac{1}{z}(z - 1)^2. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Διαιρώντας κατά μέρη προκύπτει

$$\frac{w - 2}{w + 2} = \left(\frac{z - 1}{z + 1} \right)^2 \quad (4.13)$$

Το δεξιό μέρος περιέχει (ως ένα παράγοντα) τον απλό νόμο του τετραγώνου από τη θεωρία του δυναμικού ροής, ο οποίος έχει εφαρμοστεί στο ουραίο χέιλος κοντά στο σημείο $z = +1$. Από τη θεωρία των σύμμορφων απεικονίσεων αυτή η τετραγωνική απεικόνιση είναι γνωστό ότι μετασχηματίζει ένα ημιεπίπεδο στο z -επίπεδο στο δυναμικό της ροής γύρω από μια ημιάπειρη ευθεία γραμμή. Περαιτέρω, τιμές της δύναμης μικρότερες του 2 οδηγούν σε αναπαράσταση του δυναμικού της ροής γύρω από μια πεπερασμένη γωνία.

Έτσι, με την αλλαγή της δύναμης 2 στο μετασχηματισμό Zhukovsky σε μία τιμή ελαφρά μικρότερη από το δύο, το αποτέλεσμα είναι μια πεπερασμένη γωνία μέτρου $\alpha > 0$ αντί ανάκαμψης ($\alpha = 0$), που συναντούμε στα φαινόμενα που προτυποποιούνται με το μετασχηματισμό Zhukovsky. Αντικατάσταση του 2 από το n στην προηγούμενη εξίσωση (4.13) δίδει τη σχέση:

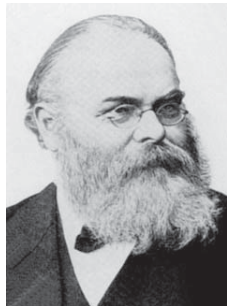
$$\frac{w - n}{w + n} = \left(\frac{z - 1}{z + 1} \right)^n \quad (4.14)$$

η οποία αποτελεί το μετασχηματισμό Kármán-Trefftz. Λύνοντας την τελευταία ως προς w προκύπτει η μορφή της εξίσωσης (4.1). Για περαιτέρω μελέτη παραπέμπουμε στην αναφορά [191].



Εικόνα 13.6: Trefftz, Eric (1888-1937)

13.5 Μετασχηματισμός Schwarz-Christoffel



Εικόνα 13.7: Schwarz, Hermann (1843 - 1921)

Πριν προχωρήσουμε στην παρουσίαση του Μετασχηματισμού Schwarz¹-Christoffel αξίζει να επισημάνουμε τα παρακάτω. Μέχρι τώρα έχουμε, ίσως σιωπηρά, διαμορφώσει την αντίληψη ότι υπάρχει πάντα μια συνάρτηση $w = f(z)$, που απεικονίζει ένα πεδίο D του z -επιπέδου σε ένα πεδίο G του w -επιπέδου και είναι μια σύμμορφη απεικόνιση. Για την πληρότητα της παρουσίασης θα δώσουμε στη συνέχεια τις συνθήκες, οι οποίες διασφαλίζουν την ύπαρξη αλλά και το μονοσήμαντο μιας τέτοιας απεικόνισης, χωρίς τις σχετικές αποδείξεις, γιατί αυτό υπερβαίνει τους στόχους αυτού του συγγράμματος. Το επόμενο αποτέλεσμα αποδείχτηκε από το Riemann το 1851 και αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα αποτελέσματα της Μιγαδικής Ανάλυσης.

Θεώρημα 13.5.1. (Θεώρημα Riemann) Κάθε απλά συνεκτικό πεδίο D του z -επιπέδου, του οποίου το σύνορο αποτελείται από δύο τουλάχιστον σημεία, απεικονίζεται σύμμορφα επί του μοναδιαίου δίσκου $|w| < 1$ του w -επιπέδου.

Παρατήρηση 13.5.2. (Δύο Απλά Συνεκτικά Πεδία) Είναι άμεσο αποτέλεσμα του Θεωρήματος Riemann ότι υπάρχει πάντα μια σύμμορφη απεικόνιση μεταξύ ενός τυχαίου απλά συνεκτικού πεδίου D του z -επιπέδου και ενός τυχαίου απλά συνεκτικού πεδίου G του w -επιπέδου, αρκεί τα σύνορα και των δύο πεδίων να αποτελούνται από δύο τουλάχιστον σημεία. Πράγματι, αν απεικονίσουμε τα δύο πεδία D και G στον ίδιο (βοηθητικό) μοναδιαίο δίσκο $|s| < 1$ ενός τρίτου s -επιπέδου, το οποίο είναι δυνατόν λόγω του Θεωρήματος 13.5.1, θα προκύψει η ζητούμενη σύμμορφη απεικόνιση μεταξύ των πεδίων D και G .

Παρατήρηση 13.5.3. (Συνεκτικότητα) Η συνθήκη της απλής συνεκτικότητας των πεδίων D και G είναι σημαντική. Πράγματι, υποθέτουμε ότι υπάρχει σύμμορφη απεικόνιση $w = f(z)$, μεταξύ ενός πολλαπλά συνεκτικού πεδίου D και του απλά συνεκτικού πεδίου G και λαμβάνουμε ένα κλειστό δρόμο γ στο πεδίο D , που

¹Schwarz, Karl Hermann Amandus (25, Ιαν 1843-30 Νοεμ, 1921) ήταν Γερμανός μαθηματικός, γνωστός για το έργο του στη Μιγαδική Ανάλυση. Γεννήθηκε στο Hermsdorf (τώρα Jerzmanowa, Πολωνία). Ήταν παντρεμένος με την Μαρία Kummer, κόρη του μαθηματικού Ernst Eduard Kummer. Ο Schwarz σπούδασε αρχικά Χημεία στο Βερολίνο αλλά οι Kummer και Weierstrass τον έπεισαν να μεταπηδήσει στα Μαθηματικά. Μεταξύ 1867 και 1869 εργάστηκε στο Halle University, στη συνέχεια, στη Ζυρίχη. Από το 1875 εργάστηκε στο Göttingen University, που ασχολήθηκε με θέματα της Μιγαδικής Ανάλυσης, της Διαφορικής Γεωμετρίας και του Λογισμού των Μεταβολών. Οι εργασίες «Bestimmung einer speziellen Minimalfläche» (1867) και «Gesammelte Mathematische Abhandlungen» (1890) βραβεύθηκαν από την Berlin Academy of Science. Το 1892 έγινε μέλος του Berlin Academy of Science και καθηγητής στο University of Berlin. Μεταξύ των μαθητών του περιλαμβάνονται οι Lipót Fejér, Paul Koebe και Ernst Zermelo.

δίου D του z - επιπέδου και του μοναδιαίου κύκλου $|w| < 1$ του w - επιπέδου, είναι δυνατόν να αντικατασταθούν από την απαίτηση ότι τρία συνοριακά σημεία του συνόρου γ του πεδίου D αντιστοιχούν σε τρία σημεία του μοναδιαίου κύκλου $|w| = 1$ του w - επιπέδου.

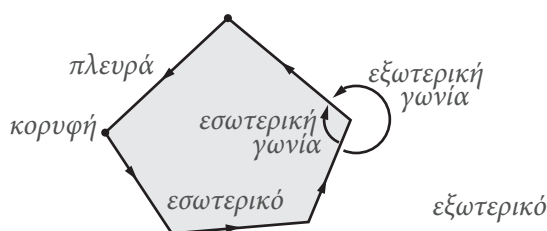
Παρατήρηση 13.5.6. (Κατασκευή Σύμμορφης Απεικόνισης) Μεχρι τώρα έχουμε μελετήσει διάφορες βασικές ιδιότητες της σύμμορφης απεικόνισης. Εντούτοις, αυτά τα χαρακτηριστικά δεν οδηγούν σε γενικές τεχνικές για την επίλυση του βασικού ζητήματος, που είναι αυτό της κατασκευής της κατάλληλης σύμμορφης απεικόνισης μεταξύ δοσμένων πεδίων D και G των επιπέδων z και w .

Στις περισσότερες των περιπτώσεων αυτό είναι πρακτικά αδύνατο. Σε συγκεκριμένες περιπτώσεις πρέπει να χρησιμοποιηθούν διάφορες ειδικές μέθοδοι. Σημαντικό ρόλο παίζει επίσης η γνώση των γεωμετρικών χαρακτηριστικών των βασικών συναρτήσεων, όπως πολωνυμικές, εκθετικές, ρητογραμμικές, τριγωνομετρικές, υπερβολικές κλπ, καθώς και οι αντίστροφες τους.

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε ένα ακόμα ιδιαίτερα σημαντικό σύμμορφο μετασχηματισμό, με τη βοήθεια του οποίου απεικονίζουμε ένα πολυγωνικό πεδίο με πεπερασμένο αριθμό κορυφών (μια ή περισσότερες μπορεί να βρίσκονται στο άπειρο) στο άνω ημιεπίπεδο.

Μετασχηματισμός Schwarz-Christoffel:

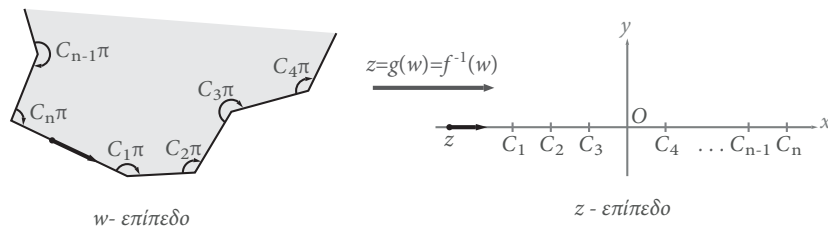
Στο υπόλοιπο της ενότητας θα παρουσιαστεί η μέθοδος του Μετασχηματισμού Schwarz -Christoffel. Στο Σχήμα 13.24 παρουσιάζεται ένα τυπικό πολύγωνο (πεντάγωνο) και η βασική ορολογία, που το συνοδεύει. Τα βέλη δείχνουν ότι το συγκεκριμένο πολύγωνο είναι θετικά προσανατολισμένο¹.



Σχήμα 13.24: Το πολύγωνο και η ορολογία του.

¹Υπενθύμιση: Ένας απλά κλειστός δρόμος (ή βρόγχος) είναι **θετικά προσανατολισμένος**, αν, όταν κάποιος τον διατρέχει κατά τη φορά του βέλους, το εσωτερικό του βρόγχου βρίσκεται πάντα στην αριστερή πλευρά του.

Θεωρούμε λοιπόν ένα θετικά προσανατολισμένο πολύγωνο P στο w -επίπεδο με n πλευρές και έστω ότι οι εσωτερικές γωνίες σε διαδοχικές κορυφές είναι $c_1\pi, c_2\pi, c_3\pi, c_4\pi, \dots, c_{n-1}\pi, c_n\pi$. Υποθέτουμε ότι $w = f(z)$ είναι μια ένα προς ένα σύμμορφη απεικόνιση του εσωτερικού του πολυγώνου επί του άνω z -ημιεπιπέδου. Έτσι η $f(z)$ είναι αναλυτική για $y > 0$ και τουλάχιστον συνεχής για $y \geq 0$. Υποθέτουμε επίσης ότι η αντίστροφη απεικόνιση $z = g(w)$ είναι αναλυτική στο εσωτερικό του πολυγώνου P και τουλάχιστον συνεχής στην κλειστή περιοχή, που περικλείει το εσωτερικό και την περίμετρο του P . Επειδή η περίμετρος (σύνορο) του P απεικονίζεται στον πραγματικό άξονα, οι διαδοχικές κορυφές του P απεικονίζονται στα σημεία $c_1, c_2, c_3, \dots, c_{n-1}, c_n$ του πραγματικού άξονα, όπως ακριβώς αυτά αποτυπώνονται στο Σχήμα 13.25.



Σχήμα 13.25: Απεικόνιση Πολυγώνου στο Άνω Ημιεπίπεδο.

Σε όρους παραγώγου και διαφορικών έχουμε τη σχέση

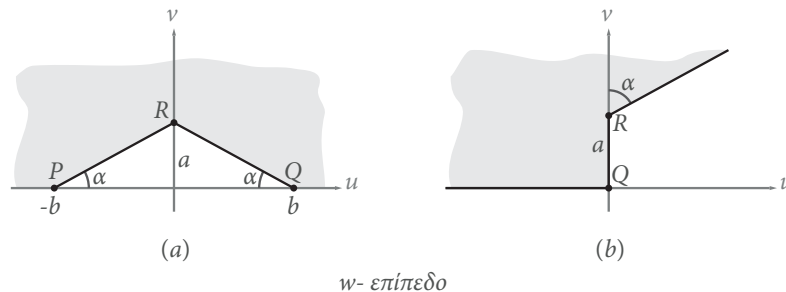
$$dw = f'(z)dz. \quad (5.1)$$

Αν τώρα υποθέσουμε ότι οι απεικονίσεις $z = g(w)$ και $w = f(z)$ είναι αναλυτικές πάνω στην περίμετρο του πολυγώνου P και όχι μόνο στο εσωτερικό του, είναι δυνατόν να αποκτήσουμε κάποια αίσθηση ως προς τη μορφή της απεικόνισης $w = f(z)$ θεωρώντας τις σχέσεις των dw, dz στην περίμετρο.

Πράγματι, έστω w ένα σημείο μιας πλευράς του P (όχι κορυφή) και η εικόνα του $z = g(w)$ στο z -επίπεδο. Αν το dz θεωρηθεί ως ένα θετικό διάνυσμα στον πραγματικό άξονα του z -επιπέδου, αναμένεται ότι το dw θα είναι ένα διάνυσμα κατά μήκος μιας πλευράς του P , το οποίο θα δείχνει προς τη θετική κατεύθυνση, όπως φαίνεται στο Σχήμα 13.25. Το γεγονός αυτό συνεπάγεται ότι το

$$\arg f'(z) = \arg \frac{dw}{dz}$$

παραμένει σταθερό καθώς το w διατρέχει μια πλευρά από τη μια κορυφή έως την επόμενη. Όμως, όταν το σημείο w περάσει από την κορυφή (εσωτερικής) γωνίας $c_1\pi$ τότε το όρισμα $\arg dw$ αλλάζει κατά την ποσότητα $\pi(1 - c_1)$ (αν, δηλαδή,



Σχήμα 13.38: Σχήμα των Προβλημάτων [13] και [14].

[11] Να βρεθεί ο μετασχηματισμός που απεικονίζει την περιοχή του w -επιπέδου όπως φαίνεται στο Σχήμα 13.37 (a) του άνω z -ημιεπιπέδου.

[12] Να βρεθεί ο μετασχηματισμός που απεικονίζει την περιοχή του w -επιπέδου, όπως φαίνεται στο Σχήμα 13.37 (b) επί του άνω z -ημιεπιπέδου.

[13] Να βρεθεί ο μετασχηματισμός που απεικονίζει την περιοχή του w -επιπέδου όπως φαίνεται στο Σχήμα 13.38 (a) του άνω z -ημιεπιπέδου.

[14] Να βρεθεί ο μετασχηματισμός που απεικονίζει την περιοχή του w -επιπέδου, όπως φαίνεται στο Σχήμα 13.38 (b) επί του άνω z -ημιεπιπέδου.

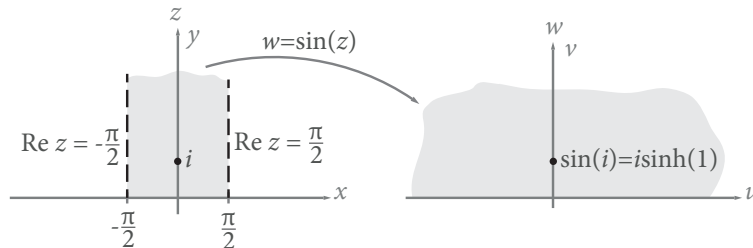
13.6 Στοιχειώδεις Σύμμορφες Απεικονίσεις

Σε αυτή την Ενότητα θα μελετήσουμε τις βασικές γεωμετρικές ιδιότητες των κυριοτέρων στοιχειωδών συναρτήσεων.

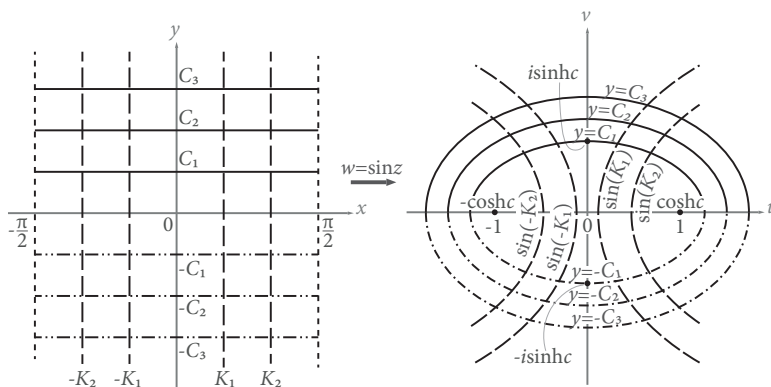
1. Ημιτονική Συνάρτηση Η συνάρτηση του ημιτόνου ενός μιγαδικού αριθμού γράφεται

$$w = u + iv = f(z) = \sin z = \sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \quad (6.3)$$

όπου $u = u(x, y) = \sin x \cosh y$, $v = v(x, y) = \cos x \sinh y$ και όπως εύκολα φαίνεται, είναι περιοδική με περίοδο 2π . Έτσι περιορίζοντας το z στην ημιάπειρη λωρίδα S , που ορίζεται από τη σχέση $(-\pi/2) \leq x \leq (\pi/2)$, η συνάρτηση $f(z)$ είναι αμφιμονοσήμαντη. Επειδή $f'(z) = \cos z$ μηδενίζεται στα σημεία $\pm(\pi/2)$, η συνάρτηση $f(z)$ δεν είναι σύμμορφη σ' αυτά τα σημεία. Επιπλέον παρατηρούμε τα εξής:



Σχήμα 13.40: $w = \sin z$: Απεικόνιση της λωρίδας $y = \operatorname{Im} z > 0$, $-\pi/2 \leq x = \operatorname{Re} z \leq \pi/2$.



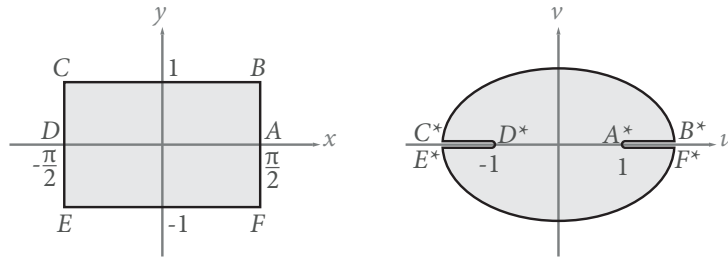
Σχήμα 13.41: $H w = \sin z$ και διάστημα $y = c > 0$, $(-\pi/2) \leq x \leq (\pi/2)$.

(iii) Το ορθογώνιο που ορίζεται από τη σχέση $(-\pi/2) < x < (\pi/2)$, $-c < y < c$ απεικονίζεται στο εσωτερικό της έλλειψης (6.4). Όμως το σύνορο αποτελείται από την έλλειψη (6.4) και τα δύο τμήματα του άξονα των u , όπως φαίνεται στο Σχήμα 13.44 (όπου $c = 1$).

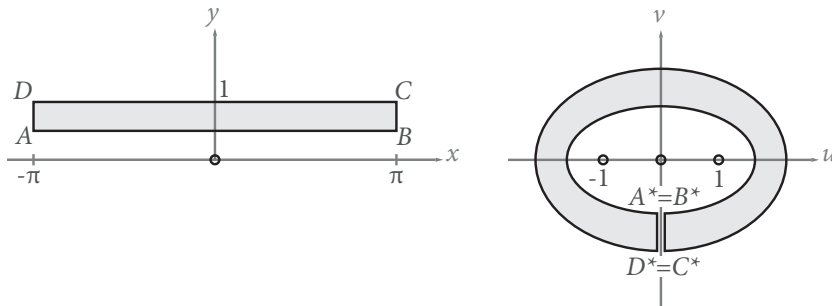
Οι εικόνες των σημείων στα κάθετα μέρη του συνόρου συμπίπτουν κατά ζεύγη, όπως φαίνονται στο Σχήμα 13.42, όπου έχει ληφθεί το $c = 1$.

(iv) Το ορθογώνιο που ορίζεται από τη σχέση $-\pi < x < \pi$, $0 < c < y < d$ απεικονίζεται σε ένα ελλειπτικό δακτύλιο, στον οποίο έχει αφαιρεθεί ο αρνητικός άξονας των v (βλέπε Σχήμα 13.43).

(v) Οι ευθείες $x = k$, $(-\pi/2) < x < (\pi/2)$ απεικονίζονται στις συνεστιακές



Σχήμα 13.42: $H w = \sin z$ και το Ορθογώνιο $(-\pi/2) < x < (\pi/2)$, $-c < y < c$.



Σχήμα 13.43: $H w = \sin z$ και το Ορθογώνιο $-\pi < x < \pi$, $0 < c < y < d$.

υπερβολές, που τέμνονται ελλείψεις κατά ορθή γωνία και ο άξονας των y ($x = 0$) απεικονίζεται στον άξονα των v (βλέπε Σχήμα 13.43).

2. Συνημιτονική Συνάρτηση Η συνάρτηση του συνημιτόνου ενός μιγαδικού αριθμού γράφεται

$$w = u + iv = f(z) = \cos z = \sin(z + (\pi/2)) \quad (6.5)$$

ορίζει την ίδια απεικόνιση, όπως η $\sin z$ με μετάθεση προς τα δεξιά κατά $\pi/2$. Ως απεικόνιση από το z -επίπεδο στο w -επίπεδο είναι ένα προς ένα και επί.

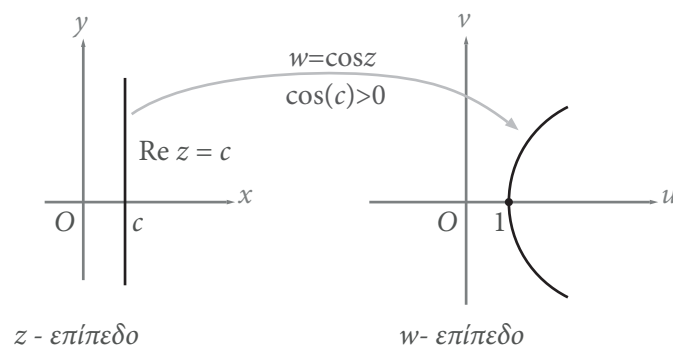
Η συνάρτηση $w = u + iv = f(z) = \cos z$ απεικονίζει ευθείες παράλληλες προς τον άξονα φανταστικών $\Re z = c$ σε υπερβολές με εστίες τα σημεία ± 1 . Πράγματι, για $z = c + it$, $-\infty < t < \infty$, προκύπτει

$$w = u + iv = \cos z = \cos(c + it) = \cos c \cosh t - i \sin c \sinh t.$$

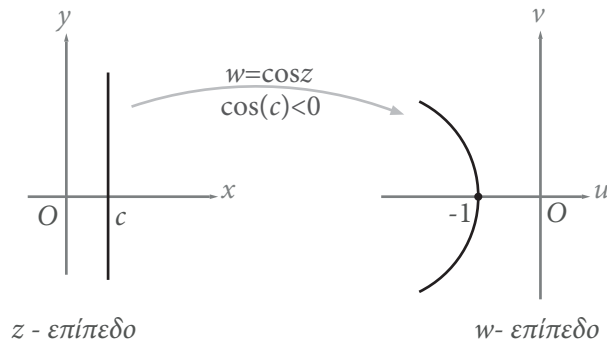
Έτσι έχουμε $u = \cos c \cosh t$ και $v = -\sin c \sinh t$. Απαλείφοντας το t από τις δύο σχέσεις προκύπτει η εξίσωση

$$\frac{u^2}{\cos^2 c} - \frac{v^2}{\sin^2 c} = 1, \quad (6.6)$$

η οποία ορίζει μια οικογένεια υπερβολών με εστίες τα σημεία $+1$ και -1 , με την προϋπόθεση ότι $\cos c \neq 0, \sin c \neq 0$. Στην πραγματικότητα, για c δοθέν, η εικόνα του $\operatorname{Re} z = c$ αποτελείται από ένα μόνο κλάδο της υπερβολής, αφού το $\cosh t > 0$, για όλα τα t , απαιτεί όπως το $u > 0$, όταν $\cos c > 0$ ή το $u < 0$, όταν $\cos c < 0$, όπως φαίνεται και στα Σχήματα 13.44 και 13.45.

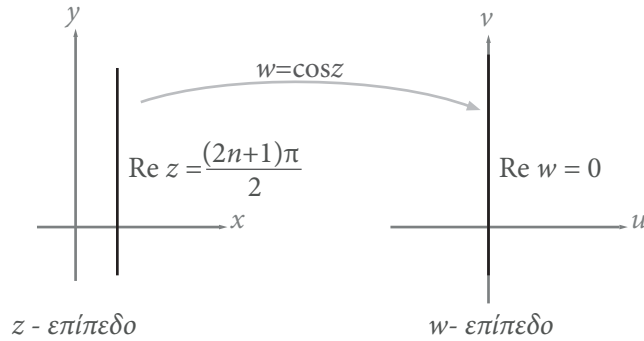


Σχήμα 13.44: Η απεικόνιση $w = \cos z$ με $\operatorname{Re} z = c$ και $\cos(c) > 0, \sin(c) \neq 0$.



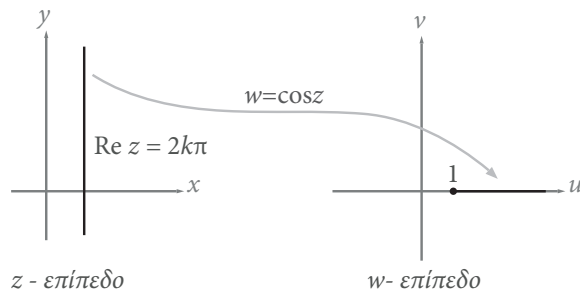
Σχήμα 13.45: Η απεικόνιση $w = \cos z$ με $\operatorname{Re} z = c$ και $\cos(c) < 0, \sin(c) \neq 0$.

Αν $\cos c = 0$, τότε $c = (2n + 1)\pi/2$, για κάποιο $n \in \mathbb{Z}$. Τότε $u = 0$ και $v = (-1)^{n+1} \sinh t$. Όμως η συνάρτηση $(-1)^{n+1} \sinh t$ λαμβάνει όλες τις πραγματικές τιμές, καθώς το t διατρέχει όλο το $\mathbb{R}$, έτσι το w διατρέχει όλο τον φανταστικό άξονα, καθώς το z μεταβάλλεται κατά το $\operatorname{Re} z = c$, όταν το $\cos c = 0$ (βλέπε Σχήμα 13.46).



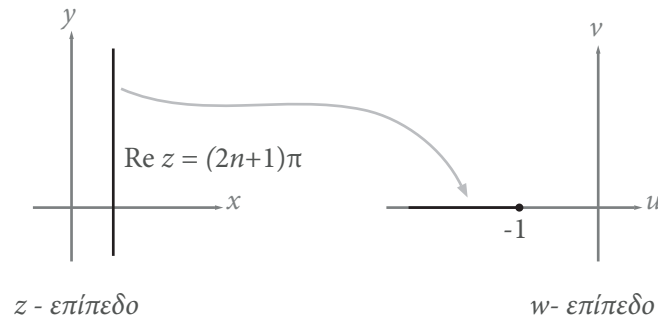
Σχήμα 13.46: Η $w = \cos z$ απεικονίζει την κάθετη ευθεία $\operatorname{Re} z = (2n+1)\pi/2$ στον φανταστικό άξονα $\operatorname{Re} w = 0$.

Αν $\sin c = 0$, τότε $c = n\pi$, για κάποιο $n \in \mathbb{Z}$. Τότε $u = (-1)^n \cosh t$ και $v = 0$. Όμως η συνάρτηση $\cosh t \geq 1$, καθώς το t διατρέχει όλο το $\mathbb{R}$, έτσι το $w = u + iv$ διατρέχει όλο το θετικό πραγματικό ημιάξονα $[1, \infty)$, όταν το n είναι άρτιο και όλο τον αρνητικό πραγματικό ημιάξονα $(-\infty, -1]$, όταν το n είναι περιττός. Αυτά φαίνονται στα Σχήματα 13.47 και 13.48.



Σχήμα 13.47: Η $w = \cos z$ απεικονίζει την κάθετη ευθεία $\operatorname{Re} z = 2k\pi$ στο $[1, +\infty)$.

Ακολουθώντας ανάλογη ανάλυση, βρίσκουμε ότι ευθείες παράλληλες προς τον πραγματικό άξονα, με εξίσωση δηλαδή $\operatorname{Im} z = c$, απεικονίζονται στην $w = \cos(t + ic)$, $-\infty < t < \infty$. Αυτή η συνάρτηση αναλύεται $w = \cos(t + ic) = \cos(t) \cosh(c) - i \sin(t) \sinh(c)$, δηλαδή έχουμε $u = u(t) = \cos(t) \cosh(c)$, $v = v(t) = \sin(t) \sinh(c)$. Αν $c \neq 0$, η απαλοιφή του t από τις δύο τελευταίες σχέσεις

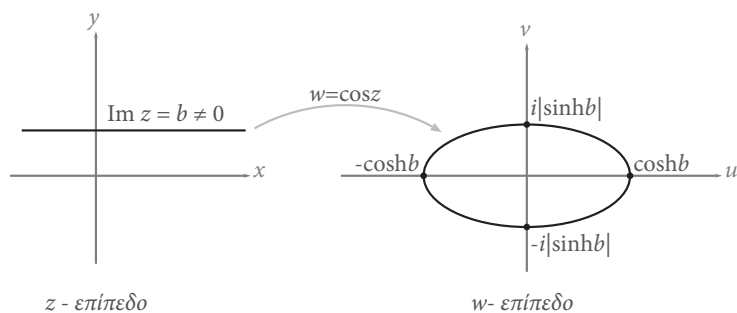


Σχήμα 13.48: Η $w = \cos z$ απεικονίζει την κάθετη ευθεία $\operatorname{Re} z = (2k+1)\pi$ στο $(-\infty, -1]$.

δίδει την εξίσωση

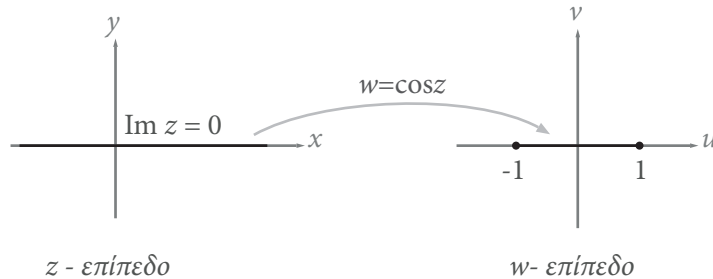
$$\frac{u^2}{\cosh^2 c} + \frac{v^2}{\sinh^2 c} = 1, \quad (6.7)$$

της έλλειψης με εστίες τα σημεία ± 1 στον πραγματικό άξονα. Αν $\operatorname{Im} z = c = 0$, τότε η $\operatorname{Im} z = 0$ παριστάνει τον πραγματικό άξονα και η εικόνα καθορίζεται από τις συναρτήσεις $u = u(t) = \cos(t)$ και $v = v(t) = 0$, δηλαδή το $w = w(t) = \cos(t)$ μεταβάλλεται μεταξύ -1 και $+1$ στον πραγματικό άξονα, καθώς το t διατρέχει το $\mathbb{R}$. Όλα τα παραπάνω φαίνονται στα Σχήματα 13.49 και 13.50.



Σχήμα 13.49: Η $w = \cos z$ απεικονίζει οριζόντιες ευθείες $\operatorname{Im} z = b \neq 0$ σε ελλείψεις.

3. Η Συνάρτηση Εφαπτομένη Η συνάρτηση της εφαπτομένης $w = u + iv = f(z) = \tan z$ μπορεί να μελετηθεί θεωρούμενη ως σύνθεση συναρτήσεων, των οποίων έχει ήδη γίνει σχετική μελέτη. Έτσι εκφράζοντας τη συνάρτηση $w = \tan z$



Σχήμα 13.50: Η $w = \cos z$ απεικονίζει τον πραγματικό άξονα $\text{Im } z = b = 0$ στο διάστημα $[-1, +1]$.

με τη βοήθεια των τριγωνομετρικών συναρτήσεων $\sin z$, $\cos z$ και στη συνέχεια αυτές με την εκθετική συνάρτηση προκύπτει η σχέση

$$w = u + iv = f(z) = \tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{(e^{iz} - e^{-iz})/i}{(e^{iz} + e^{-iz})/2} = \frac{(e^{2iz} - 1)/i}{e^{2iz} + 1}. \quad (6.8)$$

Θέτοντας $t = e^{2iz}$ και χρησιμοποιώντας τη σχέση $1/i = -i$, προκύπτει

$$w = h(s) = h(g(f(z))) = -is, \quad s = g(t) = \frac{t-1}{t+1}, \quad t = f(z) = e^{2iz}. \quad (6.9)$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι η συνάρτηση $w = \tan z$ μπορεί να θεωρηθεί ως σύνθεση μιας εκθετικής απεικόνισης $f(z)$, ενός ρητογραφμικού μετασχηματισμού $g(t)$ και μιας στροφής $h(s)$ κατά γωνία $\omega = \pi/2$.

Παράδειγμα 13.6.1. Να βρεθεί η εικόνα της άπειρης κάθετης λωρίδας $S: -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$ του z -επιπέδου στο w -επίπεδο μέσω της απεικόνισης $w = \tan z$.

Λύση. Θα μελετήσουμε το πρόβλημα ακολουθώντας τις παραπάνω υποδείξεις.

(α) Εκθετική Απεικόνιση. Έχουμε το Επειδή ισχύει $t = f(z) = e^{2iz} = e^{-2y+2ix}$, προκύπτει ότι $|t| = e^{-2y}$ και $\text{Arg } t = 2x$. Επομένως οι κάθετες γραμμές $x = -\pi/4$, $x = 0$, $x = \pi/4$ απεικονίζονται στις ακτίνες με γωνίες $\text{Arg } t = -\pi/2$, $\text{Arg } t = 0$, $\text{Arg } t = \pi/2$, αντίστοιχα.

Επομένως η λωρίδα S απεικονίζεται μέσω της $t = e^{2iz}$ στο δεξιό t -ημιεπίπεδο. Επίσης έχουμε $|t| = e^{-2y} < 1$, όταν $y > 0$ και $|t| = e^{-2y} > 1$, όταν $y < 0$. Έτσι το άνω μισό της λωρίδας S απεικονίζεται στο μοναδιαίο δίσκο $|t| < 1$, ενώ το κάτω μισό της λωρίδας S απεικονίζεται στο εξωτερικό του μοναδιαίου δίσκου $|t| > 1$, όπως αυτά φαίνονται στο Σχήμα 13.51.

(b) Ρητογραμμικός Μετασχηματισμός. Σύμφωνα με τη σχέση 6.9 έχουμε το ρητογραμμικό μετασχηματισμό

$$s = g(t) = \frac{t-1}{t+1}. \quad (6.10)$$

Αν $t \in \mathbb{R}$, τότε επίσης $s \in \mathbb{R}$, δηλαδή ο πραγματικός άξονας στο t -επίπεδο απεικονίζεται στον πραγματικό άξονα στο s -επίπεδο. Επιπλέον, ο φανταστικός άξονας στο t -επίπεδο απεικονίζεται επί του μοναδιαίου κύκλου $|s| = 1$ στο s -επίπεδο, αφού για $t = ip$ από τη σχέση 6.10 προκύπτει

$$|s| = |g(ip)| = \left| \frac{ip-1}{ip+1} \right| = \left| \frac{(ip-1)^2}{p^2+1} \right| = 1. \quad (6.11)$$

Το δεξί t -ημιεπίπεδο απεικονίζεται μέσα στο μοναδιαίο κύκλο $|s| = 1$, διότι το σημείο $t = 1$ έχει την εικόνα του $g(1) = 0$ μέσα σ' αυτόν τον κύκλο. Τελικά, ο μοναδιαίος κύκλος $|t| = 1$ απεικονίζεται επί του φανταστικού s -άξονα, επειδή αυτός ο κύκλος είναι $t = e^{i\theta}$, έτσι ώστε η σχέση 6.10 να δίδει

$$s = g(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} + 1} = \frac{e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}}{e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2}} = \frac{i \sin(\theta/2)}{\cos(\theta/2)}. \quad (6.12)$$

(c) Γραμμική Απεικόνιση - Στροφή κατά γωνία $\omega = \pi/2$. Από το s -επίπεδο μεταβαίνουμε στο w -επίπεδο με τη γραμμική απεικόνιση $w = h(s) = -is$, η οποία είναι μια στροφή κατά γωνία $\omega = \pi/2$.

Συνοψίζοντας, λοιπόν βλέπουμε ότι η συνάρτηση $w = \tan z$ απεικονίζει τη λωρίδα $S : -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$ του z -επιπέδου στο μοναδιαίο δίσκο στο w -επίπεδο, με τα τέσσερα τεταρτημόρια της λωρίδας S να απεικονίζονται όπως ακριβώς φαίνεται στο Σχήμα 13.51. Η απεικόνιση αυτή είναι ένα προς ένα και σύμμορφη.

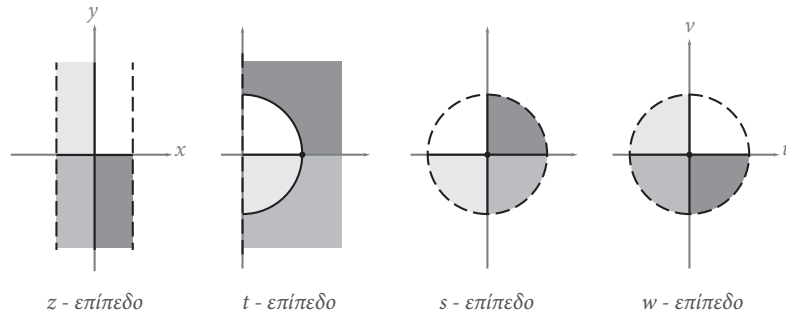
4. Υπερβολικές Συναρτήσεις Η συνάρτηση του υπερβολικού ημιτόνου ενός μιγαδικού αριθμού γράφεται

$$w = u + iv = f(z) = \sinh z = -i \sin(iz) \quad (6.13)$$

ορίζει ένα μετασχηματισμό, ο οποίος αποτελεί σύνθεση μιας στροφής $t = iz$, μιας ημιτονικής $p = \sin t$ και πάλι μιας στροφής $w = -ip$. Η συνάρτηση του υπερβολικού συνημιτόνου ενός μιγαδικού αριθμού γράφεται

$$w = u + iv = f(z) = \cosh z = \cos(iz) \quad (6.14)$$

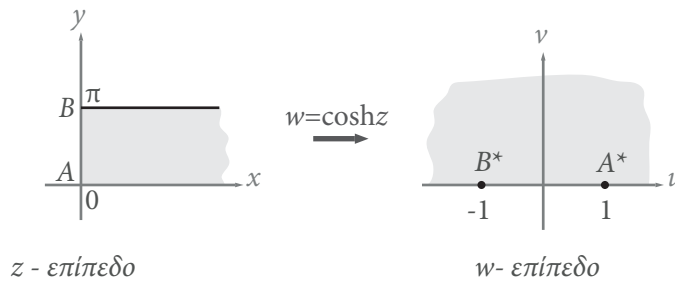
ορίζει ένα μετασχηματισμό, ο οποίος αποτελεί σύνθεση μιας στροφής $t = iz$ και μιας συνημιτονικής $p = \cos t$.



Σχήμα 13.51: Η απεικόνιση της κάθετης λωρίδας $S : -\pi/4 < x < \pi/4$ μέσω της $w = \tan z$.

Παράδειγμα 13.6.2. Να βρεθεί η εικόνα της ημιάπειρης οριζόντιας λωρίδας $S : 0 \leq x, 0 \leq y \leq \pi$ του z -επιπέδου στο w -επίπεδο μέσω της απεικόνισης $w = \cosh z$.

Λύση. Θα μελετήσουμε το πρόβλημα ακολουθώντας τις παραπάνω υποδείξεις. Παρατηρούμε ότι επειδή $\cosh 0 = 1$, το σημείο $z = 0$ του z -επιπέδου απεικονίζεται στο σημείο $w = 1$ του w -επιπέδου. Για $z = x \in \mathbb{R}^+$, το $\cosh x$ είναι πραγματικός αριθμός και αυξάνει καθώς το x αυξάνει, ξεκινώντας από το 1. Επομένως ο θετικός x άξονας απεικονίζεται επί του τμήματος $u \geq 1$ του u -άξονα.



Σχήμα 13.52: Η απεικόνιση της ημιάπειρης οριζόντιας λωρίδας $S : 0 \leq x, 0 \leq y \leq \pi$ μέσω της $w = \cosh z$.

Για φανταστικούς αριθμούς $z = iy$ ισχύει $\cosh iy = \cos y$. Αυτό συνεπάγεται ότι το αριστερό σύνορο της λωρίδας απεικονίζεται επί του τμήματος $-1 \leq u \leq 1$ του u -άξονα, με το σημείο $z = i\pi$ να αντιστοιχεί στο $w = \cosh i\pi = \cos \pi = -1$.