ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ
&
ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ
&
ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ:

ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Νικόλαος Μ. Σταυρακάκης
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Ν. Μ. Σταυρακάκης
Εκδόσεις
ΑΘΗΝΑ, ΜΑΡΤΙΟΣ 2016

Πρόλογος

Το βιβλίο αυτό αποτελεί μια εισαγωγική προσέγγιση στη θεωρία των Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων και των Μιγαδικών Συναρτήσεων. Στις μέρες μας οι Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις αποτελούν μια από τις σημαντικότερες περιοχές τόσο των Θεωρητικών όσον και των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών. Το γεγονός αυτό οφείλεται, αφενός στη συχνότατη χρήση των Εξισώσεων Μερικών Παραγώγων στις Φυσικές, Τεχνολογικές, Οικονομικές και λοιπές Εφαρμοσμένες Επιστήμες, αφετέρου δε στην πληθώρα των νέων προβλημάτων, ερωτημάτων και θεωριών, που δημιουργούνται και αναπτύσσονται στην περιοχή των Θεωρητικών Μαθηματικών από την ερευνητική ενασχόληση για την επίλυση και γενικότερη μελέτη αυτών των εξισώσεων.

Η θεωρία των Μιγαδικών Συναρτήσεων, γνωστή και ως Μιγαδική Ανάλυση, είναι ένας σημαντικός κλάδος των Μαθηματικών και ιδιαίτερα της Μαθηματικής Ανάλυσης, που μελετά τις ιδιότητες των συναρτήσεων των μιγαδικών αριθμών. Είναι χρήσιμη σε πολλούς κλάδους των Μαθηματικών, όπως η Αλγεβρική Γεωμετρία, η Θεωρία Αριθμών και τα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά καθώς και στη Φυσική, συμπεριλαμβανομένης της Υδροδυναμικής και Θερμοδυναμικής, της Θεωρίας Χορδών και της Κβαντικής Θεωρία Πεδίου αλλά και σε τομείς της Μηχανικής, όπως η Αεροδιαστημική, η Μηχανολογίας, η Ηλεκτρολογίας. Με το πέρασμα των δεκαετιών η Μιγαδική Ανάλυση αναδεικνύεται σε ένα από τα πιο όμορφα καθώς και χρήσιμα αντικείμενα των Μαθηματικών. Στη σύγχρονη εποχή, έχει γίνει πολύ δημοφιλής μέσα από μια νέα ώθηση, που δέχεται ο κλάδος, από την Μιγαδική Δυναμική και τις εικόνες των fractals που παράγονται με τις επαναλήψεις ολόμορφων συναρτήσεων.

Βασικό σκοπό της συγγραφής αυτής της εργασίας αποτέλεσε η παροχή στους φοιτητές των Μαθηματικών, Φυσικών και Τεχνολογικών Επιστημών αλλά και γενικότερα στην κοινότητα των μαθηματικών και εφαρμοσμένων επιστημόνων, ενός συγγράμματος, το οποίο θα δίδει τις θεμελιώδεις έννοιες, αξιώματα, θεωρία καθώς και μια ευρύτατη ποικιλία μεθόδων και τεχνικών επίλυσης μιας μεγάλης οικογένειας Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων, οι οποίες, όπως αναλυτικά παρουσιάζεται στο παρόν σύγγραμμα, αποτελούν προϊόν διαδικασιών μαθηματικής προτυποποίησης των κυριότερων φυσικών, τεχνολογικών, οικονομικών, κοινωνικών και λοιπών φαινομένων. Συγχρόνως παρέχονται όλα τα βασικά εισαγωγικά στοιχεία της θεωρίας των Μιγαδικών Συναρτήσεων -σειρές, ολοκληρώματα, ολοκληρωτικά υπόλοιπα, σύμμορφη απεικόνιση, κ.α.- αναγκαία σε πολλά πεδία τόσο των Θεωρητικών όσο και των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών.

ΜΕΡΟΣ Α. Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

Στο **Κεφάλαιο 1**, δίδονται οι βασικές έννοιες και ορισμοί των μερικών διαφορικών εξισώσεων. Σκιαγραφείται η έννοια ενός καλά τοποθετημένου προβλήματος αρχικών και/ή συνοριακών συνθηκών καθώς και η ευστάθεια (συνεχής εξάρτηση από τα δεδομένα) των λύσεων. Γίνεται η ταξινόμηση των μερικών διαφορικών εξισώσεων 2ης τάξης στις δύο και περισσότερες διαστάσεις. Αναπτύσσεται μια μέθοδος επίλυσης μερικών διαφορικών εξισώσεων 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές και ως εφαρμογή αυτής παρουσιάζεται η εύρεση της λύσης D'Alembert της Κυματικής Εξίσωσης στην πραγματική ευθεία.

Στο **Κεφάλαιο 2**, μετά από μια σύντομη ιστορική ανασκόπηση, γίνεται η μελέτη της γραμμικής ομογενούς ή μη ελλειπτικής εξίσωσης σε συγκεκριμένα φραγμένα πεδία στις δύο διαστάσεις (ορθογώνιο, δίσκος, δακτύλιος, κ.λ.π.) με διάφορα είδη συνοριακών συνθηκών (Dirichlet, Neumann, Robin ή μεικτές). Η βασική τεχνική επίλυσης σε όλο το Κεφάλαιο είναι η μέθοδος χωρισμού των μεταβλητών ή μέθοδος Fourier. Τέλος, δίδονται οι κυριότερες ιδιότητες των λύσεων των ελλειπτικών προβλημάτων (αρμονικές συναρτήσεις), όπως μονοσήμαντο, αρχή μεγίστου, συνεχής εξάρτηση από συνοριακά δεδομένα, κ.λ.π..

Στο **Κεφάλαιο 3**, γίνεται αναλυτική παρουσίαση της διαδικασίας μαθηματικής προτυποποίησης σ' ένα φαινόμενο διάδοσης θερμότητας σε μια πεπερασμένη ράβδο και διαμόρφωση της αντίστοιχης εξίσωσης θερμότητας. Στη συνέχεια δίδονται διάφοροι μέθοδοι επίλυσης ομογενών ή μη προβλημάτων παραβολικού τύπου με ομογενείς ή μη, χρόνο-ανεξάρτητες ή μη συνοριακές συνθήκες. Και σ' αυτό το Κεφάλαιο η βασική τεχνική επίλυσης είναι η μέθοδος χωρισμού των μεταβλητών. Επίσης παρουσιάζεται η ποιοτική επεξεργασία των λύσεων αυτών των προβλημάτων και αναδεικνύονται τα βασικά χαρακτηριστικά αυτών, όπως ομαλότητα, ασυμπτωτική συμπεριφορά, μονοσήμαντο, χρόνος χαλάρωσης, κ.λ.π.. Τέλος, δίδονται βασικά εισαγωγικά στοιχεία της ποιοτικής θεωρίας των παραβολικών εξισώσεων, όπως αρχή μεγίστου, μονοσήμαντο των λύσεων και συνεχής εξάρτηση από τα αρχικά και συνοριακά δεδομένα.

Στο **Κεφάλαιο 4**, μετά από μια σύντομη ιστορική ανασκόπηση, γίνεται αναλυτική παρουσίαση της διαδικασίας μαθηματικής προτυποποίησης σ' ένα φαινόμενο κυματικής διάδοσης σε μια τέλεια εύκαμπτη πεπερασμένη χορδή και διαμόρφωση των αντίστοιχων βασικών γραμμικών και μη κυματικών εξισώσεων. Στη συνέχεια δίδονται διάφοροι μέθοδοι επίλυσης ομογενών ή μη προβλημάτων υπερβολικού τύπου με ομογενείς ή μη, χρόνο-ανεξάρτητες ή μη συνοριακές συνθήκες. Και σ' αυτό το Κεφάλαιο η βασική τεχνική επίλυσης είναι η μέθοδος χωρισμού των μεταβλητών. Επίσης παρουσιάζεται η ποιοτική επεξεργασία των λύσεων αυτών των προβλημάτων και αναδεικνύονται τα βασικά χαρακτηριστικά αυτών, όπως ομαλότητα, μονοσήμαντο, φυσική σημασία, κ.λ.π.. Στο δεύτερο μέρος του Κεφαλαίου 4 παρουσιάζονται μερικές από τις πλέον χαρακτηριστικές εξισώσεις της Μαθηματικής Φυσικής (Εξίσωση Klein - Gordon, Εξίσωση Τηλεγράφου-Τηλεφώνου, Εξίσωση της Δοκού), δίδονται μέθοδοι επίλυσης και σχολιάζονται τα βασικά χαρακτηριστικά αυτών συνδεόμενα με τα φυσικά φαινόμενα, των οποίων αποτελούν το μαθηματικό πρότυπο.

Στο **Κεφάλαιο 5**, μελετώνται τα προβλήματα των τριών προηγουμένων Κεφαλαίων 2, 3 και 4 (Ελλειπτικά, Παραβολικά, Υπερβολικά) σε περισσότερες χωρικές διαστάσεις (δύο και τρεις). Φαινόμενα μετάδοσης θερμότητας ή ταλαντώσεων, που λαμβάνουν χώρα σε λεπτές πλάκες ή μεμβράνες, σε κυλίνδρους, ορθογώνια παραλληλόγραμμα ή σφαίρες, μπορούν να περιγραφούν από μερικές διαφορικές εξισώσεις, που ορίζονται στις δύο ή τρεις διαστάσεις ανάλογα με τους περιορισμούς. Εδώ για τη μελέτη των μη ομογενών προβλημάτων εκτός της βασικής μεθόδου χωρισμού των μεταβλητών, που έχει χρησιμοποιηθεί μέχρι τώρα στα φραγμένα πεδία, παρουσιάζεται η τεχνική του πεπερασμένου μετασχηματισμού Fourier και εφαρμόζεται σε χαρακτηριστικές περιπτώσεις. Όπως θα φανεί στη συνέχεια οι τεχνικές, που χρησιμοποιούνται για την επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων σε περισσότερες διαστάσεις, αποτελούν φυσιολογική γενίκευση ή επέκταση των ήδη γνωστών μεθόδων, που αναπτύχθηκαν για μερικές διαφορικές εξισώσεις σε μια διάσταση. Εντούτοις πρέπει να τονισθεί ότι, οι διαδικασίες, που ακολουθούν είναι πολύπλοκες και συχνά οδηγούν σε *προβλήματα Sturm-Liouville*, των οποίων οι λύσεις είναι *ειδικές συναρτήσεις*. Ειδικότερα, προβλήματα ορισμένα σε *κυκλικά ή κυλινδρικά πεδία* οδηγούν σε λύσεις, που περιέχουν *συναρτήσεις Bessel*. Ενώ προβλήματα ορισμένα σε *σφαιρικά πεδία* οδηγούν σε λύσεις, που περικλείουν *πολυώνυμα Legendre*.

Στα προηγούμενα Κεφάλαια 2 έως 5 αναπτύχθηκαν τεχνικές για τη μελέτη των τριών βασικών κατηγοριών μερικών διαφορικών εξισώσεων δεύτερης (και ανώτερης άρτιας) τάξης, όταν αυτά είναι ορισμένα σε φραγμένο πεδίο. Όμως σε πολλά φυσικά, βιολογικά, κοινωνικά, κ.λ.π., φαινόμενα παρουσιάζεται η ανάγκη το αντίστοιχο μαθηματικό πρόβλημα να εξετασθεί σε ένα μη-φραγμένο πεδίο. Στο **Κεφάλαιο 6**, θα μελετηθούν οι τρεις βασικές κατηγορίες μερικών διαφορικών εξισώσεων 2ης τάξης σε μη φραγμένο πεδίο (κυρίως στη μια χωρική διάσταση). Η μελέτη τέτοιων προβλημάτων θα βασισθεί σε δύο κατηγορίες τεχνικών. Η πρώτη μέθοδος βασίζεται στο χωρισμό μεταβλητών σε άπειρο πεδίο, ο οποίος οδηγεί στην ολοκληρωτική αναπαράσταση της λύσης ονομαζόμενη ολοκλήρωμα Fourier. Η δε δεύτερη κατηγορία τεχνικών είναι αυτή των ολοκληρωτικών μετασχηματισμών. Συγκεκριμένα, εδώ θα ασχοληθούμε με τους μετασχηματισμούς Laplace, Fourier, Hankel καθώς και με κάποιες παραλλαγές αυτών.

Στο **Κεφάλαιο 7**, θα δοθούν οι γενικές αρχές και μερικά παραδείγματα μιας αναλυτικής μεθόδου επίλυσης προβλημάτων συνοριακών ή αρχικών συνθηκών συνήθων διαφορικών εξισώσεων, η οποία βασίζεται στον καθορισμό μιας ειδικής συνάρτησης. Η συνάρτηση αυτή φέρει το όνομα του George Green, του ανθρώπου που πρώτος την εισήγαγε από τις αρχές του προπερασμένου αιώνα (1828). Η σπουδαιότητα της μεθόδου, εκτός των άλλων, έγκειται πρώτον στο γεγονός ότι, η διαφορική (συνήθης ή μερική) εξίσωση μετασχηματίζεται σε ολοκληρωτική, η επίλυση της οποίας είναι ευκολότερη και δεύτερον, η παράσταση της λύσης φανερώνει τον τρόπο εξάρτησής της, τόσο από τις περιοριστικές συνθήκες (αρχικές και / ή συνοριακές), που συνοδεύουν το πρόβλημα, όσον και από την εξωτερική επίδραση (μη-ομογενής όρος).

Τέλος, στο **Κεφάλαιο 8**, ορίζεται η συνάρτηση Green για προβλήματα συνοριακών συνθηκών ή αρχικών και συνοριακών συνθηκών μερικών διαφορικών εξισώσεων και μελετώνται οι ιδιότητες αυτών. Στη συνέχεια γίνεται χρήση της συνάρτησης Green για την επίλυση χαρακτηριστικών περιπτώσεων των τριών βασικών κατηγοριών μερικών διαφορικών εξισώσεων 2ης τάξης κυρίως στη μια χωρική (αλλά και στις δύο και τρεις) διάσταση, όπου εμφανίζεται η σύνδεση της λύσης με τα δεδομένα (αρχικά και / ή συνοριακά) καθώς και με τους τυχόν μη ομογενείς όρους.

ΜΕΡΟΣ Β. Μιγαδικές Συναρτήσεις

Στο **Κεφάλαιο 9**, μετά από μια σύντομη αλλά αρκετά πλήρη αναφορά στην ιστορική εξέλιξη της θεωρίας των Μιγαδικών Αριθμών και της Μιγαδικής Ανάλυσης γενικότερα στην Ενότητα 9.1, στην Ενότητα 9.2 παρατίθενται, κατά ένα τρόπο αρκετά αναλυτικό τα βασικά στοιχεία της θεωρίας: των μιγαδικών αριθμών, του μιγαδικού επιπέδου, των ακολουθιών μιγαδικών αριθμών, του ορίου, της συνέχειας, της ομοιόμορφης συνέχειας των μιγαδικών συναρτήσεων καθώς και της τοπολογίας του μιγαδικού επιπέδου. Στη Ενότητα 9.3 ορίζονται και διατυπώνονται οι βασικές ιδιότητες των αναλυτικών (ολόμορφων) συναρτήσεων και στη συνέχεια στην Ενότητα 9.4 παρουσιάζονται οι πιο σημαντικές από αυτές, όπως η Εκθετική Συνάρτηση, οι στοιχειώδεις Τριγωνομετρικές και Υπερβολικές Συναρτήσεις και οι σχέσεις μεταξύ αυτών, η Λογαριθμική Συνάρτηση καθώς και η συνάρτηση Δύναμη Μιγαδικών Αριθμών.

Το **Κεφάλαιο 10**, ασχολείται με τη θεωρία της Μιγαδικής Ολοκλήρωσης στην Ενότητα 10.1, όπου ορίζεται και παρατίθενται οι βασικές ιδιότητες καθώς και χαρακτηριστικά παραδείγματα των (επικαμπυλίων) μιγαδικών ολοκληρωμάτων. Στην Ενότητα 10.2 διατυπώνεται το Ολοκληρωτικό Θεώρημα Cauchy και δίδεται η απόδειξη αυτού κατά Cauchy καθώς και η γενίκευση αυτής κατά Goursat. Στην επόμενη Ενότητα 10.3 με τη βοήθεια του Ολοκληρωτικού Θεωρήματος Cauchy απλοποιείται ο υπολογισμός του αορίστου ολοκληρώματος. Στην Ενότητα 10.4 αποδεικνύεται ο Ολοκληρωτικός Τύπος Cauchy και στη συνέχεια παρατίθεται σειρά εφαρμογών αυτού, που αφορούν την παράγωγο αναλυτικών συναρτήσεων, το Θεώρημα Morera, την αρχή μεγίστου καθώς και το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας.

Στο **Κεφάλαιο 11**, ορίζεται κατ' αρχήν η έννοια της σειράς μιγαδικών αριθμών και μελετώνται δύο βασικές οικογένειες αυτών. Στην Ενότητα 11.2 ορίζονται και παρουσιάζονται τα βασικά χαρακτηριστικά των Σειρών Taylor (και Σειρών Maclaurin) καθώς και πρακτικές μέθοδοι εύρεσης των Δυναμοσειρών. Στην Ενότητα 11.3 παρατίθεται η βασική θεωρία των Σειρών Laurent. Τέλος στην Ενότητα 11.4 αναπτύσσονται βασικές ιδιότητες και πράξεις στις Σειρές, όπως άθροισμα, γινόμενο, πηλίκο, ομοιόμορφη συνέχεια, παραγώγιση, ολοκλήρωση, αναλυτικότητα και μερομορφία.

Στο **Κεφάλαιο 12**, ορίζεται η έννοια του ολοκληρωτικού υπόλοιπου και δίδονται αρκετά παραδείγματα. Στην Ενότητα 12.2 διατυπώνεται και αποδεικνύεται το Θεώρημα Ολοκληρωτικών Υπολοίπων, η γενίκευση του και το Θεώρημα Αναπτύγματος Mittag-Leffler. Στη συνέχεια αναπτύσσεται μια σειρά από σημαντικές εφαρμογές αυτής της θεωρίας. Στην Ενότητα 12.3 υπολογίζονται γενικευμένα ολοκληρώματα ρητών Συναρτήσεων, στην 12.4

Ολοκληρώματα Fourier, στην 12.5 ολοκληρώματα πλειονότιμων συναρτήσεων, αφού εισαχθούν οι έννοιες του κλαδικού σημείου και των / κλαδικών τομών και στην Ενότητας 12.6 υπολογίζονται ορισμένα ολοκληρώματα Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων. Στην Ενότητα 12.7 παρουσιάζεται ο πολύ σημαντικός υπολογισμός του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace. Στην Ενότητα 12.8 υπολογίζεται με απλό τόπο το άθροισμα σειρών συγκεκριμένης μορφής. Στην Ενότητα 12.9 αναπτύσσεται η αρχή ορίσματος, η οποία έχει ως συνέπεια αποτελέσματα σχετικά με την αρχή μεγίστου και αυτήν της σταθερής συνάρτησης. Στην Ενότητα 12.10 αναπτύσσεται η εφαρμογή στη θεωρία Ευστάθειας και ειδικά στα αλγεβρικά κριτήρια ευστάθειας καθώς και στη σχέση τους με την αρχή ορίσματος. Τέλος, στην Ενότητα 12.11 αναπτύσσεται η έννοια του ολοκληρωτικού υπολοίπου στο άπειρο.

Στο **Κεφάλαιο 13**, τέλος, κατ' αρχήν αναπτύσσεται η έννοια της σύμμορφης απεικόνισης. Ξεκινούμε από την παρουσίαση ορισμένων βασικών μιγαδικών απεικονίσεων, όπως ο γραμμικός μετασχηματισμός $w = az + b$, ο τετραγωνικός μετασχηματισμός $w = z^2$, η αντίστροφη απεικόνιση $w = z^{-1}$, η Εκθετική και η Λογαριθμική απεικόνιση. Στην Ενότητα 13.2 ορίζεται η σύμμορφη απεικόνιση και δίδονται βασικά παραδείγματα. Στη συνέχεια δίδονται οι πιο σημαντικές και χρήσιμες σύμμορφες απεικονίσεις. Στην Ενότητα 13.3 αναπτύσσονται οι ρητογραμμικοί μετασχηματισμοί ή Μετασχηματισμοί Möbius. Στην Ενότητα 13.4 εισάγονται οι μετασχηματισμοί Zhukovsky και Kármán-Trefftz και συνδέονται με συγκεκριμένες εφαρμογές. Στην Ενότητα 13.5 παρουσιάζεται η βασική θεωρία του μετασχηματισμού Schwarz-Christoffel και δίδονται βασικές εφαρμογές. Τέλος, στην Ενότητα 13.6 αναπτύσσονται οι στοιχειώδεις σύμμορφες απεικονίσεις: ημιτονική συνάρτηση, συνημιτονική συνάρτηση, εφαπτομενική συνάρτηση, και οι βασικές υπερβολικές συναρτήσεις. Σε αυτό το Κεφάλαιο κατεβλήθη ιδιαίτερη προσπάθεια να υπάρχουν όλες οι απαραίτητες γραφικές παραστάσεις, λόγω του έντονου γεωμετρικού χαρακτήρα του αντικειμένου που αναπτύσσεται εδώ.

Το βιβλίο περιέχει περίπου **300 αναλυτικά λυμένα Παραδείγματα**, περίπου **230 Βιβλιογραφικές Αναφορές**, **180 παραστατικά Σχήματα**, **60 φωτογραφίες** διακεκριμένων επιστημόνων με σημαντική συμβολή στην ανάπτυξη των αντικειμένων του παρόντος συγγράμματος, και άνω των **1150 Προβλημάτων**, αρκετά από τα οποία συνοδεύονται από τις απαντήσεις και/ή υποδείξεις επίλυσής τους.

Όπου κρίνεται αναγκαίο γίνεται σύνδεση των μαθηματικών αποτελεσμάτων με το αντίστοιχο φυσικό ή άλλο φαινόμενο. Επίσης στις βασικές εξισώσεις γίνεται μια αναλυτική παρουσίαση της διαδικασίας Μαθηματικής προτυποποίησης, σε μια προσπάθεια κατανόησης της σύνδεσης των μεταβλητών και παραμέτρων του προβλήματος με τα επιμέρους στοιχεία του αντίστοιχου φαινομένου.

Προαπαιτούμενες γνώσεις: για τον μελετητή αυτού του βιβλίου θεωρούνται τα θέματα, που αναπτύσσονται στα προπτυχιακά μαθήματα *Λογισμού Μιας και Πολλών Μεταβλητών, Γραμμικής Άλγεβρας, Αναλυτικής Γεωμετρίας, Διανυσματικής Ανάλυσης, Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων, Σειρών και Μετασχηματισμών Fourier και Συνοριακών Προβλη-*

μάτων.

Ευχαριστίες: Το βιβλίο αυτό αναπτύχθηκε από τις σημειώσεις των μαθημάτων Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, που έχω διδάξει τα τελευταία 30 χρόνια σε διάφορες Σχολές του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου καθώς και στο Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης για αρκετά χρόνια. Γι' αυτό θέλω να απευθύνω τις πρώτες ευχαριστίες μου στους πολυάριθμούς φοιτητές, που με πολύ υπομονή, κατανόηση, εύστοχες υποδείξεις, επιστημονικές ανησυχίες και νεανικό αυθορμητισμό, συνέβαλαν καθοριστικά στην παρούσα διαμόρφωση του ανά χείρας κειμένου. Στη συνέχεια θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους εκείνους τους συναδέλφους από τον Τομέα Μαθηματικών της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών & Φυσικών Επιστημών, καθώς και άλλες Σχολές του ΕΜΠ, που έτυχε κατά καιρούς άμεσα ή έμμεσα να συζητήσουμε θέματα σχετιζόμενα με το υλικό του ανά χείρας βιβλίου.

Ευχαριστώ ιδιαίτερα τον συνεργάτη μου *Σταυρουλάκη Στυλιανό*, που επιμελήθηκε με περισσή τέχνη τα σχεδιαγράμματα και τα Προγράμματα που αναπτύχθηκαν στο Α Μέρος, την κυρία *Stefania Gulmini* που επεξεργάστηκε άψογα τα σχέδια του Β Μέρους, το Δρ *Δήμο Γκουνταρούλη* για την πολύ σημαντική στήριξη που μου προσέφερε στη διαχείριση των κειμένων LaTeX, την κυρία *Ειρήνη Επταημέρου* της «*Angelakis Digital*» για το πολύ ωραίο αποτέλεσμα της συνεργασίας μας, και τους ανθρώπους των εταιριών «*MEDIA PRES, Γραφικές Τέχνες*» και «*Μοσχούρη Σταματία*» για τον επαγγελματισμό και την απόλυτη συνέπεια που χειρίστηκαν το τελευταίο στάδιο της εκτύπωσης και βιβλιοδεσίας του ανά χείρας συγγράμματος.

Αισθάνομαι επίσης την ανάγκη να εκφράσω τις άπειρες ευχαριστίες μου προς την οικογένεια μου για την υπομονή και την κατανόηση, που συνεχώς μου έδειχνε, αλλά και τη στήριξη, που κατά καιρούς χρειάστηκε να μου δώσει για την αποπεράτωση αυτού του έργου.

Τέλος, προς όλους αυτούς που θα επιθυμούσαν να συμβάλλουν σε μια πληρέστερη και αρτιότερη εμφάνιση μιας μελλοντικής έκδοσης αυτού του συγγράμματος, αφού τους ευχαριστήσω προκαταβολικά, θα ήθελα να τους γνωρίσω ότι, μπορούν να στείλουν την όποια συμβολή τους στην ηλεκτρονική μου διεύθυνση.

Νικόλαος Μ. Σταυρακάκης

nikolas@central.ntua.gr ή stavrakakis.nikolaos@gmail.com

http://www.math.ntua.gr/ stavraka/

Αθήνα, 1 Μαρτίου 2016.

Περισσότερα στοιχεία για το βιβλίο μπορείτε να βρείτε στην Ιστοσελίδα: https://service.eudoxus.gr/

Περιεχόμενα

Ευρετήριο Εικόνων

Ευρετήριο Σχημάτων