

**ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ
&
ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ**

**ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ
&
ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ:**

ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Νικόλαος Μ. Σταυρακάκης
Καθηγητής Ε.Μ.Π.



Ν. Μ. Σταυρακάκης
Εκδόσεις

ΑΘΗΝΑ, ΜΑΡΤΙΟΣ 2016

Πρόλογος

Το βιβλίο αυτό αποτελεί μια εισαγωγική προσέγγιση στη θεωρία των Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων και των Μιγαδικών Συναρτήσεων. Στις μέρες μας οι Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις αποτελούν μια από τις σημαντικότερες περιοχές τόσο των Θεωρητικών όσο και των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών. Το γεγονός αυτό οφείλεται, αφενός στη συχνότατη χρήση των Εξισώσεων Μερικών Παραγώγων στις Φυσικές, Τεχνολογικές, Οικονομικές και λοιπές Εφαρμοσμένες Επιστήμες, αφετέρου δε στην πληθώρα των νέων προβλημάτων, ερωτημάτων και θεωριών, που δημιουργούνται και αναπτύσσονται στην περιοχή των Θεωρητικών Μαθηματικών από την ερευνητική ενασχόληση για την επίλυση και γενικότερη μελέτη αυτών των εξισώσεων.

Η θεωρία των Μιγαδικών Συναρτήσεων, γνωστή και ως Μιγαδική Ανάλυση, είναι ένας σημαντικός κλάδος των Μαθηματικών και ιδιαίτερα της Μαθηματικής Ανάλυσης, που μελετά τις ιδιότητες των συναρτήσεων των μιγαδικών αριθμών. Είναι χρήσιμη σε πολλούς κλάδους των Μαθηματικών, όπως η Αλγεβρική Γεωμετρία, η Θεωρία Αριθμών και τα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά καθώς και στη Φυσική, συμπεριλαμβανομένης της Υδροδυναμικής και Θερμοδυναμικής, της Θεωρίας Χορδών και της Κβαντικής Θεωρία Πεδίου αλλά και σε τομείς της Μηχανικής, όπως η Αεροδιαστημική, η Μηχανολογία, η Ηλεκτρολογία. Με το πέρασμα των δεκαετιών η Μιγαδική Ανάλυση αναδεικνύεται σε ένα από τα πιο όμορφα καθώς και χρήσιμα αντικείμενα των Μαθηματικών. Στη σύγχρονη εποχή, έχει γίνει πολύ δημοφιλής μέσα από μια νέα ώθηση, που δέχεται ο κλάδος, από την Μιγαδική Δυναμική και τις εικόνες των fractals που παράγονται με τις επαναλήψεις ολόμορφων συναρτήσεων.

Βασικό σκοπό της συγγραφής αυτής της εργασίας αποτέλεσε η παροχή στους φοιτητές των Μαθηματικών, Φυσικών και Τεχνολογικών Επιστημών αλλά και γενικότερα στην κοινότητα των μαθηματικών και εφαρμοσμένων επιστημόνων, ενός συγγράμματος, το οποίο θα δίδει τις θεμελιώδεις έννοιες, αξιώματα, θεωρία καθώς και μια ευρύτατη ποικιλία μεθόδων και τεχνικών επίλυσης μιας μεγάλης οικογένειας Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων, οι οποίες, όπως αναλυτικά παρουσιάζεται στο παρόν σύγγραμμα, αποτελούν προϊόν διαδικασιών μαθηματικής προτυποποίησης των κυριότερων φυσικών, τεχνολογικών, οικονομικών, κοινωνικών και λοιπών φαινομένων. Συγχρόνως παρέχονται όλα τα βασικά εισαγωγικά στοιχεία της θεωρίας των Μιγαδικών Συναρτήσεων -σειρές, ολοκληρώματα, ολοκληρωτικά υπόλοιπα, σύμμορφη απεικόνιση, κ.α.- αναγκαία σε πολλά πεδία τόσο των Θεωρητικών όσο και των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών.

ΜΕΡΟΣ Α. Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

Στο **Κεφάλαιο 1**, δίδονται οι βασικές έννοιες και ορισμοί των μερικών διαφορικών εξισώσεων. Σκιαγραφείται η έννοια ενός καλά τοποθετημένου προβλήματος αρχικών και/ή

συνοριακών συνθηκών καθώς και η ευστάθεια (συνεχής εξάρτηση από τα δεδομένα) των λύσεων. Γίνεται η ταξινόμηση των μερικών διαφορικών εξισώσεων 2ης τάξης στις δύο και περισσότερες διαστάσεις. Αναπτύσσεται μια μέθοδος επίλυσης μερικών διαφορικών εξισώσεων 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές και ως εφαρμογή αυτής παρουσιάζεται η εύρεση της λύσης D'Alembert της Κυματικής Εξίσωσης στην πραγματική ευθεία.

Στο **Κεφάλαιο 2**, μετά από μια σύντομη ιστορική ανασκόπηση, γίνεται η μελέτη της γραμμικής ομογενούς ή μη ελλειπτικής εξίσωσης σε συγκεκριμένα φραγμένα πεδία στις δύο διαστάσεις (ορθογώνιο, δίσκος, δακτύλιος, κ.λ.π.) με διάφορα είδη συνοριακών συνθηκών (Dirichlet, Neumann, Robin ή μεικτές). Η βασική τεχνική επίλυσης σε όλο το Κεφάλαιο είναι η μέθοδος χωρισμού των μεταβλητών ή μέθοδος Fourier. Τέλος, δίδονται οι κυριότερες ιδιότητες των λύσεων των ελλειπτικών προβλημάτων (αρμονικές συναρτήσεις), όπως μονοσήμαντο, αρχή μεγίστου, συνεχής εξάρτηση από συνοριακά δεδομένα, κ.λ.π..

Στο **Κεφάλαιο 3**, γίνεται αναλυτική παρουσίαση της διαδικασίας μαθηματικής προτυποποίησης σ' ένα φαινόμενο διάδοσης θερμότητας σε μια πεπερασμένη ράβδο και διαμόρφωση της αντίστοιχης εξίσωσης θερμότητας. Στη συνέχεια δίδονται διάφοροι μέθοδοι επίλυσης ομογενών ή μη προβλημάτων παραβολικού τύπου με ομογενείς ή μη, χρονο-ανεξάρτητες ή μη συνοριακές συνθήκες. Και σ' αυτό το Κεφάλαιο η βασική τεχνική επίλυσης είναι η μέθοδος χωρισμού των μεταβλητών. Επίσης παρουσιάζεται η ποιοτική επεξεργασία των λύσεων αυτών των προβλημάτων και αναδεικνύονται τα βασικά χαρακτηριστικά αυτών, όπως ομαλότητα, ασυμπτωτική συμπεριφορά, μονοσήμαντο, χρόνος χαλάρωσης, κ.λ.π.. Τέλος, δίδονται βασικά εισαγωγικά στοιχεία της ποιοτικής θεωρίας των παραβολικών εξισώσεων, όπως αρχή μεγίστου, μονοσήμαντο των λύσεων και συνεχής εξάρτηση από τα αρχικά και συνοριακά δεδομένα.

Στο **Κεφάλαιο 4**, μετά από μια σύντομη ιστορική ανασκόπηση, γίνεται αναλυτική παρουσίαση της διαδικασίας μαθηματικής προτυποποίησης σ' ένα φαινόμενο κυματικής διάδοσης σε μια τέλεια εύκαμπτη πεπερασμένη χορδή και διαμόρφωση των αντίστοιχων βασικών γραμμικών και μη κυματικών εξισώσεων. Στη συνέχεια δίδονται διάφοροι μέθοδοι επίλυσης ομογενών ή μη προβλημάτων υπερβολικού τύπου με ομογενείς ή μη, χρονο-ανεξάρτητες ή μη συνοριακές συνθήκες. Και σ' αυτό το Κεφάλαιο η βασική τεχνική επίλυσης είναι η μέθοδος χωρισμού των μεταβλητών. Επίσης παρουσιάζεται η ποιοτική επεξεργασία των λύσεων αυτών των προβλημάτων και αναδεικνύονται τα βασικά χαρακτηριστικά αυτών, όπως ομαλότητα, μονοσήμαντο, φυσική σημασία, κ.λ.π.. Στο δεύτερο μέρος του Κεφαλαίου 4 παρουσιάζονται μερικές από τις πλέον χαρακτηριστικές εξισώσεις της Μαθηματικής Φυσικής (Εξίσωση Klein - Gordon, Εξίσωση Τηλεγράφου-Τηλεφώνου, Εξίσωση της Δοκού), δίδονται μέθοδοι επίλυσης και σχολιάζονται τα βασικά χαρακτηριστικά αυτών συνδεδεμένα με τα φυσικά φαινόμενα, των οποίων αποτελούν το μαθηματικό πρότυπο.

Στο **Κεφάλαιο 5**, μελετώνται τα προβλήματα των τριών προηγούμενων Κεφαλαίων 2, 3 και 4 (Ελλειπτικά, Παραβολικά, Υπερβολικά) σε περισσότερες χωρικές διαστάσεις (δύο και

τρεις). Φαινόμενα μετάδοσης θερμότητας ή ταλαντώσεων, που λαμβάνουν χώρα σε λεπτές πλάκες ή μεμβράνες, σε κυλίνδρους, ορθογώνια παραλληλόγραμμα ή σφαίρες, μπορούν να περιγραφούν από μερικές διαφορικές εξισώσεις, που ορίζονται στις δύο ή τρεις διαστάσεις ανάλογα με τους περιορισμούς. Εδώ για τη μελέτη των μη ομογενών προβλημάτων εκτός της βασικής μεθόδου χωρισμού των μεταβλητών, που έχει χρησιμοποιηθεί μέχρι τώρα στα φραγμένα πεδία, παρουσιάζεται η τεχνική του πεπερασμένου μετασχηματισμού Fourier και εφαρμόζεται σε χαρακτηριστικές περιπτώσεις. Όπως θα φανεί στη συνέχεια οι τεχνικές, που χρησιμοποιούνται για την επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων σε περισσότερες διαστάσεις, αποτελούν φυσιολογική γενίκευση ή επέκταση των ήδη γνωστών μεθόδων, που αναπτύχθηκαν για μερικές διαφορικές εξισώσεις σε μια διάσταση. Εντούτοις πρέπει να τονισθεί ότι, οι διαδικασίες, που ακολουθούν είναι πολύπλοκες και συχνά οδηγούν σε προβλήματα *Sturm-Liouville*, των οποίων οι λύσεις είναι ειδικές συναρτήσεις. Ειδικότερα, προβλήματα ορισμένα σε κυκλικά ή κυλινδρικά πεδία οδηγούν σε λύσεις, που περιέχουν συναρτήσεις *Bessel*. Ενώ προβλήματα ορισμένα σε σφαιρικά πεδία οδηγούν σε λύσεις, που περιλαμβάνουν πολυώνυμα *Legendre*.

Στα προηγούμενα Κεφάλαια 2 έως 5 αναπτύχθηκαν τεχνικές για τη μελέτη των τριών βασικών κατηγοριών μερικών διαφορικών εξισώσεων δεύτερης (και ανώτερης άρτιας) τάξης, όταν αυτά είναι ορισμένα σε φραγμένο πεδίο. Όμως σε πολλά φυσικά, βιολογικά, κοινωνικά, κ.λ.π., φαινόμενα παρουσιάζεται η ανάγκη το αντίστοιχο μαθηματικό πρόβλημα να εξετασθεί σε ένα μη-φραγμένο πεδίο. Στο **Κεφάλαιο 6**, θα μελετηθούν οι τρεις βασικές κατηγορίες μερικών διαφορικών εξισώσεων 2ης τάξης σε μη φραγμένο πεδίο (κυρίως στη μια χωρική διάσταση). Η μελέτη τέτοιων προβλημάτων θα βασισθεί σε δύο κατηγορίες τεχνικών. Η πρώτη μέθοδος βασίζεται στο χωρισμό μεταβλητών σε άπειρο πεδίο, ο οποίος οδηγεί στην ολοκληρωτική αναπαράσταση της λύσης ονομαζόμενη ολοκλήρωμα Fourier. Η δε δεύτερη κατηγορία τεχνικών είναι αυτή των ολοκληρωτικών μετασχηματισμών. Συγκεκριμένα, εδώ θα ασχοληθούμε με τους μετασχηματισμούς Laplace, Fourier, Hankel καθώς και με κάποιες παραλλαγές αυτών.

Στο **Κεφάλαιο 7**, θα δοθούν οι γενικές αρχές και μερικά παραδείγματα μιας αναλυτικής μεθόδου επίλυσης προβλημάτων συνοριακών ή αρχικών συνθηκών συνήθων διαφορικών εξισώσεων, η οποία βασίζεται στον καθορισμό μιας ειδικής συνάρτησης. Η συνάρτηση αυτή φέρει το όνομα του George Green, του ανθρώπου που πρώτος την εισήγαγε από τις αρχές του προπερασμένου αιώνα (1828). Η σπουδαιότητα της μεθόδου, εκτός των άλλων, έγκειται πρώτον στο γεγονός ότι, η διαφορική (συνήθης ή μερική) εξίσωση μετασχηματίζεται σε ολοκληρωτική, η επίλυση της οποίας είναι ευκολότερη και δεύτερον, η παράσταση της λύσης φανερώνει τον τρόπο εξάρτησής της, τόσο από τις περιοριστικές συνθήκες (αρχικές και / ή συνοριακές), που συνοδεύουν το πρόβλημα, όσον και από την εξωτερική επίδραση (μη-ομογενής όρος).

Τέλος, στο **Κεφάλαιο 8**, ορίζεται η συνάρτηση Green για προβλήματα συνοριακών συνθηκών ή αρχικών και συνοριακών συνθηκών μερικών διαφορικών εξισώσεων και μελετώνται οι ιδιότητες αυτών. Στη συνέχεια γίνεται χρήση της συνάρτησης Green για την επίλυση

χαρακτηριστικών περιπτώσεων των τριών βασικών κατηγοριών μερικών διαφορικών εξισώσεων 2ης τάξης κυρίως στη μια χωρική (αλλά και στις δύο και τρεις) διάσταση, όπου εμφανίζεται η σύνδεση της λύσης με τα δεδομένα (αρχικά και / ή συνοριακά) καθώς και με τους τυχόν μη ομογενείς όρους.

ΜΕΡΟΣ Β. Μιγαδικές Συναρτήσεις

Στο **Κεφάλαιο 9**, μετά από μια σύντομη αλλά αρκετά πλήρη αναφορά στην ιστορική εξέλιξη της θεωρίας των Μιγαδικών Αριθμών και της Μιγαδικής Ανάλυσης γενικότερα στην Ενότητα 9.1, στην Ενότητα 9.2 παρατίθενται, κατά ένα τρόπο αρκετά αναλυτικό τα βασικά στοιχεία της θεωρίας: των μιγαδικών αριθμών, του μιγαδικού επιπέδου, των ακολουθιών μιγαδικών αριθμών, του ορίου, της συνέχειας, της ομοιόμορφης συνέχειας των μιγαδικών συναρτήσεων καθώς και της τοπολογίας του μιγαδικού επιπέδου. Στη Ενότητα 9.3 ορίζονται και διατυπώνονται οι βασικές ιδιότητες των αναλυτικών (ολόμορφων) συναρτήσεων και στη συνέχεια στην Ενότητα 9.4 παρουσιάζονται οι πιο σημαντικές από αυτές, όπως η Εκθετική Συνάρτηση, οι στοιχειώδεις Τριγωνομετρικές και Υπερβολικές Συναρτήσεις και οι σχέσεις μεταξύ αυτών, η Λογαριθμική Συνάρτηση καθώς και η συνάρτηση Δύναμη Μιγαδικών Αριθμών.

Το **Κεφάλαιο 10**, ασχολείται με τη θεωρία της Μιγαδικής Ολοκλήρωσης στην Ενότητα 10.1, όπου ορίζεται και παρατίθενται οι βασικές ιδιότητες καθώς και χαρακτηριστικά παραδείγματα των (επικαμπυλίων) μιγαδικών ολοκληρωμάτων. Στην Ενότητα 10.2 διατυπώνεται το Ολοκληρωτικό Θεώρημα Cauchy και δίδεται η απόδειξη αυτού κατά Cauchy καθώς και η γενίκευση αυτής κατά Goursat. Στην επόμενη Ενότητα 10.3 με τη βοήθεια του Ολοκληρωτικού Θεωρήματος Cauchy απλοποιείται ο υπολογισμός του αορίστου ολοκληρώματος. Στην Ενότητα 10.4 αποδεικνύεται ο Ολοκληρωτικός Τύπος Cauchy και στη συνέχεια παρατίθεται σειρά εφαρμογών αυτού, που αφορούν την παράγωγο αναλυτικών συναρτήσεων, το Θεώρημα Morera, την αρχή μεγίστου καθώς και το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας.

Στο **Κεφάλαιο 11**, ορίζεται κατ' αρχήν η έννοια της σειράς μιγαδικών αριθμών και μελετώνται δύο βασικές οικογένειες αυτών. Στην Ενότητα 11.2 ορίζονται και παρουσιάζονται τα βασικά χαρακτηριστικά των Σειρών Taylor (και Σειρών Maclaurin) καθώς και πρακτικές μέθοδοι εύρεσης των Δυναμοσειρών. Στην Ενότητα 11.3 παρατίθεται η βασική θεωρία των Σειρών Laurent. Τέλος στην Ενότητα 11.4 αναπτύσσονται βασικές ιδιότητες και πράξεις στις Σειρές, όπως άθροισμα, γινόμενο, πηλίκο, ομοιόμορφη συνέχεια, παραγωγή, ολοκλήρωση, αναλυτικότητα και μερομορφία.

Στο **Κεφάλαιο 12**, ορίζεται η έννοια του ολοκληρωτικού υπόλοιπου και δίδονται αρκετά παραδείγματα. Στην Ενότητα 12.2 διατυπώνεται και αποδεικνύεται το Θεώρημα Ολοκληρωτικών Υπολοίπων, η γενίκευσή του και το Θεώρημα Αναπτύγματος Mittag-Leffler. Στη συνέχεια αναπτύσσεται μια σειρά από σημαντικές εφαρμογές αυτής της θεωρίας. Στην Ενότητα 12.3 υπολογίζονται γενικευμένα ολοκληρώματα ρητών Συναρτήσεων, στην 12.4

Ολοκληρώματα Fourier, στην 12.5 ολοκληρώματα πλειονότιμων συναρτήσεων, αφού εισαχθούν οι έννοιες του κλαδικού σημείου και των / κλαδικών τομών και στην Ενότητα 12.6 υπολογίζονται ορισμένα ολοκληρώματα Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων. Στην Ενότητα 12.7 παρουσιάζεται ο πολύ σημαντικός υπολογισμός του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace. Στην Ενότητα 12.8 υπολογίζεται με απλό τόπο το άθροισμα σειρών συγκεκριμένης μορφής. Στην Ενότητα 12.9 αναπτύσσεται η αρχή ορίσματος, η οποία έχει ως συνέπεια αποτελέσματα σχετικά με την αρχή μεγίστου και αυτήν της σταθερής συνάρτησης. Στην Ενότητα 12.10 αναπτύσσεται η εφαρμογή στη θεωρία Ευστάθειας και ειδικά στα αλγεβρικά κριτήρια ευστάθειας καθώς και στη σχέση τους με την αρχή ορίσματος. Τέλος, στην Ενότητα 12.11 αναπτύσσεται η έννοια του ολοκληρωτικού υπολοίπου στο άπειρο.

Στο **Κεφάλαιο 13**, τέλος, κατ' αρχήν αναπτύσσεται η έννοια της σύμμορφης απεικόνισης. Ξεκινούμε από την παρουσίαση ορισμένων βασικών μιγαδικών απεικονίσεων, όπως ο γραμμικός μετασχηματισμός $w = az + b$, ο τετραγωνικός μετασχηματισμός $w = z^2$, η αντίστροφη απεικόνιση $w = z^{-1}$, η Εκθετική και η Λογαριθμική απεικόνιση. Στην Ενότητα 13.2 ορίζεται η σύμμορφη απεικόνιση και δίδονται βασικά παραδείγματα. Στη συνέχεια δίδονται οι πιο σημαντικές και χρήσιμες σύμμορφες απεικονίσεις. Στην Ενότητα 13.3 αναπτύσσονται οι ρητογραμμικοί μετασχηματισμοί ή Μετασχηματισμοί Möbius. Στην Ενότητα 13.4 εισάγονται οι μετασχηματισμοί Zhukovsky και Κάρμάν-Trefftz και συνδέονται με συγκεκριμένες εφαρμογές. Στην Ενότητα 13.5 παρουσιάζεται η βασική θεωρία του μετασχηματισμού Schwarz-Christoffel και δίδονται βασικές εφαρμογές. Τέλος, στην Ενότητα 13.6 αναπτύσσονται οι στοιχειώδεις σύμμορφες απεικονίσεις: ημιτονική συνάρτηση, συνημιτονική συνάρτηση, εφαπτομενική συνάρτηση, και οι βασικές υπερβολικές συναρτήσεις. Σε αυτό το Κεφάλαιο κατεβλήθη ιδιαίτερη προσπάθεια να υπάρχουν όλες οι απαραίτητες γραφικές παραστάσεις, λόγω του έντονου γεωμετρικού χαρακτήρα του αντικειμένου που αναπτύσσεται εδώ.

Το βιβλίο περιέχει περίπου **300 αναλυτικά λυμένα Παραδείγματα**, περίπου **230 Βιβλιογραφικές Αναφορές**, **180 παραστατικά Σχήματα**, **60 φωτογραφίες** διακεκριμένων επιστημόνων με σημαντική συμβολή στην ανάπτυξη των αντικειμένων του παρόντος συγγράμματος, και άνω των **1150 Προβλημάτων**, αρκετά από τα οποία συνοδεύονται από τις απαντήσεις και/ή υποδείξεις επίλυσής τους.

Όπου κρίνεται αναγκαίο γίνεται σύνδεση των μαθηματικών αποτελεσμάτων με το αντίστοιχο φυσικό ή άλλο φαινόμενο. Επίσης στις βασικές εξισώσεις γίνεται μια αναλυτική παρουσίαση της διαδικασίας Μαθηματικής προτυποποίησης, σε μια προσπάθεια κατανόησης της σύνδεσης των μεταβλητών και παραμέτρων του προβλήματος με τα επιμέρους στοιχεία του αντίστοιχου φαινομένου.

Προαπαιτούμενες γνώσεις: για τον μελετητή αυτού του βιβλίου θεωρούνται τα θέματα, που αναπτύσσονται στα προπτυχιακά μαθήματα *Λογισμού Μιας και Πολλών Μεταβλητών, Γραμμικής Άλγεβρας, Αναλυτικής Γεωμετρίας, Διανυσματικής Ανάλυσης, Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων, Σειρών και Μετασχηματισμών Fourier και Συνοριακών Προβλη-*

μάτων.

Ευχαριστίες: Το βιβλίο αυτό αναπτύχθηκε από τις σημειώσεις των μαθημάτων Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, που έχω διδάξει τα τελευταία 30 χρόνια σε διάφορες Σχολές του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου καθώς και στο Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης για αρκετά χρόνια. Γι' αυτό θέλω να απευθύνω τις πρώτες ευχαριστίες μου στους πολυάριθμους φοιτητές, που με πολύ υπομονή, κατανόηση, εύστοχες υποδείξεις, επιστημονικές ανησυχίες και νεανικό αυθορμητισμό, συνέβαλαν καθοριστικά στην παρούσα διαμόρφωση του ανά χειράρας κειμένου. Στη συνέχεια θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους εκείνους τους συναδέλφους από τον Τομέα Μαθηματικών της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών & Φυσικών Επιστημών, καθώς και άλλες Σχολές του ΕΜΠ, που έτυχε κατά καιρούς άμεσα ή έμμεσα να συζητήσουμε θέματα σχετιζόμενα με το υλικό του ανά χειράρας βιβλίου.

Ευχαριστώ ιδιαίτερα τον συνεργάτη μου *Σταυρουλάκη Στυλιανό*, που επιμελήθηκε με περισσή τέχνη τα σχεδιαγράμματα και τα Προγράμματα που αναπτύχθηκαν στο Α Μέρος, την κυρία *Stefania Gulmini* που επεξεργάστηκε άψογα τα σχέδια του Β Μέρους, το Δρ *Δήμο Γκουνταρούλη* για την πολύ σημαντική στήριξη που μου προσέφερε στη διαχείριση των κειμένων *ΕΤΕΧ*, την κυρία *Ειρήνη Επταημέρου* της «*Angelakis Digital*» για το πολύ ωραίο αποτέλεσμα της συνεργασίας μας, και τους ανθρώπους των εταιριών «*MEDIA PRES, Γραφικές Τέχνες*» και «*Μοσχούρη Σταματία*» για τον επαγγελματισμό και την απόλυτη συνέπεια που χειρίστηκαν το τελευταίο στάδιο της εκτύπωσης και βιβλιοδεσίας του ανά χειράρας συγγράμματος.

Αισθάνομαι επίσης την ανάγκη να εκφράσω τις άπειρες ευχαριστίες μου προς την οικογένεια μου για την υπομονή και την κατανόηση, που συνεχώς μου έδειχνε, αλλά και τη στήριξη, που κατά καιρούς χρειάστηκε να μου δώσει για την αποπεράτωση αυτού του έργου.

Τέλος, προς όλους αυτούς που θα επιθυμούσαν να συμβάλλουν σε μια πληρέστερη και αρτιότερη εμφάνιση μιας μελλοντικής έκδοσης αυτού του συγγράμματος, αφού τους ευχαριστήσω προκαταβολικά, θα ήθελα να τους γνωρίσω ότι, μπορούν να στείλουν την όποια συμβολή τους στην ηλεκτρονική μου διεύθυνση.

Νικόλαος Μ. Σταυρακάκης

nikolas@central.ntua.gr ή stavrakakis.nikolaos@gmail.com

http://www.math.ntua.gr/stavraka/

Αθήνα, 1 Μαρτίου 2016.

Περισσότερα στοιχεία για το βιβλίο μπορείτε να βρείτε στην Ιστοσελίδα:
<https://service.eudoxus.gr/>

Περιεχόμενα

I	Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις	1
1	Εισαγωγή στις Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις	3
1.1	Γενικές Έννοιες	5
1.1.1	Προβλήματα	8
1.2	Μέθοδοι Επίλυσης	8
1.3	Καλά Τοποθετημένα Προβλήματα: Ευστάθεια	10
1.4	Ταξινόμηση Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων Δεύτερης Τάξης	15
1.4.1	Δύο Διαστάσεις	15
1.4.2	N - Διαστάσεις, $N > 2$	17
1.4.3	Προβλήματα	18
1.5	Γραμμικές 2ης Τάξης με Σταθερούς Συντελεστές	20
1.5.1	Γενική Θεωρία	20
1.5.2	Η Λύση D'Alembert της Κυματικής Εξίσωσης	22
1.5.3	Προβλήματα	27
1.6	Μέθοδοι Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων	29
1.6.1	Προβλήματα	32
1.7	Βιβλιογραφικές Αναφορές	32
2	Εξισώσεις Ελλειπτικού Τύπου	33
2.1	Εισαγωγή - Φραγμένα Πεδία - Αρχή Υπέρθεσης	35
2.2	Ιστορικό	37
2.3	Καρτεσιανές Συντεταγμένες.	38
2.3.1	Ορθογώνια Πεδία - Συνοριακές Συνθήκες Dirichlet	38
2.3.2	Συνοριακές Συνθήκες Τύπου Robin	43
2.3.3	Εξίσωση Poisson με Συνθήκες Τύπου Dirichlet	47
2.3.4	Προβλήματα	56
2.4	Πολικές Συντεταγμένες	59
2.4.1	Εισαγωγή	59

2.4.2	Το Πρόβλημα Dirichlet σε Δίσκο	61
2.4.3	Το Πρόβλημα Neumann σε Δίσκο.	66
2.4.4	Το Πρόβλημα Δυναμικού στο Δακτύλιο.	67
2.4.5	Προβλήματα	73
2.5	Ιδιότητες των Αρμονικών Συναρτήσεων	76
2.5.1	Μονοσήμαντο του Προβλήματος Dirichlet	78
2.5.2	Αρχή Μεγίστου - Ελαχίστου / Ευστάθεια	79
2.5.3	Μονοσήμαντο του Προβλήματος Neumann	80
2.5.4	Μονοσήμαντο ενός Προβλήματος Robin	82
2.5.5	Προβλήματα	83
2.6	Βιβλιογραφικές Αναφορές	85
2.7	Γενικά Προβλήματα	85
3	Εξισώσεις Παραβολικού Τύπου	89
3.1	Εξίσωση Θερμότητας	91
3.1.1	Εισαγωγή	91
3.1.2	Εξίσωση Θερμότητας: Μαθηματική Προτυποποίηση Α. Ο Νόμος του Fourier. Β. Διαμόρφωση της Εξίσωσης Θερμότητας. Γ. Αρχικές και Συνοριακές Συνθήκες - Καλή Τοποθέτηση.	92
3.1.3	Προβλήματα	96
3.2	Ομογενής Εξίσωση Θερμότητας	97
3.2.1	Μηδενικές Συνοριακές Τιμές Α. Εύρεση της Τυπικής Λύσης - Χωρισμός Μεταβλητών. Β. Επαλήθευση της Λύσης - Ομαλοποίηση. Γ. Μονοσήμαντο της Λύσης. Δ. Ασυμπτωτική Συμπεριφορά. Ε. Χρόνος Χαλάρωσης.	98
3.2.2	Μεικτές Συνοριακές Συνθήκες - Υπερβατικές Ιδιοτιμές	109
3.2.3	Μη-Ομογενείς Συνοριακές Συνθήκες	113
3.2.4	Προβλήματα	117
3.3	Χρονοανεξάρτητη Μη-Ομογενής Εξίσωση	121
3.3.1	Προβλήματα	124
3.4	Χρονοεξαρτώμενη Μη-Ομογενής Εξίσωση Θερμότητας	127
3.4.1	Ομογενείς Συνοριακές Συνθήκες	127
3.4.2	Μη-Ομογενείς Συνοριακές Συνθήκες	131
3.4.3	Προβλήματα	135
3.5	Μια Μη Ομογενής Παραβολική Εξίσωση	138
3.6	Ποιοτική Θεωρία Παραβολικών Εξισώσεων	142
3.6.1	Προβλήματα	145
3.7	Βιβλιογραφικές Αναφορές	146
3.8	Γενικά Προβλήματα	147

4	Εξισώσεις Υπερβολικού Τύπου	151
4.1	Κυματική Εξίσωση	153
4.1.1	Εισαγωγή-Ιστορικά Στοιχεία	153
4.1.2	Κυματική Εξίσωση: Μαθηματική Προτυποποίηση Α. Διαμόρφωση της Κυματικής Εξίσωσης. Β. Αρχικές και Συνοριακές Συνθήκες - Καλή Τοποθέτηση. . .	156
4.1.3	Προβλήματα	162
4.2	Ομογενής Κυματική Εξίσωση	164
4.2.1	Εύρεση Λύσης - Διερεύνηση. Α. Εύρεση της Τυπικής Λύσης - Χωρισμός των Μεταβλη- τών Β. Ομαλοποίηση της Λύσης - Ισχυρές και Ασθενείς Λύ- σεις. Γ. Μονοσήμαντο της Λύσης. Δ. Φυσική Σημασία της Λύσης. Ε. Διαφορά των Παραβολικών από τις Υπερβολικές Εξι- σώσεις.	164
4.2.2	Προβλήματα	181
4.3	Μη Ομογενής Κυματική Εξίσωση Ειδικής Μορφής	185
4.3.1	Γενική Θεωρία - Παραδείγματα	185
4.3.2	Προβλήματα	190
4.4	Μη Ομογενής Κυματική Εξίσωση Γενικής Μορφής	192
4.4.1	Γενική Θεωρία - Παραδείγματα	192
4.4.2	Προβλήματα	200
4.5	Εξισώσεις Μαθηματικής Φυσικής	201
4.5.1	Εξίσωση Klein - Gordon	202
4.5.2	Εξίσωση Τηλεγράφου-Τηλεφώνου-Δερματική Επίδραση. Α. Τηλεγραφία - Τηλεφωνία. Β. Δερματική Επίδραση (Skin Effect).	204
4.5.3	Εξίσωση της Δοκού. Α. Μαθηματική Προτυποποίηση. Β. Καλή Τοποθέτηση. Γ. Επίλυση και Διερεύνηση.	208
4.5.4	Ένα Ομογενές Γραμμικό Πρόβλημα	214
4.5.5	Προβλήματα	216
4.6	Βιβλιογραφικές Αναφορές	217
4.7	Γενικά Προβλήματα	218
5	2 και 3 Χωρικές Διαστάσεις	221
5.1	Εισαγωγή	223
5.2	Δύο Διαστάσεις	223

5.2.1	Ορθογώνιο Πεδίο. Α. Η Κυματική Εξίσωση σε μια Ορθογώνια Μembrάνη. Β. Η Εξίσωση Θερμότητας σε μια Ορθογώνια Πλάκα.	223
5.2.2	Κυκλικά Πεδία - Συναρτήσεις Bessel. Α. Η Κυματική Εξίσωση σε μια Κυκλική Μembrάνη - Ακτινική Συμμετρία. Β. Η Κυματική Εξίσωση σε μια Κυκλική Μembrάνη - Γενική Περίπτωση.	230
5.2.3	Προβλήματα	238
5.3	Τρεις Διαστάσεις	241
5.3.1	Καρτεσιανές Συντεταγμένες: Εξίσωση Laplace στο Ορθογώνιο Παραλληλεπίπεδο - Συνθήκες Robin.	241
5.3.2	Κυλινδρικές Συντεταγμένες	243
5.3.3	Σφαιρικές Συντεταγμένες: Α. Εισαγωγή Β. Ηλεκτροστατικό Δυναμικό σε μια Σφαίρα - Γενική Περίπτωση Γ. Ηλεκτροστατικό Δυναμικό σε μια Σφαίρα - Ακτινική Συμμετρία Δ. Η Εξίσωση Schrödinger στη Σφαίρα.	249
5.3.4	Προβλήματα	261
5.4	Μη Ομογενή Προβλήματα - Α. Μέθοδος Ιδιοσυναρτήσεων	265
5.4.1	Εξαναγκασμένη Δόνηση Ορθογώνιας Μembrάνης με Ομογενείς Συνθήκες Dirichlet	266
5.4.2	Εξίσωση Poisson: Μη-Ομογενείς Συνθήκες Τύπου Dirichlet	269
5.4.3	Εξαναγκασμένη Δόνηση Ορθογώνιας Μembrάνης με Χρονοεξαρτώμενες Συνοριακές Συνθήκες	273
5.4.4	Προβλήματα	280
5.5	Μη Ομογενή Προβλήματα - Β. Μέθοδος Μετασχηματισμών	283
5.5.1	Πεπερασμένος Μετασχηματισμός Fourier. Α. Εισαγωγή - Ορισμός - Ιδιότητες. Β. Εφαρμογές στις Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις. 1. Κυματική Εξίσωση στη Μια Διάσταση. 2. Εξίσωση Διάχυσης σε Ορθογώνια Πλάκα.	283
5.5.2	Προβλήματα	288
5.6	Βιβλιογραφικές Αναφορές	293
5.7	Γενικά Προβλήματα	293
6	Μη Φραγμένα Πεδία	297
6.1	Εισαγωγή	299
6.2	Ολοκλήρωμα Fourier	299
6.2.1	Εισαγωγή στο Ολοκλήρωμα Fourier	299

6.2.2	Εξίσωση Θερμότητας στην Ημιευθεία	300
6.2.3	Εξίσωση Θερμότητας στην Ευθεία	303
6.2.4	Κυματική Εξίσωση στην Ημιευθεία	304
6.2.5	Εξίσωση Laplace στο Άνω Ημιεπίπεδο	305
6.2.6	Προβλήματα	307
6.3	Μετασχηματισμός Laplace και Εφαρμογές	311
6.3.1	Εισαγωγή στους Ολοκληρωτικούς Μετασχηματισμούς	311
6.3.2	Εισαγωγή στο Μετασχηματισμό Laplace	312
6.3.3	Εξίσωση Θερμότητας στην Ημιευθεία	313
6.3.4	Μη Ομογενής Κυματική Εξίσωση στην Ημιευθεία	315
6.3.5	Ομογενής Εξίσωση Θερμικής Διάχυσης & Μεταφοράς στην Ημιευθεία	318
6.3.6	Ηχητικά Κύματα σε Παλλόμενη Σφαίρα	319
6.3.7	Ομοιόμορφες Γραμμές Μεταφοράς στην Ημιευθεία	320
6.3.8	Προβλήματα	324
6.4	Μετασχηματισμός Fourier	326
6.4.1	Εισαγωγή στο Μετασχηματισμό Fourier	326
6.4.2	Ομογενής Κυματική Εξίσωση στην Ευθεία	327
6.4.3	Ομογενής Εξίσωση Θερμότητας στην Ευθεία	329
6.4.4	Μη-Ομογενής Εξίσωση Θερμότητας στην Ευθεία	331
6.4.5	Ομογενής Εξίσωση Laplace σε Λωρίδα	333
6.4.6	Ομογενής Εξίσωση Laplace στο Πρώτο Τεταρτημόριο	334
6.4.7	Τριδιάσταση Ομογενής Εξίσωση Θερμότητας στο Χώρο	336
6.4.8	Προβλήματα	337
6.5	Μετασχηματισμός Hankel	341
6.5.1	Εισαγωγή - Ορισμός - Ιδιότητες	341
6.5.2	Εφαρμογές στις Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις, 1. Εξίσωση Laplace στις 3 διαστάσεις με Αξονική Συμμε- τρία. 2. Κυματική Εξίσωση με Ακτινικά Συμμετρικά Δεδομένα. 3. Εξίσωση Διάχυσης με Αξονικά Συμμετρικά Δεδομένα.	344
6.5.3	Προβλήματα	348
6.6	Βιβλιογραφικές Αναφορές	351
6.7	Γενικά Προβλήματα	351
7	Συναρτήσεις Green για Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις	355
7.1	Εισαγωγή	357
7.2	Συνάρτηση Green	358
7.2.1	Προβλήματα	371
7.3	Προβλήματα Συνοριακών Συνθηκών	375
7.3.1	Ομογενείς Συνοριακές Συνθήκες	375
7.3.2	Μη-Ομογενείς Συνοριακές Συνθήκες	377

7.3.3	Προβλήματα	383
7.4	Τροποποιημένες Συναρτήσεις Green.	385
7.4.1	Ομογενείς Συνοριακές Συνθήκες	387
7.4.2	Μη Ομογενείς Συνοριακές Συνθήκες	389
7.4.3	Προβλήματα	394
7.5	Προβλήματα Αρχικών Συνθηκών	395
7.5.1	Προβλήματα	399
7.6	Βιβλιογραφικές Αναφορές	400
7.7	Γενικά Προβλήματα	400
8	Συναρτήσεις Green για Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις	403
8.1	Εισαγωγή	405
8.2	Γενικευμένες Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών.	405
8.2.1	Εισαγωγή - Ορισμοί - Ιδιότητες	405
8.2.2	Τύποι Green στις 2 και 3 Διαστάσεις	410
8.3	Προσδιορισμός της Συνάρτησης Green	411
8.3.1	Μέθοδος Πλήρους Αναπτύγματος Ιδιοσυναρτήσεων	413
8.3.2	Μέθοδος Μερικού Αναπτύγματος Ιδιοσυναρτήσεων.	415
8.3.3	Μέθοδος Διάσπασης.	417
8.3.4	Μέθοδος Ειδώλων ή Κατοπτρισμού.	421
8.3.5	Προβλήματα	428
8.4	Επίλυση Προβλημάτων Συνοριακών Συνθηκών	430
8.4.1	Συνοριακά Προβλήματα Τύπου Dirichlet.	431
8.4.2	Συνοριακά Προβλήματα Τύπου Neumann	436
8.4.3	Συνοριακά Προβλήματα Τύπου Robin ή Μεικτά	442
8.4.4	Προβλήματα	445
8.5	Επίλυση Προβλημάτων Αρχικών-Συνοριακών Συνθηκών	447
8.5.1	Εξίσωση Θερμότητας	448
8.5.2	Κυματική Εξίσωση	453
8.5.3	Προβλήματα	457
8.6	Βιβλιογραφικές Αναφορές	460
8.7	Γενικά Προβλήματα	460
II	Μιγαδική Ανάλυση	463
9	Εισαγωγή στη Μιγαδική Ανάλυση	465
9.1	Ιστορική Αναδρομή στη Μιγαδική Ανάλυση	467
9.2	Βασική Θεωρία της Μιγαδικής Ανάλυσης	471
9.2.1	Μιγαδικό Επίπεδο	471
9.2.2	Ακολουθίες Μιγαδικών Αριθμών	477
9.2.3	Μιγαδικές Συναρτήσεις: Όριο - Συνέχεια	482

9.2.4	Τοπολογία Μιγαδικού Επιπέδου	488
9.2.5	Συνέχεια - Ομοιόμορφη Συνέχεια	494
9.3	Αναλυτικές (Ολόμορφες) Συναρτήσεις	496
9.4	Στοιχειώδεις Αναλυτικές Συναρτήσεις	503
9.4.1	Εκθετική Συνάρτηση	503
9.4.2	Τριγωνομετρικές και Υπερβολικές Συναρτήσεις	505
9.4.3	Λογαριθμική Συνάρτηση	510
9.4.4	Δυνάμεις	513
10	Μιγαδική Ολοκλήρωση	515
10.1	Εισαγωγή	517
10.2	Επικαμπύλιο Μιγαδικό Ολοκλήρωμα	517
10.3	Ολοκληρωτικό Θεώρημα Cauchy. Γενίκευση Goursat	526
10.4	Αόριστο Μιγαδικό Ολοκλήρωμα	536
10.5	Ολοκληρωτικός Τύπος Cauchy και Εφαρμογές	541
10.5.1	Παράγωγος Αναλυτικών Συναρτήσεων	545
10.5.2	Θεώρημα Morera	549
10.5.3	Αρχή Μεγίστου	550
10.5.4	Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας	555
11	Μιγαδική Σειρά	563
11.1	Εισαγωγή	565
11.2	Σειρές Taylor	569
11.2.1	Βασική Θεωρία	572
11.2.2	Πρακτικές Μέθοδοι Εύρεσης Δυναμοσειρών	575
11.3	Σειρές Laurent	581
11.4	Ιδιότητες Σειρών	587
11.5	Γενικά Προβλήματα για το Κεφάλαιο 11	597
12	Ολοκληρωτικά Υπόλοιπα και Εφαρμογές	599
12.1	Ολοκληρωτικά Υπόλοιπα	601
12.2	Θεώρημα Ολοκληρωτικών Υπολοίπων	605
12.3	Γενικευμένα Ολοκληρώματα Ρητών Συναρτήσεων-Κύρια Τιμή	615
12.4	Ολοκληρώματα Fourier	628
12.5	Ολοκλήρωση γύρω από Κλαδικό Σημείο - Κλαδικές Τομές	636
12.6	Ορισμένα Ολοκληρώματα Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων	651
12.7	Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace	656
12.8	Άθροισμα Σειρών	673
12.9	Αρχή Ορίσματος	676
12.10	Θεωρία Ευστάθειας	683
12.10.1	Εισαγωγή	683
12.10.2	Άλγεβρικά Κριτήρια Ευστάθειας	686

12.10.3	Αλγεβρικά Κριτήρια Ευστάθειας και Αρχή Ορίσματος . . .	688
12.11	Ολοκληρωτικό Υπόλοιπο στο Άπειρο	692
13	Σύμμορφη Απεικόνιση	701
13.1	Μιγαδικές Απεικονίσεις	703
13.2	Σύμμορφη Απεικόνιση	715
13.3	Ρητογραμμικοί Μετασχηματισμοί ή Μετασχηματισμοί Möbius . .	722
13.4	Μετασχηματισμοί Zhukovsky & Kármán-Trefftz	738
13.5	Μετασχηματισμός Schwarz-Christoffel	744
13.6	Στοιχειώδεις Σύμμορφες Απεικονίσεις	763
	Βιβλιογραφία	775
	Ευρετήριο Όρων	790

Ευρετήριο Εικόνων

1.1	Cauchy, Augustin (1789-1857)	10
1.2	Hadamard, Jacques (1865 - 1963)	13
1.3	D' Alembert, Jean - Baptiste (1717 - 1783)	23
2.1	Laplace, Pierre - Simon (1749 - 1827)	35
2.2	Euler, Leonhard (1707-1783)	37
2.3	Poisson, Siméon (1781 - 1840)	48
2.4	Dirichlet, Lejeune (1805-1859)	61
2.5	Gauss, Carl (1777-1855)	79
2.6	Neumann, Karl (1832 - 1925)	80
3.1	Newton, Isaac (1642-1726)	91
3.2	Fourier, Jean - Baptiste (1768-1830)	92
4.1	Leibniz, Gottfried (1646 - 1716)	153
4.2	Kirchhoff, Gustav Robert (1824 - 1887)	154
4.3	Rayleigh, John (1842 - 1919)	155
4.4	Klein, Oskar (1894 - 1977)	202
4.5	Heaviside, Oliver (1850 - 1925)	207
4.6	Pupin, Mihajlo Dvorski (1858-1935)	207
5.1	Helmholtz, von Hermann (1821-1894)	225
5.2	Bessel, Friedrich (1784 - 1846)	230
5.3	Legendre, Adrien-Marie (1752-1833)	252
5.4	Planck, Max (1858 - 1947)	256
5.5	Schrödinger, Erwin (1887-1961)	259
6.1	Hankel, Hermann (1839-1873)	341
6.2	Duhamel, Jean - Marie (1797-1872)	352

7.1	Green, George (1793 - 1841)	357
7.2	Lagrange, Joseph - Louis (1736-1813)	358
7.3	Maxwell, James Clerk (1831 - 1879)	370
7.4	Fredholm, Erik Ivar (1866 - 1927)	387
8.1	Dirac, Paul Adrien Maurice (1902 - 1984)	407
9.1	Chuquet, Nicolas (1445 - 1500)	467
9.2	Cardano, Gerolamo (1501 - 1576)	467
9.3	Wallis, John (1616 - 1703)	468
9.4	Wessel, Caspar (1745-1818)	469
9.5	Argand, Jean - Robert(1768 - 1822)	469
9.6	De Moivre, Abraham (1667-1754)	474
9.7	De Moivre: Doctrine of Chance	474
9.8	Bolzano, Bernard (1781-1848)	480
9.9	Weierstrass, Karl (1815-1897)	481
9.10	Riemann, Bernhard (1826 - 1866)	498
10.1	Goursat, Édouard (1858-1936)	527
10.2	Morera, Giacinto (1856-1909)	551
10.3	Liouville, Joseph (1809-1882)	555
11.1	Taylor, Brook (1685-1731)	569
11.2	Maclaurin, Colin (1698 - 1746)	575
11.3	Laurent, Alphonse (1813-1854)	581
12.1	Mittag-Leffler, Gösta(1846-1927)	614
12.2	Jordan, Camille (1838 - 1922)	630
12.3	Σχεδιάγραμμα του πλειονότιμου φανταστικού μέρους του μιγαδικού λογαρίθμου $\ln z$, $z \in \mathbb{C}$, που δείχνει τους κλάδους.	643
12.4	Lerch, Mathias (1860 - 1922)	658
12.5	Bromwich, l'Anson (1875-1929)	659
12.6	Mellin, Robert (1854-1933)	661
12.7	De L'Hôpital, Guillaume(1661 -1704)	668
12.8	Traité Analytique des Sections Coniques	668
12.9	Rouché, Eugéne (1832- 1910)	679
12.10	Routh, Edward (1831 - 1907)	686
12.11	Hurwitz, Adolf(1859 - 1919)	687
13.1	Möbius, August (1790 - 1868)	723
13.2	Ταινία Möbius	724
13.3	Nikolay Zhukovsky (1847-1921)	739
13.4	Αεροτομή Zhukovsky	739

13.5	Kármán, Theodore (1881-1963)	742
13.6	Trefftz, Eric (1888-1937)	743
13.7	Schwarz, Hermann (1843 - 1921)	744
13.8	Christoffel, Bruno (1829 - 1900)	748

Ευρετήριο Σχημάτων

1.1	(B.) Συνθήκη Dirichlet, (Γ.) Συνθήκη Neumann, (Δ.) Συνθήκη Robin.	12
1.2	Ένα Μη καλά Τοποθετημένο Πρόβλημα Dirichlet.	14
1.3	Οδεύον Κύμα.	25
1.4	Διάστημα και Πεδίο Προσδιορισμού ή Επιρροής.	26
2.1	Το Πρόβλημα Dirichlet στο Ορθογώνιο.	39
2.2	Το Πρόβλημα Dirichlet σε Ορθογώνιο του Παραδείγματος 2.3.2.	42
2.3	Το Πρόβλημα (3.15) - (3.17) για $T_0 = \pi$	44
2.4	Το Πρόβλημα Robin σε Τετράγωνο του Παραδείγματος 2.3.3.	46
2.5	Το Πρόβλημα Poisson με Συνθήκες Dirichlet στο Τετράγωνο - Αριθμητική και Αναλυτική Λύση.	52
2.6	Το Πρόβλημα Poisson με Συνθήκες Neumann στο Τετράγωνο - Αριθμητική και Αναλυτική Λύση.	54
2.7	Το Πρόβλημα Dirichlet σε Δίσκο.	60
2.8	Το Πρόβλημα Dirichlet σε Κυκλικό Δακτύλιο.	68
2.9	Ένα Πρόβλημα Robin σε Κυκλικό Δακτύλιο.	71
3.1	Εξίσωση Συνέχειας I.	93
3.2	Εξίσωση Συνέχειας II.	96
3.3	Το Πρόβλημα Θερμότητας με Συνθήκες Dirichlet - Μια Διάσταση.	105
3.4	Το Πρόβλημα Θερμότητας με Συνθήκες Dirichlet - Τρεις Διαστάσεις.	106
3.5	Το Πρόβλημα Θερμότητας με Συνθήκες Neumann - Μια Διάσταση.	107
3.6	Το Πρόβλημα Θερμότητας με Συνθήκες Neumann - Τρεις Διαστάσεις.	109
3.7	Το Πρόβλημα του Παραδείγματος 3.2.4 για $T_0 = \pi$	112
3.8	Μη ομογενές Πρόβλημα θερμότητας Τύπου Dirichlet στο διάστημα $(0, 1)$	135
4.1	Χορδή σε Κατάσταση Ισορροπίας.	157
4.2	Παλλόμενη Χορδή και Διάνυσμα Ταχύτητας.	157
4.3	Δυνάμεις Επαφής στην Παλλόμενη Χορδή.	158

4.4	Συνθήκες <i>Dirichlet</i>	160
4.5	Συνθήκες <i>Neumann</i>	161
4.6	Συνθήκες <i>Robin</i>	162
4.7	Στάσιμα Κύματα και Κόμβοι μιας Παλλόμενης Χορδής για $n = 1, 2, 3, 4$	170
4.8	Μετατόπιση μιας Παλλόμενης Χορδής κατά το Πρώτο Ήμισυ της Περιόδου.	172
4.9	Χρονική Εξέλιξη της χορδής του Παραδείγματος 4.2.4.	173
4.10	Η Γραφική Παράσταση της Συνάρτησης $f(x)$	175
4.11	Χρονική Εξέλιξη της χορδής του Παραδείγματος 4.2.5.	178
4.12	Χρονική Εξέλιξη χορδής του Παραδείγματος 4.2.6.-Αναλυτική Λύση	180
4.13	Χρονική Εξέλιξη χορδής του Παραδείγματος 4.2.6.-Αριθμητική Λύση.	180
4.14	Το Πρόβλημα του Παραδείγματος 4.3.2 I) Συντονισμός.	188
4.15	Το Πρόβλημα του Παραδείγματος 4.3.2 II) Μη - Συντονισμός.	189
4.16	Το Πρόβλημα του Παραδείγματος 4.4.4.	197
4.17	Μια Δοκός που στρέφει τα κοίλα προς τα επάνω.	210
4.18	Αλληλεπίδραση των Εσωτερικών Ροπών Κάμψης και των Τεμνουσών Δυνάμεων, του Εξωτερικού Φορτίου και των Εξωτερικών Δυνάμεων σε μια Δοκό με τα κοίλα προς τα επάνω.	211
4.19	α) Σύνορο Απλής Στήριξης, β) Πακτωμένο Οριζοντίως Σύνορο, γ) Ελεύθερο Σύνορο.	212
5.1	Κομβικές Γραμμές μιας Τετραγωνικής Μεμβράνης.	227
5.2	Κομβικές Γραμμές μιας Κυκλικής Μεμβράνης.	232
5.3	Η Κυματική Εξίσωση στο Δίσκο - Συνθήκες <i>Robin</i>	237
5.4	Πρόβλημα Δυναμικού Τύπου <i>Dirichlet</i> σε Κυλινδρικό Πεδίο.	243
5.5	Η Εξίσωση Θερμότητας στον Κύλινδρο-Συνθήκες <i>Robin</i>	248
5.6	Πρόβλημα Δυναμικού Τύπου <i>Dirichlet</i> σε Σφαιρικό Πεδίο.	249
5.7	Πρόβλημα Δυναμικού Τύπου <i>Robin</i> σε Σφαιρικό Πεδίο.	251
5.8	Μη Ομογενής Κυματική Εξίσωση - Συνθήκες <i>Dirichlet</i>	268
5.9	Η Εξίσωση <i>Poisson</i> στο Τετράγωνο - Συνθήκες <i>Dirichlet</i>	273
5.10	Μη Ομογενής Κυματική Εξίσωση στο Ορθογώνιο - Συνθήκες <i>Dirichlet</i>	279
6.1	Ισοθερμικές Γραμμές.	308
6.2	Ημιάπειρη Χορδή.	317
6.3	Ομοιόμορφη Γραμμή Μεταφοράς	321
8.1	Η Πηγή (x_1, y_1, z_1) και η Ανάκλαση της $(x_1, y_1, -z_1)$ στο Επίπεδο $z = 0$	422
8.2	Η Πηγή $(r_1, \theta_1, \varphi_1)$ και η Αντιστροφή της (R, θ_1, φ_1) στη Σφαίρα.	426
9.1	Πρόσθεση & Αφαίρεση στους Μιγαδικούς Αριθμούς - Πολικές Συντεταγμένες -Μιγαδικός Συζυγής	473
9.2	Πολλαπλασιασμός Μιγαδικών Αριθμών	473
9.3	Οι n -οστές Ρίζες της Μονάδας, $n = 4, 5, 8$	475
9.4	Απλά Συνεκτικό και Πολλαπλά Συνεκτικό Πεδίο.	493

9.5	Παράγωγος Μιγαδικής Συνάρτησης.	496
10.1	Σχήμα Παραδείγματος 10.2.3.	520
10.2	Σχήμα Παραδείγματος 10.2.4.	521
10.3	Σχήμα Παραδείγματος 10.2.7.	522
10.4	Σχήμα Θεωρήματος 10.3.1 (2ο Τρόπος).	527
10.5	Σχήμα Θεωρήματος 10.3.1 (3ος Τρόπος-1ο Βήμα).	528
10.6	Σχήμα Θεωρήματος 10.3.1 (3ος Τρόπος- / 2ο Βήμα)	529
10.7	Σχήμα Παρατήρησης 10.3.2 (i).	530
10.8	Σχήμα Παρατήρησης 10.3.2 (ii), (iii).	531
10.9	Σχήμα Παρατήρησης 10.3.3.	531
10.10	Σχήμα Παρατήρησης 10.3.3.	532
10.11	Σχήμα Παραδείγματος 10.3.6.	533
10.12	Σχήμα Παραδείγματος 10.3.8.	534
10.13	Σχήμα Θεωρήματος 10.4.1.	537
10.14	Σχήμα Παραδείγματος 10.4.7.	539
10.15	Σχήμα Παραδείγματος 10.4.8 (a).	540
10.16	Σχήμα Παραδείγματος 10.4.8 (b).	540
10.17	Σχήμα Θεωρήματος 10.5.1.	542
10.18	Σχήμα Παρατήρησης 10.5.2.	543
10.19	Σχήμα Παραδείγματος 10.5.3.	544
10.20	Σχήμα Θεωρήματος 10.5.8.	546
10.21	Σχήμα Πρότασης 10.5.16	552
10.22	Σχήμα για Πρόβλημα 13.	561
11.1	Σχήμα Θεωρήματος Taylor 11.2.6.	572
11.2	Σχήμα Θεωρήματος Laurent 11.3.1.	581
12.1	Σχήμα για Θεώρημα 12.2.1.	606
12.2	Σχήμα Παραδείγματος 12.2.2 (a).	607
12.3	Σχήμα Παραδείγματος 12.2.2 (b).	607
12.4	Σχήμα Παραδείγματος 12.2.2 (c), (d).	608
12.5	Σχήμα Παραδείγματος 12.2.5.	608
12.6	Σχήμα Παραδείγματος 12.2.7.	610
12.7	Σχήμα Παραδείγματος 12.2.8.	611
12.8	Σχήμα Παραδείγματος 12.2.9.	611
12.9	Τμηματικά Συνεχής Συνάρτηση $f(x)$	617
12.10	Σχήμα Λήμματος 12.3.3	618
12.11	Σχήμα Παραδείγματος 12.3.4	619
12.12	Ημικυκλικός κλειστός δρόμος που περικλείει όλους του πόλους της $F(z)$, που βρίσκονται στο άνω ημιεπίπεδο - Θεώρημα 12.3.5.	621
12.13	Σχήμα Προβλήματος 4.	626

12.14	Σχήμα Προβλήματος 5.	626
12.15	Σχήμα Προβλήματος 7.	627
12.16	Σχήμα Προβλήματος 9.	627
12.17	Σχήμα του Λήμματος της Ανισότητας Jordan 12.4.4.	631
12.18	Σχήμα του Λήμματος Jordan 12.4.5.	632
12.19	Κλειστοί δρόμοι για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων Fresnel $I_1 = \int_0^{+\infty} \cos^2 x dx$ και $I_2 = \int_0^{+\infty} \sin^2 x dx$	633
12.20	Σχήμα Προβλήματος 3.	635
12.21	Σχήμα Προβλήματος 4.	635
12.22	Σχήμα Προβλήματος 5.	636
12.23	Σχήμα Προβλήματος 6.	636
12.24	Σχήμα για Παραδείγματα 12.5.8 και 12.5.9.	643
12.25	Σχήμα για Παράδειγμα 12.5.10.	646
12.26	Σχήμα για Παράδειγμα 12.5.11.	648
12.27	Σχήμα για Παράδειγμα 12.6.4.	653
12.28	Σχήμα για το Θεώρημα 12.7.3.	660
12.29	Σχήμα για το Θεώρημα 12.7.5.	663
12.30	Σχήμα για το Παράδειγμα 12.7.8.	665
12.31	Υπολογισμός του Αθροίσματος Σειράς.	674
12.32	Αρχή Ορίσματος.	676
12.33	Αλγεβρικά Κριτήρια και Αρχή Ορίσματος - I.	688
12.34	Γράφημα της $w = G(s) = s^3 + s^2 + 4s + 1$ και του $\arg G(it)$	690
12.35	Γράφημα της $w = G(s) = s^3 + s^2 + s + 4$ και του $\arg G(it)$	692
12.36	Ο δρόμος C του Παραδείγματος 12.11.6.	695
12.37	Το Σχήμα του Θεωρήματος 12.11.8.	696
12.38	Το Σχήμα της Παρατήρησης 12.11.9.	698
12.39	Ο δρόμος C του Παραδείγματος 12.11.10.	699
12.40	Ο δρόμος C του Παραδείγματος 12.11.11.	700
13.1	z -επίπεδο και w -επίπεδο.	703
13.2	Η Μετατόπιση $w = z - 2 + 2i$	704
13.3	Η Στροφή $w = iz$: Γωνία στροφής $\pi/2$ με θετική φορά.	704
13.4	Γραμμικός Μετασχηματισμός $w = (1+i)z + 2i$ επί ενός τεταρτημορίου δίσκου.	705
13.5	Απεικόνιση τμήματος δακτυλίου μέσω του Τετραγωνικού Μετασχηματισμού $w = z^2$	706
13.6	Απεικόνιση ευθειών παραλλήλων προς τους άξονες στα δύο επίπεδα w - και z - μέσω του Τετραγωνικού Μετασχηματισμού $w = z^2$	707
13.7	Μετασχηματισμός $w = z^n$	708
13.8	Γεωμετρική κατασκευή της Απεικόνισης $w = z^{-1}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$	708
13.9	Η Αντίστροφη Απεικόνιση $w = z^{-1}$ απεικονίζει κάθε ευθεία γραμμή ή κύκλο σε κύκλο ή ευθεία γραμμή.	709

13.10	$H w = e^z$ περιτυλίσσει μια κάθετη στον άξονα των x ($Re z = a$) γύρω από ένα κύκλο κέντρου 0 και ακτίνας $ z = e^a$, καλύπτοντας τον κύκλο για κάθε διάστημα μήκους 2π	711
13.11	$H w = e^z$ απεικονίζει ευθείες παράλληλες με τον άξονα των x ($Im z = b$) στην ακτίνα, που ξεκινά από την αρχή και σχηματίζει γωνία $\varphi = arg z = b$	712
13.12	$H w = e^z$ και το ορθογώνιο: $1 < x \leq 3, \pi/4 \leq y < 3\pi/4$	712
13.13	$H w = e^z$ και η θεμελιώδης λωρίδα $-\pi < y \leq \pi$	713
13.14	$H w = e^z$ και η λωρίδα $0 \leq y \leq \pi$	713
13.15	Λογαριθμική Απεικόνιση $w = Ln z$: Επίπεδο και η θεμελιώδης λωρίδα $-\pi < y \leq \pi$	714
13.16	Η Σύμμορφη Απεικόνιση $w = f(z)$	715
13.17	Προσανατολισμένη Εφαπτομένη.	716
13.18	Αντίστροφα Σημεία ως προς Κύκλο.	727
13.19	"Κυκλική Λωρίδα" σε Δακτύλιο.	733
13.20	Απεικόνιση Γωνιακών Περιοχών στο Μοναδιαίο Δίσκο.	734
13.21	Μετασχηματισμό Zhukovsky και η Αεροτομή Zhukovsky.	740
13.22	Μετασχηματισμός Κάρτάν-Trefftz και η Αεροτομή Κάρτάν-Trefftz.	743
13.23	Πολλαπλά Συνεκτικό Πεδίο D versus Απλά Συνεκτικό πεδίο G	745
13.24	Το πολύγωνο και η ορολογία του.	746
13.25	Απεικόνιση Πολυγώνου στο Άνω Ημιεπίπεδο.	747
13.26	Το Πέρασμα του z από το Σημείο c_1	749
13.27	Σχήμα του Παραδείγματος 13.5.7.	751
13.28	Σχήμα του Παραδείγματος 13.5.8.	752
13.29	Σχήμα του Παραδείγματος 13.5.9.	753
13.30	Σχήμα του Παραδείγματος 13.5.9.	754
13.31	Σχήμα του Παραδείγματος 13.5.10.	755
13.32	Σχήμα του Παραδείγματος 13.5.10.	756
13.33	Σχήμα του Παραδείγματος 13.5.11.	757
13.34	Σχήμα του Παραδείγματος 13.5.13.	758
13.35	Σχήμα του Προβλήματος [4].	760
13.36	Σχήμα των Προβλημάτων [9] και [10].	761
13.37	Σχήμα των Προβλημάτων [11] και [12].	762
13.38	Σχήμα των Προβλημάτων [13] και [14].	763
13.39	$w = \sin z$: Απεικόνιση του συνόρου της λωρίδας $y = Im z > 0, -\pi/2 \leq x = Re z \leq \pi/2$	764
13.40	$w = \sin z$: Απεικόνιση της λωρίδας $y = Im z > 0, -\pi/2 \leq x = Re z \leq \pi/2$	765
13.41	$H w = \sin z$ και διάστημα $y = c > 0, (-\pi/2) \leq x \leq (\pi/2)$	765
13.42	$H w = \sin z$ και το Ορθογώνιο $(-\pi/2) < x < (\pi/2), -c < y < c$	766
13.43	$H w = \sin z$ και το Ορθογώνιο $-\pi < x < \pi, 0 < c < y < d$	766
13.44	Η απεικόνιση $w = \cos z$ με $Re z = c$ και $\cos(c) > 0, \sin(c) \neq 0$	767
13.45	Η απεικόνιση $w = \cos z$ με $Re z = c$ και $\cos(c) < 0, \sin(c) \neq 0$	767

13.46	$H w = \cos z$ απεικονίζει την κάθετη ευθεία $Re z = (2n + 1)\pi/2$ στον φανταστικό άξονα $Re w = 0$	768
13.47	$H w = \cos z$ απεικονίζει την κάθετη ευθεία $Re z = 2k\pi$ στο $[1, +\infty)$	768
13.48	$H w = \cos z$ απεικονίζει την κάθετη ευθεία $Re z = (2k + 1)\pi$ στο $(-\infty, -1]$	769
13.49	$H w = \cos z$ απεικονίζει οριζόντιες ευθείες $Im z = b \neq 0$ σε ελλείψεις.	769
13.50	$H w = \cos z$ απεικονίζει τον πραγματικό άξονα $Im z = b = 0$ στο διάστημα $[-1, +1]$	770
13.51	H απεικόνιση της κάθετης λωρίδας $S : -\pi/4 < x < \pi/4$ μέσω της $w = \tan z$	772
13.52	H απεικόνιση της ημιάπειρης οριζόντιας λωρίδας $S : 0 \leq x, 0 \leq y \leq \pi$ μέσω της $w = \cosh z$	772
13.53	H απεικόνιση του άνω ημιεπιπέδου $Im z > 0$ επί της οριζόντιας λωρίδας $0 \leq Im w \leq \pi$ μέσω της $w = Ln \frac{z-1}{z+1}$. Σχήμα του Προβλήματος 7.	774