



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Τα Θεωρήματα Alexander και Markov
της Θεωρίας Κόμβων

Πατεράκης Αντώνιος

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια

Λαμπροπούλου Σοφία

Αθήνα, Ιούλιος 2008

*Στη μνήμη των γονιών μου
Σοφίας και Μιχάλη*

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	7
2	Βασικές έννοιες	15
3	Το Θεώρημα Alexander	27
3.1	Απόδειξη 1 κατά <i>Alexander</i> [2]	27
3.2	Απόδειξη 2 κατά <i>Birman</i> [4]	29
3.3	Απόδειξη 3 κατά <i>Λαμπροπούλου</i> [6, 7]	35
3.4	Απόδειξη 4 κατά <i>Morton</i> [10]	37
3.5	Απόδειξη 5 κατά <i>Yamada</i> [15]	42
3.5.1	Ορισμοί	42
3.5.2	Πράξεις Ομαδοποίησης	47
3.6	Απόδειξη 6 κατά <i>Vogel</i> [13]	53
3.6.1	Περιγραφή της στοιχειώδους πράξης	54
3.6.2	Κατασκευή της απεικόνισης χ	56
3.6.3	Ιδιότητες της απεικόνισης χ	56
3.6.4	Η απεικόνιση χ και η πράξη T	58
3.6.5	Απόδειξη του (iii) του Θεωρήματος 7.	62
3.6.6	Απόδειξη του (iv) του Θεωρήματος 7.	63
4	Το Θεώρημα Markov	67
4.1	Απόδειξη κατά <i>Λαμπροπούλου – Rourke</i> [7]	68

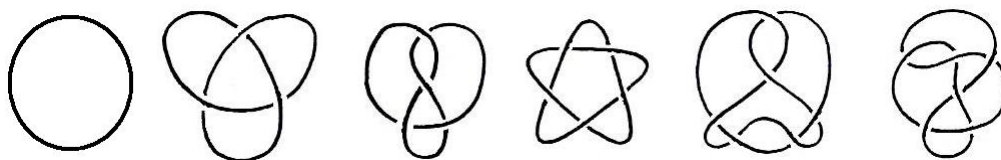
4.1.1	Το Θεώρημα <i>Markou</i> μίας κίνησης	69
4.1.2	Απόδειξη του Θεωρήματος <i>Markou</i> μίας κίνησης	73
4.1.3	Το στατικό μέρος της απόδειξης	75
4.1.4	Το κινητικό μέρος της απόδειξης	77

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Αν πάρουμε μια κλωστή, κάνουμε σε αυτή έναν κόμβο και στη συνέχεια κολλήσουμε τα άκρα μεταξύ τους, αποκτούμε μια πρώτη προσέγγιση γι'αυτό που παρακάτω θα ορίσουμε ως *κόμβο*.

Ορισμός 1. Ένας *κόμβος* (*knot*) K είναι η εικόνα ενός ομοιομορφισμού h του κύκλου S^1 στο χώρο \mathbb{R}^3 ή στη σφαίρα S^3 . Δηλαδή $h : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ή S^3 , $h(\bigcirc) = K$, όπου \bigcirc είναι ο κύκλος S^1 .



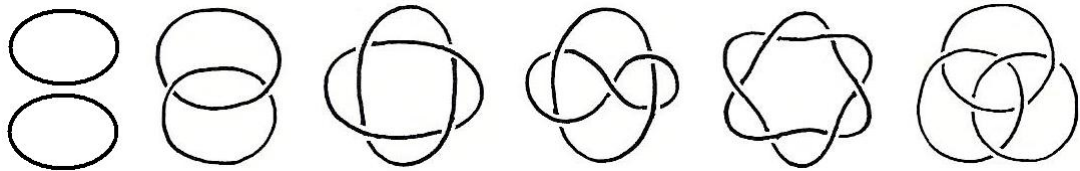
Σχήμα 1.1: Παραδείγματα κόμβων

Σε κάποιες περιπτώσεις είναι σημαντικό να προσδίδεται φορά σε ένα κόμβο.

Ορισμός 2. Ένας *προσανατολισμός* σε έναν κόμβο ορίζεται ως η επιλογή μίας κατεύθυνσης με την οποία κινούμαστε πάνω στον κόμβο. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι ο κόμβος είναι *προσανατολισμένος*.

Η έννοια του κόμβου γενικεύεται ως εξής:

Ορισμός 3. Ένας κρίκος (*link*) L με n συνιστώσες είναι η ομοιομορφική εικόνα από n αντίγραφα του κύκλου S^1 στο \mathbb{R}^3 ή στην S^3 . Επιλέγοντας έναν προσανατολισμό για κάθε συνιστώσα, μιλάμε για *προσανατολισμένους κρίκους*.



Σχήμα 1.2: Παραδείγματα κρίκων

Σε όλη την εργασία λέγοντας “κόμβοι” θα εννοούμε “κόμβοι και κρίκοι”.

Η Θεωρία Κόμβων ξεκίνησε στα τέλη του 19ου αιώνα. Τα προηγούμενα χρόνια είχαν ασχοληθεί με κόμβους διάφοροι μαθηματικοί, ανάμεσά τους και ο C.F.Gauss. Η ανάγκη για τη μελέτη των κόμβων προήλθε από τη Χημεία, όπου γύρω στο 1880 ο λόρδος Kelvin είκασε ότι τα άτομα είναι κόμβοι μέσα στον αιθέρα (μια ουσία που πίστευαν εκείνη την εποχή ότι περιβάλλει τα πάντα). Οπότε, ταξινομώντας τους κόμβους θα είχαν ταξινομηθεί και τα στοιχεία της ύλης. Δυστυχώς ο Kelvin αποδείχθηκε λάθος, εφόσον λίγο αργότερα ανακαλύφθηκε ένα πιο ακριβές μοντέλο περιγραφής των ατόμων, έτσι οι χημικοί έχασαν το ενδιαφέρον τους για τους κόμβους για τα επόμενα 100 χρόνια. Σε αυτό το διάστημα, αντιθέτως, οι μαθηματικοί έδειξαν μεγάλο ενδιαφέρον με αποτέλεσμα την εξέλιξη της Μαθηματικής Θεωρίας Κόμβων.

Γύρω στα 1980, οι βιοχημικοί ανακαλύπτουν, με μεγάλη έκπληξη, μόρια DNA σε μορφή (ανοικτού) κόμβου. Παράλληλα, στο χώρο της συνθετικής χημείας διαπιστώνεται πως μπορούν να συντεθούν μόρια σε μορφή κόμβου, και μάλιστα ο τύπος του κόμβου καθορίζει και τις ιδιότητες του μορίου. Έτσι η Χημεία και η Βιολογία είναι από τους κλάδους στους οποίους η Θεωρία Κόμβων έχει πολλές ενδιαφέρουσες εφαρμογές.

Η Θεωρία Κόμβων ανήκει στην περιοχή των Μαθηματικών που ονομάζεται Τοπολογία. Τοπολογία είναι η μελέτη των ιδιοτήτων γεωμετρικών αντικειμένων που παραμένουν αναλλοίωτες σε ελαστικούς μετασχηματισμούς. Έτσι, ένας κόμβος ως τοπολογικό αντικείμενο επιτρέπεται να κινείται στο χώρο σαν να ήταν κατασκευασμένος από ελαστικό υλικό και κόμβοι που διαφέρουν κατά τέτοιες “ελαστικές” κινήσεις λέμε ότι είναι του ίδου τύπου και τους ονομάζουμε *ισοτοπικούς*.

Ορισμός 4. Δύο κόμβοι K_1, K_2 λέγονται *ισοτοπικοί*, συμβολίζουμε $K_1 \sim K_2$, όταν υπάρχει (προσανατολισμένος) ομοιομορφισμός του χώρου, $h : (\mathbb{S}^3, K_1) \rightarrow (\mathbb{S}^3, K_2)$, τέτοιος ώστε $h(K_1) = K_2$. Δηλαδή από τον ένα κόμβο να μπορούμε να καταλήξουμε στον άλλο με μία συνεχή ελαστική κίνηση στο χώρο.

Είναι βολικό τους κόμβους να τους μελετάμε μέσω των διαγραμμάτων τους. Αυτά είναι προβολές τους στο επίπεδο, τέτοιες ώστε να περιέχουν μόνο πεπερασμένα διπλά σημεία με την πληροφορία “άνω” ή “κάτω”. Η μετάφραση της έννοιας της ισοτοπίας για διαγράμματα δόθηκε το 1927 από τον K. Reidemeister [11] με τρεις διακριτές κινήσεις ισοτοπίας (βλ. Θεώρημα 3). Αυτό ήταν ένα μεγάλο βήμα για τη μελέτη των κόμβων, τόσο διότι τους βλέπουμε στο επίπεδο όσο και διότι η ισοτοπία διακριτοποιήθηκε .

Ένα μεγάλο ανοικτό πρόβλημα στην Τοπολογία Χαμηλών Διαστάσεων είναι η ταξινόμηση των κόμβων, δηλαδή η εύρεση όλων των διαφορετικών τύπων κόμβων ως προς τη σχέση της ισοτοπίας. Ο φυσικός P.G.Tait, βοηθός του λόρδου Kelvin, εργάστηκε επί 20 χρόνια πάνω σε αυτό το πρόβλημα και έφτιαξε ένα κατάλογο διαφορετικών κόμβων μέχρι 9 διασταυρώσεις.

Για να δώσουμε μια ιδέα του πόσο δύσκολο είναι αυτό το πρόβλημα ας ξεκινήσουμε να κατασκευάζουμε έναν κόμβο με 14 διασταυρώσεις. Σχεδιάζοντας μία καμπύλη στο επίπεδο, στην οποία επιτρέπονται οι αυτοτομές, παρατηρούμε κατ'αρχάς ότι δεν είναι εύκολο να κλείσουμε την καμπύλη και το σχέδιό μας

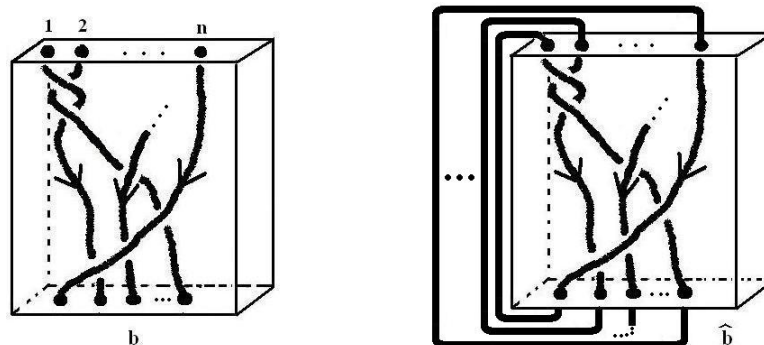
να έχει ακριβώς 14 διασταυρώσεις. Έπειτα, προκειμένου αυτή η καμπύλη να αναπαριστά κόμβο, θα πρέπει να είναι σαφές ποιό τόξο είναι πάνω από το άλλο σε κάθε διασταύρωση. Επειδή κάθε διασταύρωση έχει δύο πιθανές καταστάσεις, ανάλογα με την επιλογή μας σε κάθε μία, προκύπτουν 2^{14} κόμβοι. Γενικά λοιπόν έχουμε 2^n κόμβους για n διασταυρώσεις (που συνήθως ανάγονται σε λιγότερες) και δύσκολα μπορούμε να ξεχωρίσουμε ποιοί είναι διαφορετικοί.

Πιο χρήσιμο όμως για την ταξινόμηση είναι να έχουμε στη διάθεσή μας πολλές αναλλοίωτες. Μία αναλλοίωτη κόμβων $I : \{\text{κόμβοι}\} \rightarrow \Sigma$, όπου το σύνολο τιμών Σ μπορεί να αποτελείται από σύμβολα, αριθμούς, πολυώνυμα κλπ, τέτοια ώστε: $K_1 \sim K_2 \Rightarrow I(K_1) = I(K_2)$. Υπάρχουν πολλές κλασικές και μοντέρνες αναλλοίωτες κόμβων, τόσο γεωμετρικές όσο και αλγεβρικές. Η πρακτική σημασία μιας αναλλοίωτης I για την ταξινόμηση των κόμβων είναι ότι: Αν για ένα ζεύγος κόμβων K_1, K_2 έχουμε $I(K_1) \neq I(K_2)$ τότε σίγουρα οι K_1, K_2 δεν είναι ισοτοπικοί, άρα είναι διαφορετικοί. Πάντως, ακόμα δεν έχει βρεθεί μια πλήρης αναλλοίωτη κόμβων.

Κάποια άλλα τοπολογικά αντικείμενα συναφή με τους κόμβους είναι οι κοτσίδες.

Ορισμός 5. Μια κοτσίδα με n κλωστές είναι μια ομοιομορφική εικόνα n τόξων στο εσωτερικό του $[0, 1] \times \varepsilon \times [0, 1]$, όπου $\varepsilon > 0$, τέτοια ώστε το σύνορο της εικόνας να είναι n αριθμημένα σημεία του $I \times \varepsilon \times \{0\}$ και n αντίστοιχα σημεία του $I \times \varepsilon \times \{1\}$, και επιπλέον, να είναι μονότονη, δηλαδή να μην έχει τοπικά μέγιστα ή ελάχιστα. Εξ'ορισμού, μια κοτσίδα έχει έναν φυσικό προσανατολισμό (από πάνω προς τα κάτω), βλ. Σχ. 1.3 για ένα παράδειγμα κοτσίδας.

Ορισμός 6. Το κλείσιμο \hat{b} μιας κοτσίδας b είναι η ένωση με απλά τόξα των αντίστοιχων αριθμημένων σημείων. Το \hat{b} είναι ένας προσανατολισμένος κρίκος, βλ. Σχ. 1.3 για ένα παράδειγμα.



Σχήμα 1.3: Παράδειγμα κοτσίδας b και κλεισίματος κοτσίδας \hat{b}

Ορισμός 7. Άξονας μιας κλειστής κοτσίδας είναι μια ευθεία στο χώρο ως προς την οποία όλες οι κλωστές της να στρέφονται με την ίδια φορά.

Το σύνολο των κοτσίδων με n κλωστές αποτελεί ομάδα με πράξη την τοποθέτηση της μιάς κοτσίδας πάνω στην άλλη, βλέπε Σχ. 2.6, και κάθε κοτσίδα μπορεί να δοθεί σαν λέξη των γεννητόρων, όπως απεικονίζονται στο Σχ. 3.31 (Θεώρημα 4). Το ερώτημα είναι εάν ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή εάν οποιοσδήποτε κόμβος μπορεί να παρασταθεί από μία κοτσίδα. Η απάντηση στο ερώτημα έχει δοθεί από τον J.W. Alexander στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 1 (Alexander, 1923). *Κάθε προσανατολισμένος κόμβος ή κρίκος μπορεί να ισοτοπηθεί σε μιά κλειστή κοτσίδα.*

Το Θεώρημα Alexander μας λέει ότι ένας κόμβος μπορεί να κωδικοποιηθεί από την αλγεβρική λέξη μιας κοτσίδας. Το επόμενο ερώτημα είναι πώς σχετίζονται μεταξύ τους δύο διαφορετικές κοτσίδες που αντιστοιχούν σε ισοτοπικούς κόμβους. Αυτό απαντήθηκε από τον A.A. Markov μέσω του επόμενου θεωρήματος.

Θεώρημα 2 (Markov, 1936). *Δύο προσανατολισμένοι κόμβοι ή κρίκοι είναι ισοτοπικοί αν και μόνον αν οποιεσδήποτε δύο αντίστοιχες κοτσίδες τους είναι ισοδύναμες μέσω των κινήσεων:*

- (i) Συζυγία σε κάθε \mathbf{B}_n : $\alpha \sim \sigma_i^{-1} \alpha \sigma_i$
(ii) Κίνηση Markov : $\mathbf{B}_n \ni \alpha \sim \alpha \sigma_n^{\pm 1} \in \mathbf{B}_{n+1}$

Άρα, η απεικόνιση που αντιστοιχεί κόμβους σε κλάσεις ισοδυναμίας κοτσίδων (σύμφωνα με το Θεώρημα Markov) είναι μια θεωρητική αναλλοίωτη κόμβων. Δυστυχώς μόνο θεωρητική διότι, παρότι το πρόβλημα συζυγίας στις ομάδες \mathbf{B}_n έχει λυθεί από τον Garside, η ύπαρξη της δεύτερης κίνησης κάνει το πρόβλημα ταξινόμησης εξαιρετικά δύσκολο.

Ο V.F.R. Jones ήταν ο πρώτος που χρησιμοποίησε τα θεωρήματα Alexander και Markov για να κατασκευάσει το 1984 μια νέα πολυωνυμική αναλλοίωτη κόμβων, το πολυώνυμο Jones, χρησιμοποιώντας τις άλγεβρες Hecke, που είναι πεπερασμενοδιάστατες άλγεβρες-πηλίκα των αλγεβρών $\mathbb{C}\mathbf{B}_n$. Γι' αυτή του την εργασία του απε-νεμήθη το βραβείο Fields. Μετά την ανακάλυψη του πολυώνυμου Jones, τα Θεωρήματα Alexander και Markov τράβηξαν εκ νέου το ενδιαφέρον των μαθηματικών.

Το Θεώρημα Alexander έχει αποδειχθεί από τους J.W. Alexander (1923) [2], J.S. Birman (1976) [4], H.R. Morton (1986) [10], S. Yamada (1987) [15], P. Vogel (1990) [13] και Σ. Λαμπροπούλου (1990) [6].

Το Θεώρημα Markov αποδείχθηκε καταρχάς από τους Markov (1936) [9] και Weinberg (1936) [14], ενώ η πρώτη πλήρης απόδειξη δόθηκε από την Birman (1976) [4], όλες χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Alexander για τη μετατροπή διαγραμμάτων σε κοτσίδες. Ο Markov έδωσε αρχικά το θεώρημα με τρεις κινήσεις ισοδυναμίας, τις οποίες στη συνέχεια ο Weinberg μείωσε στις γνωστές δύο. Άλλες αποδείξεις του Θεωρήματος Markov έχουν δοθεί από τους H.R. Morton (1986) [10] χρησιμοποιώντας τον δικό του αλγόριθμο "threading" για μετατροπή διαγραμμάτων σε κοτσίδες, Σ. Λαμπροπούλου-C.P. Rourke (1997) [7] χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του [6], P. Traczyk (1998) [12] χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Vogel και από τους J.S. Birman-W.W. Menasco (2001) [5] χρησιμοποιώντας τις ιδέες του D. Bennequin (1982) [3].

Στην εργασία αυτή, παρουσιάζονται αναλυτικά οι αποδείξεις του Θεωρήμα-

τος Alexander όπως δόθηκαν από τους Alexander, Birman, Λαμπροπούλου, Morton, Yamada και Vogel, καθώς και η απόδειξη κατά Λαμπροπούλου-Rourke του Θεωρήματος Markov. Για την καλύτερη κατανόηση των αποδείξεων παρουσιάζονται στο κεφάλαιο που ακολουθεί αναγκαίες έννοιες και προτάσεις από τη Θεωρία Κόμβων.

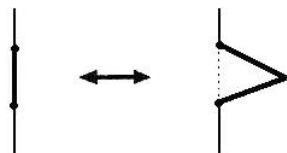
Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την Αν. Καθηγήτρια της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, Λαμπροπούλου Σοφία, για τη δυνατότητα που μου παρείχε να γνωρίσω ένα μεγάλο και ενδιαφέρον πεδίο των Μαθηματικών, τη Θεωρία Κόμβων και για την πολύτιμη συμβολή της σε όλη τη διάρκεια της εκπόνησης της διπλωματικής αυτής εργασίας. Επίσης, θα επιθυμούσα να ευχαριστήσω τους Καθηγητές Ε. Αγγελόπουλο και Σ. Καρανάσιο για το χρόνο που διέθεσαν για την ανάγνωση της εργασίας.

Κεφάλαιο 2

Βασικές έννοιες

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε τους κόμβους κατά τμήματα γραμμικούς.

Ορισμός 8. Μία κίνηση Δ είναι μία κίνηση ισοτοπίας ενός τμήματος ενός κόμβου κατά μήκος ενός τριγώνου στο χώρο, η επιφάνεια του οποίου δεν τέμνει τον κόμβο.

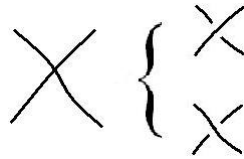


Σχήμα 2.1: Κίνηση Δ

Είναι γνωστό ότι η ισοτοπία κόμβων μεταφράζεται, στην κατηγορία των κατά τμήματα γραμμικών κόμβων, ως μια πεπερασμένη ακολουθία από κινήσεις Δ στο χώρο.

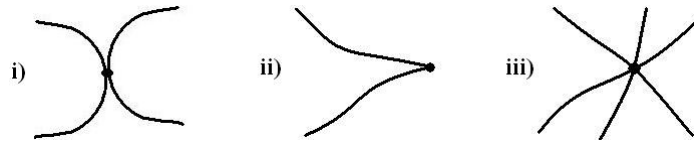
Τους κόμβους τους μελετάμε μέσω των κανονικών τους προβολών (διαγραμμάτων) στο επίπεδο.

Ορισμός 9. Διάγραμμα ενός κόμβου είναι μια προβολή του στο επίπεδο, η οποία περιέχει μόνο πεπερασμένο πλήθος διπλών σημείων που θα ονομάζονται διασταυρώσεις (crossings), με την επιπλέον πληροφορία “πάνω” ή “κάτω” για κάθε διασταύρωση. Δηλαδή,



Σχήμα 2.2: Κατασκευή διασταύρωσης

Ένα διάγραμμα επίσης δεν περιέχει ανωμαλίες του τύπου: i) σημεία επαφής ii) πτυχώσεις (σημεία αναστροφής) ή iii) τριπλά σημεία, όπως απεικονίζονται στο Σχ. 2.3.



Σχήμα 2.3: Σημείο επαφής, πτύχωση, τριπλό σημείο.

Πρόταση 1. Κάθε κόμβος έχει τουλάχιστον ένα διάγραμμα, δηλαδή κάθε προβολή μπορεί να μετατραπεί σε διάγραμμα.

Απόδειξη. Γύρω από κάθε τριπλό σημείο ή σημείο επαφής ή πτύχωση γράφουμε κύκλο με ακτίνα ε_i ώστε να μην περιέχεται στο δίσκο που προκύπτει κάποιο άλλο τμήμα του διαγράμματος.

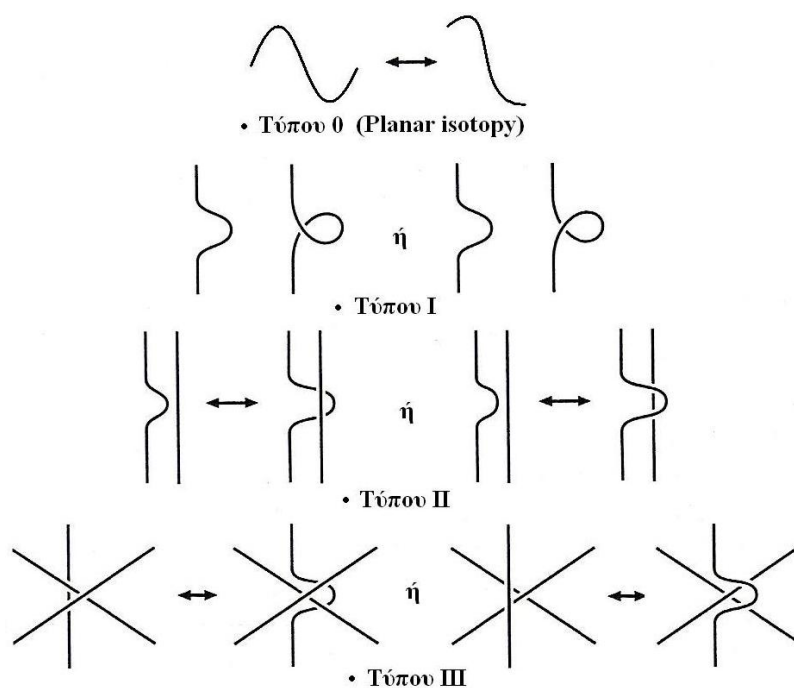
Τα σημεία αυτά είναι πεπερασμένα στο πλήθος. Διαλέγουμε $\varepsilon > 0$ ώστε να είναι το μικρότερο από όλα τα ε_i , έτσι ώστε η κάθε κυκλική περιοχή (δίσκος) να μην περιέχει άλλα τμήματα από το διάγραμμα πέραν των ανώμαλων τμημάτων.

Αφαιρούμε προσωρινά τους δίσκους από την προβολή και προσδιορίζουμε την ελάχιστη απόσταση δ μεταξύ δύο σημείων και θέτουμε $\rho = \min\{\varepsilon, \delta\}$. Επικεντρωνόμαστε σε ένα από τα σημεία ανωμαλιών της προβολής και διαταράσσουμε την ακτίνα από το μάτι μας στο σημείο κατά $\kappa < \rho$. Τότε άρουμε αυτή την παθολογία χωρίς να προκαλέσουμε κάποια άλλη. Συνεχίζουμε έτσι σε όλα τα σημεία ανωμαλιών για να φτάσουμε σε κανονική προβολή.

□

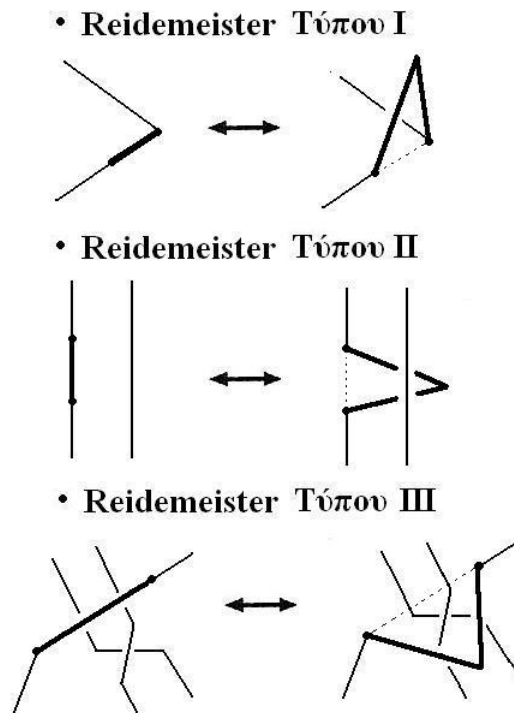
Το θεώρημα που ακολουθεί μας επιτρέπει να μελετάμε την ισοτοπία στο επίπεδο αντί για το χώρο.

Θεώρημα 3 (Reidemeister, 1935). Δύο κόμβοι K_1, K_2 είναι ισοτοπικοί αν και μόνο αν οποιαδήποτε δύο διαγράμμάτα τους $D(K_1), D(K_2)$ διαφέρουν κατά ισοτοπία επιπέδου ($R0$) και πεπερασμένο αριθμό κινήσεων Reidemeister, $RI, RII, RIII$:



Σχήμα 2.4: Οι κινήσεις Reidemeister

Απόδειξη. Θεωρώντας τους κόμβους κατά τμήματα γραμμικούς, αρκεί να εξετάσουμε όλες τις δυνατές περιπτώσεις κινήσεων Δ στο χώρο. Αυτή είναι ακριβώς η ιδέα της απόδειξης του Reidemeister, ο οποίος κατέληξε στις τρεις παρακάτω μη τετριμμένες προβολές κινήσεων Δ .



Σχήμα 2.5: Κινήσεις Reidemeister μέσω κινήσεων Δ

□

Ας περάσουμε τώρα στις κοτσίδες. Όπως για κόμβους, έτσι και για κοτσίδες επιτρέπονται κάποιες ισοτοπίες. Σε αυτές δεν συμπεριλαμβάνεται η RI γιατί περιέχει μέγιστα και ελάχιστα γεγονός που αντίκειται στον ορισμό της κοτσίδας. Επιτρέπονται όμως οι RII και $RIII$, χωρίς όμως να δημιουργούν οριζόντια τόξα. Η βασική ισοτοπία για τις κοτσίδες είναι η $RIII$.

Συμβολίζουμε το σύνολο των (κλάσεων ισοτοπίας) κοτσίδων με n κλωστές ως \mathbf{B}_n . Στο \mathbf{B}_n ορίζουμε την πράξη “γινόμενο” μέσω της συγκόλλησης κο-

τσίδων όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:

$$\left(\begin{array}{c} 1 \ 2 \ n \\ \vdots \\ \alpha \\ \vdots \end{array} \cdot \begin{array}{c} 1 \ 2 \ n \\ \vdots \\ \beta \\ \vdots \end{array} \right) = \alpha \cdot \beta := \begin{array}{c} 1 \ 2 \ n \\ \vdots \\ \alpha \\ \vdots \\ \beta \\ \vdots \end{array}$$

Σχήμα 2.6: Πράξη γινόμενο

Θεώρημα 4. $H(\mathbf{B}_n, \bullet)$ αποτελεί ομάδα.

Απόδειξη. 1. Προσεταιριστική ιδιότητα:

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \begin{array}{c} 1 \ 2 \ n \\ \vdots \\ \alpha \\ \vdots \\ \beta \\ \vdots \end{array} \cdot \begin{array}{c} 1 \ 2 \ n \\ \vdots \\ \gamma \\ \vdots \end{array} = \begin{array}{c} 1 \ 2 \ n \\ \vdots \\ \alpha \\ \vdots \\ \beta \\ \vdots \\ \gamma \\ \vdots \end{array} = \begin{array}{c} 1 \ 2 \ n \\ \vdots \\ \alpha \\ \vdots \end{array} \cdot \begin{array}{c} 1 \ 2 \ n \\ \vdots \\ \beta \\ \vdots \\ \gamma \\ \vdots \end{array} = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$$

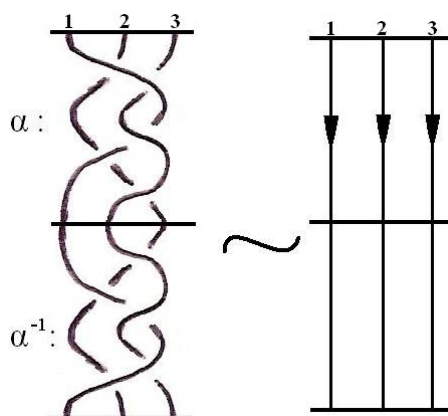
Σχήμα 2.7: Προσεταιριστική ιδιότητα

2. Ουδέτερο στοιχείο. Η ταυτοτική κοτσίδα με n ευθείες κλωστές αποτελεί το ουδέτερο στοιχείο, **1**. Πράγματι :

$$\begin{array}{c}
 1 \ 2 \ n \\
 | \dots \\
 \alpha \\
 | \\
 \dots \\
 \downarrow \dots \\
 \dots
 \end{array}
 = \alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$$

Σχήμα 2.8: Ουδέτερο στοιχείο

3. Αντίστροφο στοιχείο. Γεωμετρικά, είναι αυτό που αντιστοιχεί στο συμμετρικό του a ως προς το επίπεδο xOy .



Σχήμα 2.9: Αντίστροφο στοιχείο

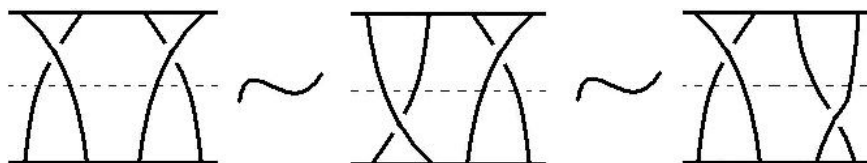
□

Πρόταση 2. Κάθε κοτσίδα μπορεί να ισοτοπηθεί σε γινόμενο από οριζόντιες λωρίδες, έτσι ώστε η κάθε μία να περιέχει μόνο μία διασταύρωση.

Απόδειξη. Για τρεις γειτονικές κλωστές ισχύει από τον ορισμό της κοτσίδας (λόγω μονοτονίας). Για μη γειτονικές κλωστές διαταράσσουμε, αν χρειαστεί. Δηλαδή, αν δύο διασταυρώσεις βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο ύψος προκαλούμε μια μικρή διαταραχή στη μία και τη “χαμηλώνουμε” ή την “ανεβάζουμε” με

ισοτοπία επιπέδου (βλέπε Σχ. 2.10). Επαγωγικά, χωρίς βλάβη της γενικότητας, εμφανίζονται μόνο δύο διασταυρώσεις στο ίδιο ύψος.

□



Σχήμα 2.10: Σχετικά ύψη δύο διασταυρώσεων

Ορίζουμε την στοιχειώδη κοτσίδα σ_i έτσι ώστε η i κλωστή να περνάει κάτω από την κλωστή $i + 1$ και οι υπόλοιπες να παραμένουν σταθερές (βλέπε Σχ. 2.11). Αντίστοιχα ορίζεται η σ_i^{-1} .

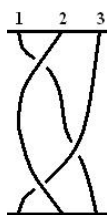
$$\sigma_i : \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & \dots & i-1 & i & i+1 & i+2 & \dots & n \\ \left| \right. & \left| \right. & \dots & \left| \right. & \times & \left| \right. & \left| \right. & \dots & \left| \right. \\ \left. \right| & \left. \right| & \dots & \left. \right| & \left. \right| & \left. \right| & \left. \right| & \dots & \left. \right| \end{array}$$

$$\sigma_i^{-1} : \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & \dots & i-1 & i & i+1 & i+2 & \dots & n \\ \left| \right. & \left| \right. & \dots & \left| \right. & \times & \left| \right. & \left| \right. & \dots & \left| \right. \\ \left. \right| & \left. \right| & \dots & \left. \right| & \left. \right| & \left. \right| & \left. \right| & \dots & \left. \right| \end{array}$$

Σχήμα 2.11:

Σημειώνουμε ότι η κίνηση RII ανάμεσα σε κοτσίδες είναι απλώς η γεωμετρική ερμηνεία του ότι ο γεννήτορας σ_i έχει αντίστροφο, γεγονός που το γνωρίζουμε από το ότι η \mathbf{B}_n είναι ομάδα.

Από τα παραπάνω, κάθε κοτσίδα στη \mathbf{B}_n περιγράφεται ως γινόμενο τέτοιων στοιχειωδών κοτσίδων με μία διασταύρωση και αποτελεί μια “λέξη” των στοιχειωδών κοτσίδων σ_i . Π.χ. η κοτσίδα που ακολουθεί γράφεται ως $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1^{-1}$.

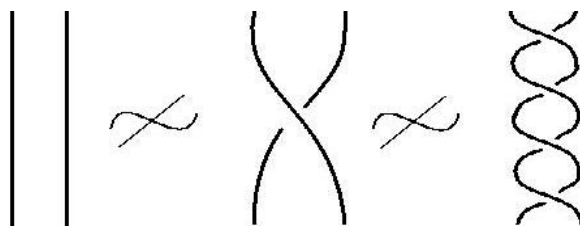


Σχήμα 2.12: Η κοτσίδα $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1^{-1}$

Από την Πρόταση 2 τα σ_i και σ_i^{-1} λοιπόν είναι γεννήτορες της ομάδας \mathbf{B}_n .

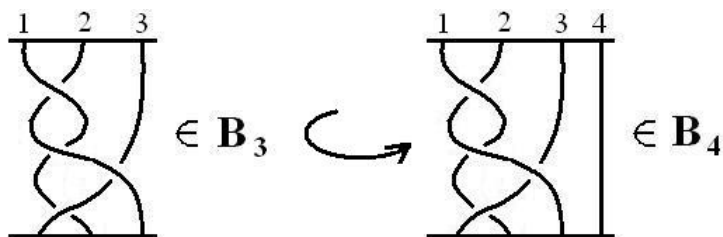
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1: Η \mathbf{B}_n έχει άπειρη τάξη. Για παράδειγμα η \mathbf{B}_2 :



Σχήμα 2.13: Η \mathbf{B}_2 έχει άπειρη τάξη

Εν συνεχεία, η \mathbf{B}_k εμφυτεύεται κατά φυσιολογικό τρόπο στην \mathbf{B}_{k+1} με την προσθήκη μιας κλωστής στο τέλος της \mathbf{B}_k . Για παράδειγμα:



Σχήμα 2.14: Εμφύτευση της \mathbf{B}_k στην \mathbf{B}_{k+1}

Άρα, εφόσον η \mathbf{B}_2 έχει άπειρη τάξη, κάθε \mathbf{B}_k θα έχει άπειρη τάξη.

2: Η \mathbf{B}_n δεν είναι αντιμεταθετική ομάδα, εφόσον δεν ισχύει εν γένει ότι $\alpha \cdot \beta \sim \beta \cdot \alpha$

Αποδεικνύεται (Chow) ότι η $RIII$ για κοτσίδες μαζί με τις ισοτοπίες επιπέδου του σχήματος 2.10 ορίζουν μια παράσταση της ομάδας \mathbf{B}_n . Δηλαδή:

$$\mathbf{B}_n = \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \left| \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, |i - j| > 1 \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \end{array} \right. \right\rangle.$$

Η πρώτη σχέση απεικονίζεται στο Σ.χ. 2.10.

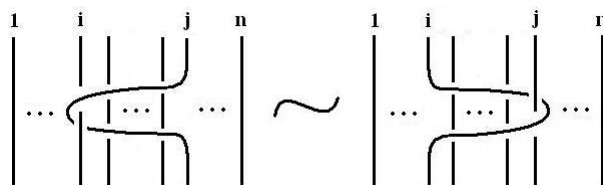
Κάθε κοτσίδα $\in \mathbf{B}_n$ επάγει μία μετάθεση $\in \mathbf{S}_n$ ακολουθώντας κάθε κλωστή. Επίσης, γνωρίζουμε ότι μία παράσταση για την \mathbf{S}_n είναι η ακόλουθη:

$$\mathbf{S}_n = \left\langle s_1, \dots, s_{n-1} \left| \begin{array}{l} s_i s_j = s_j s_i, |i - j| > 1 \\ s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1} \\ s_i^2 = 1, \forall i \end{array} \right. \right\rangle,$$

όπου $s_i = (i, i + 1)$ άρα υπάρχει φυσικός επιμορφισμός $\Pi : \mathbf{B}_n \rightarrow \mathbf{S}_n$ που ορίζεται πάνω στους γεννήτορες: $\sigma_i \mapsto s_i$. Ο πυρήνας του Π , που συμβολίζεται \mathbf{P}_n , είναι οι κοτσίδες που επάγουν την ταυτοτική μετάθεση. Αυτές λέγονται *γνήσιες κοτσίδες* (pure braids). Προφανώς η \mathbf{P}_n είναι υποομάδα της \mathbf{B}_n και μάλιστα κανονική. Από τα παραπάνω έχουμε ότι η \mathbf{S}_n είναι ομάδα πηλίκο: $\mathbf{S}_n = \mathbf{B}_n / \mathbf{P}_n$ και ορίζεται μια βραχεία, ακριβής ακολουθία (short exact sequence) ομάδα με ομομορφισμούς, όπου η εικόνα του ενός ταυτίζεται με τον πυρήνα του επόμενου:

$$1 \rightarrow \mathbf{P}_n \rightarrow \mathbf{B}_n \rightarrow \mathbf{S}_n \rightarrow 1$$

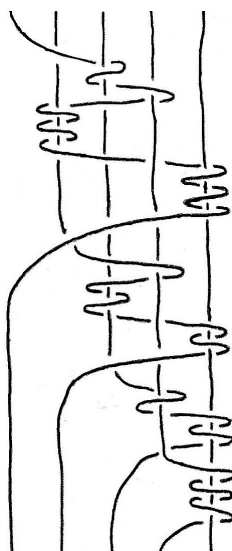
Η ιδέα της απόδειξης του Chow είναι να βρούμε μια παράσταση για την \mathbf{P}_n και να χρησιμοποιήσουμε τα παραπάνω για την εύρεση μιας παράστασης της \mathbf{B}_n . Αποδεικνύεται ότι η \mathbf{P}_n έχει τους γεννήτορες a_{ij} του Σχ. 2.15 οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις (P1)-(P4):



Σχήμα 2.15: Οι γεννήτορες a_{ij} της ομάδας \mathbf{P}_n

$$a_{ij}^{-1} a_{rs} a_{ij} = \begin{cases} a_{rs} & , \text{αν } i < j < r < s \text{ ή } r < i < j < s \text{ (P1)} \\ a_{is} a_{js} a_{is}^{-1} & , \text{αν } r = j \text{ (P2)} \\ a_{is} a_{js} a_{is} a_{js}^{-1} a_{is}^{-1} & , \text{αν } r = i < j < s \text{ (P3)} \\ a_{is} a_{js} a_{is}^{-1} a_{js}^{-1} a_{rs} a_{js} a_{is} a_{js}^{-1} a_{is}^{-1} & , \text{αν } i < r < j < s \text{ (P4)} \end{cases}$$

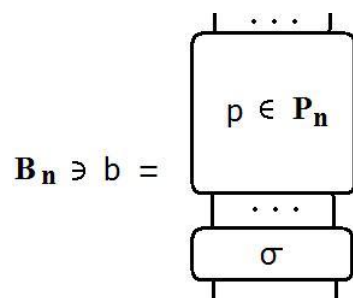
Από αυτές τις σχέσεις έπεται το “χτένισμα” μιας γνήσιας κοτσίδας (Artin's combing), όπως, για παράδειγμα, φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 2.16: Το “χτένισμα” του Artin

Οπότε, γνωρίζοντας ότι η \mathbf{S}_n δρα πάνω στην \mathbf{P}_n με μετάθεση των δεικτών και έχοντας δεδομένες τις παραστάσεις των \mathbf{S}_n και \mathbf{B}_n , βρίσκουμε τελικά την

παραπάνω παράσταση για την $\mathbf{B}_n = \mathbf{P}_n \times \mathbf{S}_n$. Η παραπάνω δομή της ομάδας \mathbf{B}_n σημαίνει ότι μια κοτσίδα $b \in \mathbf{B}_n$ μπορεί να ισοτοπηθεί στη μορφή:



Σχήμα 2.17:

όπου $\Pi(\sigma) \in \mathbf{S}_n$.

Κεφάλαιο 3

Το Θεώρημα Alexander

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε τις διαφορετικές αποδείξεις του Θεωρήματος Alexander. Κάθε απόδειξη προσφέρει και μια διαφορετική οπτική γωνία στο θέμα και οδηγεί σε διαφορετικά συναφή αποτελέσματα.

Θεώρημα Alexander. *Κάθε προσανατολισμένος κρίκος είναι ισοτοπικός με μια κλειστή κοτσίδα.*

3.1 Απόδειξη 1 κατά Alexander [2]

Θεωρούμε σύστημα S αποτελούμενο από απλές κλειστές καμπύλες στον \mathbb{R}^3 , δηλαδή έναν κρίκο στον \mathbb{R}^3 . Χάρην απλούστευσης θα θεωρήσουμε κάθε συνιστώσα του S κατά τμήματα γραμμική. Θα δείξουμε ότι το σύστημα S είναι ισοτοπικό με ένα πιο απλό σύστημα (κρίκο) S' με την εξής ιδιότητα : Για κάποιο σταθερό άξονα στο χώρο, καθώς ένα σημείο P διατρέχει μια συνιστώσα του S' κατά μια δεδομένη φορά, το επίπεδο που διέρχεται από τον άξονα και το σημείο P να στρέφεται πάντα γύρω από την ίδια φορά. (Δηλαδή το S' είναι μια κλειστή κοτσίδα).

Είναι βολικό να παραστήσουμε το S μέσω ενός διαγράμματός του S_π πάνω σε ένα επίπεδο. Το πρόβλημα τότε ανάγεται στο να μετασχηματίσουμε το S_π μέσω επιτρεπτών κινήσεων σε ένα διάγραμμα S'_π , το οποίο μπορεί να θεωρηθεί

ως προβολή του επιθυμητού συστήματος S' , που θα είναι ισοτοπικό με το S .

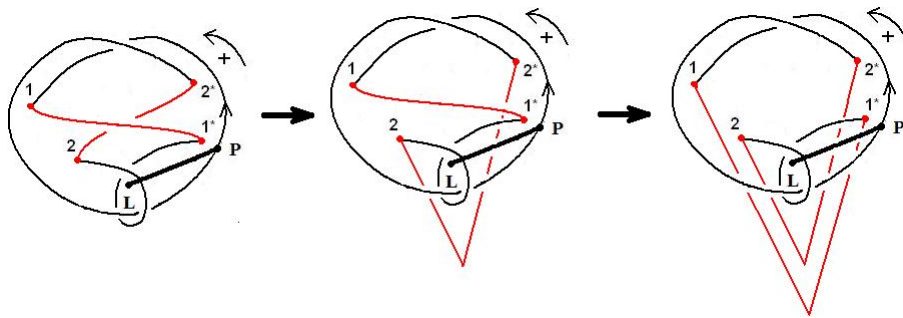
Ας θεωρήσουμε τώρα ένα σημείο L στο επίπεδο του S ώστε να μην είναι συγγραμμικό με κάποιο τμήμα του S_π . Το σημείο L θα είναι το σημείο τομής του άξονα της τελικής κοτσίδας με το επίπεδο του διαγράμματος S_π . Έστω ακόμα LP το ακτινικό διάνυσμα που συνδέει το L με ένα μεταβλητό σημείο P πάνω στο S_π . Έτσι, αν το σημείο P κινηθεί με συγκεκριμένη φορά πάνω σε μια συνιστώσα του S_π , αναμένεται να υπάρχουν τμήματα ως προς τα οποία το LP να στρέφεται με θετική φορά και άλλα τμήματα ως προς τα οποία το LP στρέφεται με αρνητική φορά γύρω από το σημείο L . Το S_π λοιπόν, πρέπει να μετασχηματιστεί (ισοτοπηθεί) κατάλληλα ώστε να απαλειφθούν τα τμήματα της δεύτερης κατηγορίας έτσι ώστε το LP να κινείται πάντα με την ίδια φορά γύρω από το L . Ας εξετάσουμε λοιπόν ένα τμήμα σ της δεύτερης κατηγορίας. Αν είναι απαραίτητο μπορούμε να υποδιαιρέσουμε το σ σε πεπερασμένο αριθμό υποτμημάτων σ_i ώστε κάθε σ_i να περιέχει μία μόνο διασταύρωση με το υπόλοιπο διάγραμμα S_π .

Έτσι, αν A και B είναι τα άκρα ενός υποτμήματος σ_i του σ μπορούμε να επιλέξουμε ένα σημείο C στο επίπεδο ώστε το τρίγωνο ABC να περιέχει το σημείο L , και στη συνέχεια αντικαθιστούμε το σ_i με τα τμήματα AC και CB . Πιο συγκεκριμένα, εάν υπάρχουν διασταυρώσεις στο σ_i με το υπόλοιπο διάγραμμα τέτοιες ώστε το σ_i να περνάει πάνω (ή κάτω) από κάποιο άλλο τμήμα του διαγράμματος, τα καινούρια τμήματα AC και CB θα πρέπει επίσης να περνούν πάνω (ή κάτω) από τα τμήματα του S_π με τα οποία τυχόν να διασταυρώνονται. Αν δεν υπάρχει διασταύρωση στο σ_i , τα AC και CB θα περνούν και τα δύο πάνω (ή και τα δύο κάτω) από το υπόλοιπο S_π . Ο μετασχηματισμός του S_π προφανώς ανταποκρίνεται σε μια κίνηση ισοτοπίας Δ . Επιπλέον, μέσω αυτού του μετασχηματισμού το τμήμα σ_i αντικαθίσταται από τα τμήματα AC και CB για τα οποία το διάνυσμα LP περιστρέφεται γύρω από το L με θετική φορά. Με την επανάληψη αυτής της διαδικασίας όλα τα σ_i θα απαλειφθούν και το τελικό αποτέλεσμα θα είναι ένα διάγραμμα S'_π το οποίο θα είναι η προβολή του επι-

θυμητού συστήματος S' . Ο άξονας περιστροφής του S' θα είναι η ευθεία που περνά από το σημείο L και το κέντρο προβολής (ή απλούστερα, μια ευθεία που περνάει από το L και είναι κάθετη στο επίπεδο του διαγράμματος).

□

Ένα παράδειγμα φαίνεται στο επόμενο σχήμα, όπου έχουμε έναν κόμβο με δύο θετικά τόξα και δύο αρνητικά.



Σχήμα 3.1: Ισοτοπούμε το τόξο 22^* περνώντας το κάτω από τα άλλα χωρίς να βρίσκουμε εμπόδιο, και ισοτοπούμε το 11^* .

3.2 Απόδειξη 2 κατά Birman [4]

Η απόδειξη της Birman ακολουθεί τη λογική της απόδειξης κατά Alexander.

Αν a_1, a_2, \dots, a_n είναι σημεία του \mathbb{R}^3 , τότε το $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ δηλώνει την κυρτή θήκη των σημείων a_1, a_2, \dots, a_n . Ο συμβολισμός \mathbf{ab} θα χρησιμοποιείται επίσης για το $[a, b]$. Ο συμβολισμός $[a_1, a_2, \dots, a_n]V$ σημαίνει $[a_1, a_2, \dots, a_n] \cap V$ και το $[a_1, a_2, \dots, a_n][b_1, b_2, \dots, b_n]$ σημαίνει $[a_1, a_2, \dots, a_n] \cap [b_1, b_2, \dots, b_n]$.

Ορισμός 10. Έστω V χρίκος με ένα τμήμα \mathbf{ac} και έστω \mathbf{b} ένα σημείο εκτός του V ή πάνω στο \mathbf{ac} . Υποθέτουμε ότι $[a, b, c]V = [a, c]$. Τότε ορίζουμε την τοπολογική κίνηση :

$$\mathcal{E}_{ac}^b V = V - \mathbf{ac} + \mathbf{ab} + \mathbf{bc}$$

και λέμε ότι η \mathcal{E}_{ac}^b είναι εφαρμόσιμη στον V . Η πράξη \mathcal{E}_{ac}^b και η αντίστροφη της καλούνται στοιχειώδεις πράξεις ή κινήσεις τύπου \mathcal{E} . Εάν το \mathbf{b} βρίσκεται εκτός του V η \mathcal{E}_{ac}^b είναι, από υπόθεση, μια κίνηση Δ . Ουσιαστικά, αφαιρούμε από το V το τμήμα \mathbf{ac} και του προσθέτουμε τις άλλες δύο πλευρές του τριγώνου $[a, b, c]$. Εάν το \mathbf{b} βρίσκεται πάνω στο \mathbf{ac} η πράξη \mathcal{E}_{ac}^b προσθέτει στον V μια νέα κορυφή \mathbf{b} , ενώ η πράξη $(\mathcal{E}_{ac}^b)^{-1}$ αφαιρεί την κορυφή \mathbf{b} . Ένα παράδειγμα τριών κινήσεων \mathcal{E} φαίνεται στο Σχ. 3.3.

Ας θεωρήσουμε μία αυθαίρετη αλλά σταθερή γραμμή l στον \mathbb{R}^3 η οποία δεν τέμνει τον κρίκο V . Η γραμμή αυτή θα αναφέρεται ως *άξονας*. Ο V θα λέγεται ότι βρίσκεται σε γενική θέση (general position) ως προς τον l αν κανένα από τα τμήματά του δεν είναι συνεπίπεδο με τον l .

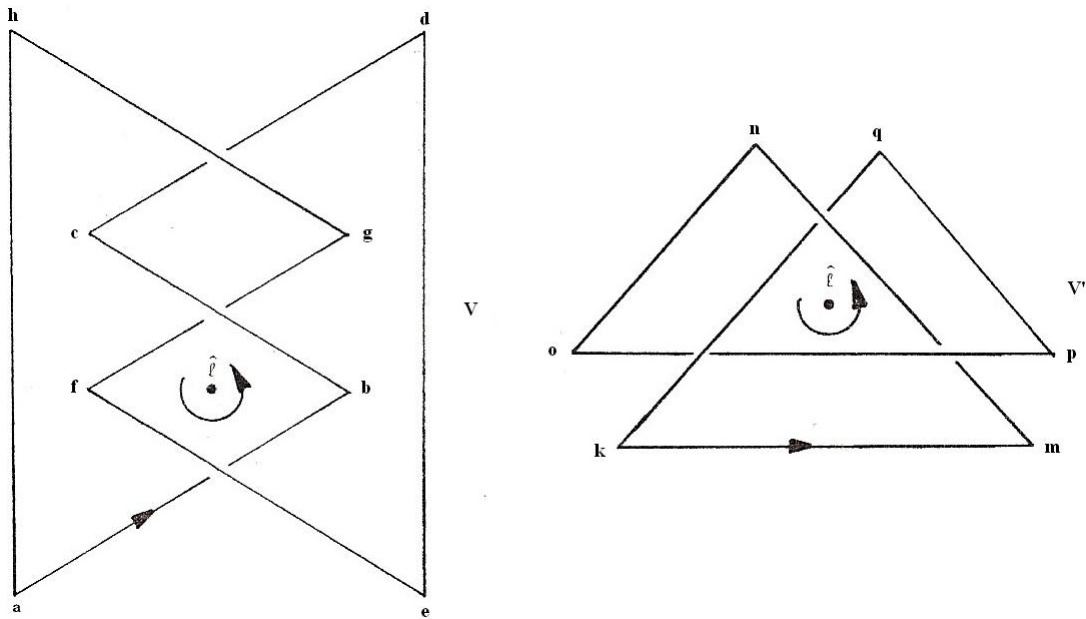
Προφανώς, κάθε κρίκος είναι ισοτοπικός με κάποιο κρίκο σε γενική θέση.

Πράγματι, αν ο κρίκος V περιέχει ένα τμήμα \mathbf{ac} συνεπίπεδο με τον άξονα l , διαλέγουμε ένα σημείο \mathbf{b} που δεν βρίσκεται στον V ούτε στο επίπεδο που ορίζουν τα l, \mathbf{ac} , αλλά αρκετά κοντά στο τμήμα \mathbf{ac} . Τότε το $\mathcal{E}_{ac}^b V$ έχει ένα λιγότερο τμήμα συνεπίπεδο με τον l . Συνεχίζοντας κατ'αυτό τον τρόπο μπορούμε να απαλείψουμε όλα τα τμήματα που είναι συνεπίπεδα με τον l .

Εν συνεχεία, θα ορίσουμε έναν ειδικό τύπο κρίκου που καλείται *κλειστή κοτσίδα*. Αρχικά καθορίζουμε ένα προσανατολισμό για τον κρίκο V , δηλαδή ένα προσανατολισμό για κάθε συνιστώσα του. Αν ο V είναι σε γενική θέση ως προς τον άξονα l , τότε ο V μπορεί να αναπαρασταθεί από την προβολή του στο επίπεδο \mathbb{R}^2 που είναι κάθετο στον l στο σημείο \hat{l} , την οποία επίσης ονομάζουμε V (βλέπε Σχ. 3.2). Τώρα ορίζουμε μια θετική φορά περιστροφής γύρω από τον l , που θα υποδηλώνεται στο διάγραμμα του κρίκου με ένα μικρό βέλος \odot στο σημείο \hat{l} . Έστω \mathbf{ab} ένα τμήμα του προσανατολισμένου V . Το \mathbf{ab} θα λέμε ότι είναι θετικό, $\mathbf{ab} > 0$, (αντίστοιχα, $\mathbf{ab} < 0$) αν ένα ακτινικό διάνυσμα από το σημείο \hat{l} στο \mathbf{ab} περιστρέφεται κατά θετική (αντίστοιχα αρνητική) φορά γύρω από το l καθώς κινούμαστε από το a στο b . Παρατηρήστε ότι από τη στιγμή που ο V βρίσκεται σε γενική θέση, κάθε τμήμα του είναι είτε θετικό

είτε αρνητικό. Ένας προσανατολισμένος κρίκος θα καλείται *κλειστή κοτσίδα* αν όλα τα τμήματά του είναι θετικά. Ύψος ενός κρίκου, $h(V)$, είναι ο αριθμός των αρνητικών τμημάτων του και μετρά το πόσο απέχει ο κρίκος από το να γίνει κλειστή κοτσίδα.

Ένα παράδειγμα των παραπάνω φαίνεται στο Σχήμα 3.2. Οι κρίκοι V και V' αναπαριστούν και οι δύο τον κόμβο trefoil. Οι πλευρές **cd**, **de**, **ef** και **fg** του V είναι αρνητικές, συνεπώς ο V έχει ύψος 4 και δεν είναι κλειστή κοτσίδα. Ο κρίκος V' έχει ύψος 0 και είναι κλειστή κοτσίδα. Ένα ακτινικό διάλυσμα από το σημείο \hat{l} στον V' δεν σταματά ποτέ να περιστρέφεται με θετική φορά γύρω από τον άξονα l με βάση τον προσανατολισμό του V' .



Σχήμα 3.2:

Για την απόδειξη του Θεωρήματος Alexander όλοι οι κρίκοι θα θεωρούνται προσανατολισμένοι.

Ορισμός 11. Ας θεωρήσουμε τα σημεία $a_0, \dots, a_m, b_0, \dots, b_m$ τέτοια ώστε

$\mathbf{a}_{i-1}\mathbf{b}_i > 0$, $\mathbf{b}_i\mathbf{a}_i > 0$, $\mathbf{a}_{i-1}\mathbf{a}_i < 0$ και $a_i \in [a_0, a_m]$, $i = 1, \dots, m$. Τότε αν

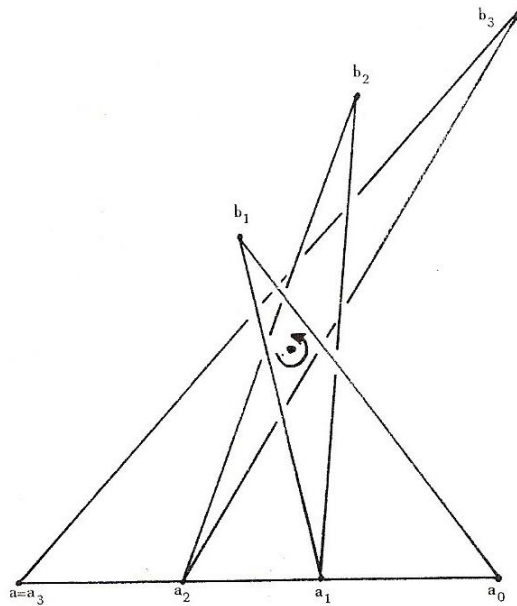
$$\sum_{i=1}^m [a_{i-1}, b_i, a_i]V = [a_0, a_m]$$

ορίζουμε:

$$\mathcal{S}_{a_0 \dots a_m}^{b_1 \dots b_m} V = \left(\prod_{i=m}^1 \mathcal{E}_{a_{i-1}, a_i}^{b_i} \right) \left(\prod_{i=m-1}^1 \mathcal{E}_{a_{i-1}, a_m}^{a_i} \right) V = V - \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_n + \sum_{i=1}^n (\mathbf{a}_{i-1} \mathbf{b}_i + \mathbf{b}_i \mathbf{a}_i)$$

Καλούμε το $\mathcal{S}_{a_0 \dots a_m}^{b_1 \dots b_m}$ κίνηση τύπου \mathcal{S} . Αν η $\mathcal{S}_{a_0 \dots a_m}^{b_1 \dots b_m}$ εφαρμοστεί στον V λέμε ότι το σύνολο των γραμμών $\mathbf{a}_{i-1}\mathbf{b}_i$ και $\mathbf{b}_i\mathbf{a}_i$ είναι ένα *sawtooth* (δόντι πριονιού) στην πλευρά $\mathbf{a}_0\mathbf{a}_n$. Το αποτέλεσμα της εφαρμογής μιας πράξης τύπου \mathcal{S} είναι να αντικαταστήσει ένα αρνητικό τμήμα με μια σειρά από θετικά υποτμήματα (subedges).

Στο παρακάτω Σχήμα 3.3 παρουσιάζεται η περίπτωση ενός sawtooth για $m = 3$ με εφαρμογή της πράξης $\mathcal{S}_{a_0 a_1 a_2 a_3}^{b_1 b_2 b_3}$ στον V . Το αποτέλεσμα είναι να αντικατασταθεί το αρνητικό τμήμα $\mathbf{a}_0\mathbf{a}$ ενός κρίκου από μια σειρά θετικών $\mathbf{a}_0\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_1\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_1\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_2\mathbf{b}_3 + \mathbf{b}_3\mathbf{a}$. Αυτό επιτυγχάνεται εφαρμόζοντας αρχικά τις πράξεις $\mathcal{E}_{a_1, a}^{a_2}$, $\mathcal{E}_{a_0, a}^{a_1}$ στον V (από δεξιά προς τ'αριστερά) προκειμένου να υποδιαιρέσουμε το αρνητικό τμήμα $\mathbf{a}_0\mathbf{a}$ σε κατάλληλο αριθμό υποτμημάτων. Έπειτα, εφαρμόζοντας τις κινήσεις $\mathcal{E}_{a_2, a_3}^{b_3}$, $\mathcal{E}_{a_1, a_2}^{b_2}$, $\mathcal{E}_{a_0, a_1}^{b_1}$ αντικαθιστούμε τα καινούρια αρνητικά τμήματα $\mathbf{a}_0\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3$ με κατάλληλα θετικά τμήματα. Παρατηρήστε ότι αν ο κρίκος V είχε ύψος h , ο κρίκος $\mathcal{S}_{a_0 \dots a_m}^{b_1 \dots b_m} V$ θα έχει ύψος $h - 1$, ανεξάρτητα από τον αριθμό m .



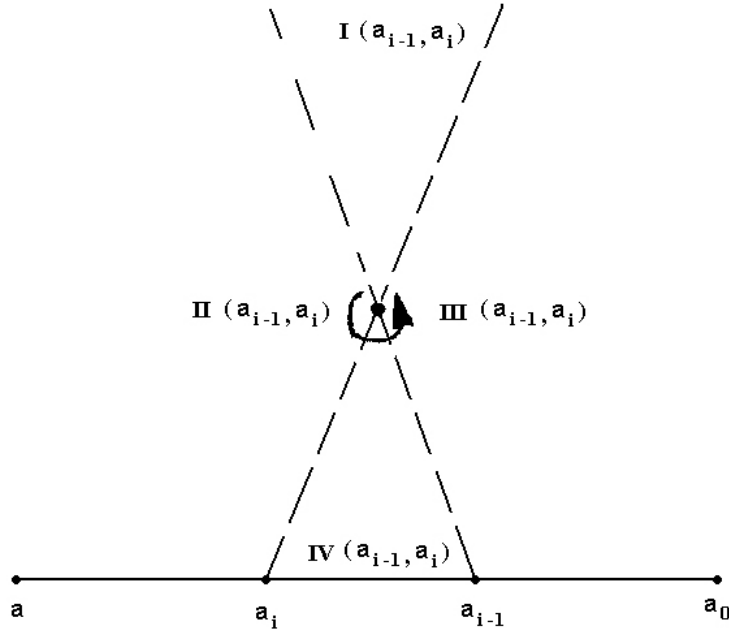
Σχήμα 3.3:

Λήμμα 1. Έστω V ένας κρίκος σε γενική θέση και $[a_0, a]$ μια αρνητική πλευρά του. Τότε μπορεί να ανεγερθεί ένα sawtooth πάνω στην $[a_0, a]$.

Προτού αποδείξουμε το λήμμα ας δούμε γιατί συνεπάγεται την αλήθεια του Θεωρήματος 1. Έστω V προσανατολισμένος κρίκος με $h(V) = h$. Αν $h = 0$, τότε ο V είναι ήδη κλειστή κοτσίδα. Αν $h > 0$, διαλέγουμε μία αρνητική πλευρά $\mathbf{a_0a}$ του V . Από το Λήμμα 1 μπορούμε να βρούμε σημεία $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m = a$ και b_1, b_2, \dots, b_m τέτοια ώστε η $\mathcal{S}_{a_0 \dots a_m}^{b_1 \dots b_m}$ να είναι εφαρμόσιμη στον V . Έτσι ο $\mathcal{S}_{a_0 \dots a_m}^{b_1 \dots b_m} V$ θα περιέχει μια λιγότερη αρνητική πλευρά και θα είναι ισοτοπικός με τον V . Ακολουθεί η απόδειξη του Λήμματος 1 με επαγωγή στο h .

Απόδειξη. Θέλουμε να δείξουμε ότι μπορούμε να ανεγείρουμε ένα sawtooth στο $\mathbf{a_0a}$. Αν a_{i-1}, a_i είναι σημεία του $\mathbf{a_0a}$ τέτοια ώστε $a_{i-1}, a_i < 0$, τότε τα επίπεδα που διέρχονται από τον άξονα l και τα σημεία a_{i-1} και a_i αντίστοιχα χωρίζουν τον τρισδιάστατο χώρο σε τέσσερις περιοχές, που στο Σχήμα 3.4 ονομάζονται $I(a_{i-1}, a_i)$, $II(a_{i-1}, a_i)$, $III(a_{i-1}, a_i)$ και $IV(a_{i-1}, a_i)$. Παρατηρή-

στε ότι για κάθε σημείο b_i που βρίσκεται στην περιοχή $I(a_{i-1}, a_i)$ έχουμε $\mathbf{a}_{i-1}\mathbf{b}_i > 0, \mathbf{b}_i\mathbf{a}_i > 0$.



Σχήμα 3.4: Εντοπίζοντας τη “μύτη” του sawtooth

Αρχικά υποθέτουμε πως η προβολή του τμήματος $\mathbf{a}_0\mathbf{a}$ στην προβολή του V δεν περιέχει διπλά σημεία, έτσι κανένα σημείο του V δεν βρίσκεται πάνω (ή κάτω) από το $\mathbf{a}_0\mathbf{a}$. Διαλέγοντας σημείο $b \in I(a_0, a)$ αρκετά μακριά πάνω (ή κάτω) από το \mathbb{R}^2 μπορούμε να κάνουμε τη γωνία μεταξύ του επιπέδου a_0ba και του \mathbb{R}^2 αρκετά κοντά στο $\pi/2$. Συνεπώς μπορούμε να εφαρμόσουμε την $S_{a_0a}^{b_1}$ στον V για όλα τα σημεία b_1 που βρίσκονται πάνω (αντίστοιχα κάτω) από το b .

Στη γενική περίπτωση, η προβολή του τμήματος $\mathbf{a}_0\mathbf{a}$ θα περιέχει ένα πεπερασμένο αριθμό διπλών σημείων, έστω p_1, \dots, p_r . Τότε μπορεί να μην είναι δυνατόν να επιλεγεί ένα μοναδικό σημείο b_1 ώστε η κίνηση $S_{a_0a}^{b_1}$ να εφαρμόζεται στον V και η κατασκευή μας να είναι πιο πολύπλοκη. Η ιδέα είναι να τοποθετήσουμε πρώτα μωτερά “δόντια” γύρω από κάθε διπλό σημείο και να ανάγουμε την κατασκευή στην προηγούμενη περίπτωση.

Θεωρούμε τα σημεία p_1, \dots, p_r ένα κάθε φορά. Έστω P_1 το επίπεδο που περιέχει τον άξονα l και περνάει από το p_1 . Το P_1 θα τέμνεται από την προβολή του V μόνο κατά μήκος της ευθείας $p_1\hat{l}$. Άρα είναι πάντα δυνατόν να συνδέσουμε τα σημεία p_1 και \hat{l} με μια γραμμή πάνω στο P_1 η οποία θα αποφεύγει τον V . Δίνοντας τώρα πάχος σε αυτή τη γραμμή μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα τρίγωνο με βάση $[a_1, a_2] \subset [a_0, a]$ και κορυφή $b_2 \in I(a_1, a_2)$ ώστε το τρίγωνο $[a_1, b_2, a_2]V = [a_1, a_2]$. Παρατηρούμε ότι η $\mathcal{E}_{a_1 a_2}^{b_2}$ αντικαθιστά την $[a_1, a_2]$ με δύο θετικές. Η πλευρά $\mathbf{a_0 a_1}$ δεν περιέχει διασταυρώσεις. Έτσι εφαρμόζουμε πάνω της την προηγούμενη περίπτωση. Τέλος, επαναλαμβάνουμε αυτή τη διαδικασία για τα σημεία p_2, \dots, p_r βρίσκοντας σημεία $a_{2i-1}, a_{2i}, b_{2i-1}, b_{2i}$ για κάθε $i = 2, \dots, r$ και τελικά ένα σημείο b_{2r+1} . Τότε η κίνηση $\mathcal{S}_{a_0 \dots a_{2r+1}}^{b_1 \dots b_{2r+1}}$ μπορεί να εφαρμοστεί στον V .

□

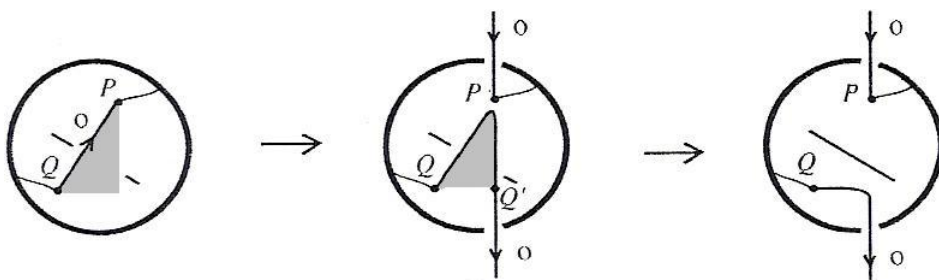
3.3 Απόδειξη 3 κατά Λαμπροπούλου [6, 7]

Εδώ ορίζεται άξονας οριζόντιος και παράλληλος πίσω από το επίπεδο του διαγράμματος. Άρα, δεδομένου ενός διαγράμματος (προσανατολισμένου) κόμβου το χωρίζουμε σε τόξα με φορά προς τα πάνω ή προς τα κάτω σημαδεύοντας τα τοπικά μέγιστα και ελάχιστα. Αυτά με φορά προς τα κάτω τα κρατάμε. Αυτά με την αντίθετη φορά τα ονομάζουμε up-arcs και τα απαλείφουμε ένα-ένα ως εξής:

Κάθε up-arc θα συναντάει μια διαδοχή από διασταυρώσεις, πάνω ή κάτω ή θα είναι ελεύθερο (free), δηλαδή δεν θα έχει διασταυρώσεις. Αν συναντάει διαφορετικές διασταυρώσεις το υποδιαιρούμε περαιτέρω με σημεία έτσι ώστε το κάθε υποτόξο να έχει μόνο ένα είδος διασταυρώσεων. Σε ένα up-arc θα δίνουμε τη σήμανση “o” (over) ενώ σε ένα σε ένα τόξο (ή υποτόξο) θα δίνουμε την σημαση “u” (under) αν περνάει κάτω από όλες τις διασταυρώσεις του.

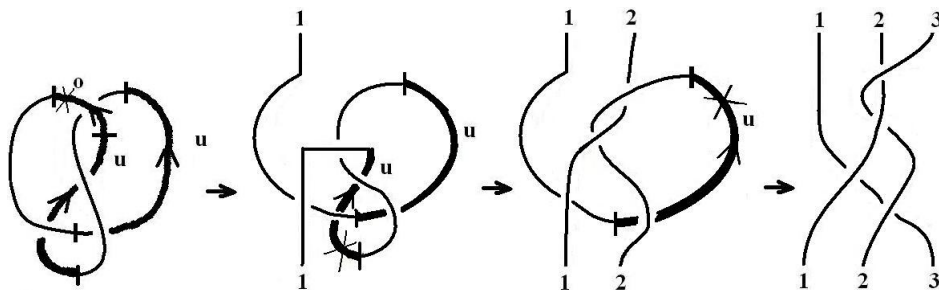
Απαλείφουμε ένα-ένα τα υποτόξα ως εξής:

Το κόβουμε σε ένα σημείο του (π.χ. το άνω σημείο) και τραβάμε τα δύο ελεύθερα άκρα, το άνω προς τα πάνω και το κάτω προς τα κάτω, αλλά και τα δύο πάνω από το υπόλοιπο διάγραμμα αν η σήμανση του υποτόξου είναι “ο” ή κάτω από το υπόλοιπο διάγραμμα αν η σήμανση είναι “u”. Αν το υποτόξο είναι ελεύθερο, επιλέγουμε είτε “ο” είτε “u” και εφαρμόζουμε τα προηγούμενα.



Σχήμα 3.5: Απαλειφή ενός up-arc

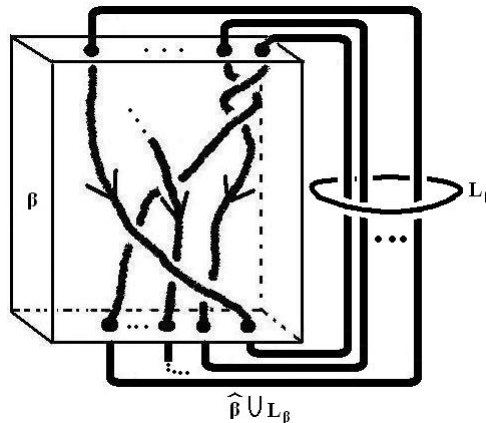
Αν κατά τη διάρκεια της διαδικασίας braiding συμβεί ένα “ο” να βρεθεί κάτω από μία καινούρια κλωστή, το υποδιαιρούμε περισσότερο. Όμως, με μια κατάλληλη επιλογή σημείου τομής, αυτή η κατάσταση μπορεί να αποφευχθεί.



Σχήμα 3.6: Παράδειγμα braiding

3.4 Απόδειξη 4 κατά Morton [10]

Ορισμός 12. Έστω β κοτσίδα. Θα αναφέρομαστε στον κρίκο $\hat{\beta} \cup L_\beta$ ως το πλήρες κλείσιμο της κοτσίδας β , όπου $\hat{\beta}$ το κλείσιμο της κοτσίδας β και L_β μια απλή κλειστή καμπύλη στο χώρο $\mathbb{S}^3 \setminus \hat{\beta}$, τέτοια ώστε στο χώρο $\mathbb{R}^3 \setminus \hat{\beta}$ να αποτελεί τον άξονα της $\hat{\beta}$. Βλέπε Σχήμα 3.7 για ένα συγκεκριμένο παράδειγμα.



Σχήμα 3.7: Πλήρες κλείσιμο κοτσίδας

Ορισμός 13. Έστω $K \cup L$ προσανατολισμένος κρίκος με L τετριμμένο. Θα ονομάζω το $K \cup L$ *braided* αν υπάρχει κοτσίδα β τέτοια ώστε το $K \cup L$ να είναι ισοτοπικό με το $\hat{\beta} \cup L_\beta$, όπου η ισοτοπία θα αντιστοιχεί το L στο L_β .

Ορισμός 14. *Threading* καλείται η διαδικασία κατά την οποία για ένα διάγραμμα προσανατολισμένου κρίκου K βρίσκουμε μια απλή κλειστή καμπύλη L στο $\mathbb{S}^3 \setminus \hat{\beta}$, έτσι ώστε ο κρίκος $K \cup L$ να είναι *braided*.

Στο [10] ο Morton αποδεικνύει ότι για κάθε διάγραμμα προσανατολισμένου κρίκου K υπάρχει *threading*. Αυτό, βάσει του ορισμού 12, σημαίνει ότι το K μπορεί να ισοτοπηθεί σε μια κλειστή κοτσίδα $\hat{\beta}$, το οποίο αποδεικνύει το Θεώρημα Alexander. Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε την απόδειξη του Morton.

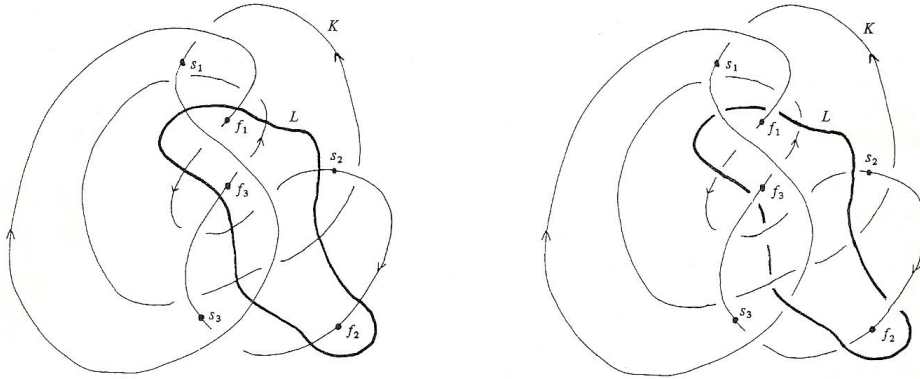
Έστω τώρα ένα προσανατολισμένο διάγραμμα K . *Overpass* καλείται ένα τόξο του K , το οποίο δεν περνάει κάτω από άλλα τόξα του διαγράμματος. Αντίστοιχα, *underpass* καλείται ένα τόξο που δεν περνάει πάνω από άλλα. Μια επιλογή από *overpasses* (S, F) για το διάγραμμα K θα αποτελείται από τα σύνολα S, F , τα οποία είναι δύο πεπερασμένα υποσύνολα σημείων του K .

$$S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}, F = \{f_1, f_2, \dots, f_k\}$$

Αυτά είναι τα σημεία αρχής και τέλους των *overpasses* που εναλλάσσονται στο K και το υποδιαίρουν σε τόξα της μορφής $[s, f]$, που είναι *overpasses*, και σε τόξα της μορφής $[f, s]$, που είναι *underpasses*.

Παρατηρούμε ότι μπορούμε να ισοτοπήσουμε το K χωρίς να αλλάξουμε την προβολή του στο επίπεδο του P , έτσι ώστε τα *overpasses* και τα *underpasses* να βρίσκονται σε δύο επίπεδα παράλληλα στο P (πάνω και κάτω αντίστοιχα) και να συνδέονται μεταξύ τους με κατακόρυφα τόξα, τα οποία τέμνουν το επίπεδο P ακριβώς στα σημεία των S και F , και έχουν φορά προς τα πάνω ή προς τα κάτω σεβόμενα τον προσανατολισμό του K .

Έστω, τώρα, διάγραμμα K με δεδομένα *overpasses* (S, F) και έστω μια κλειστή καμπύλη L στο P η οποία διαχωρίζει τα σημεία S από τα F . Βλέπε, για παράδειγμα, Σχ. 3.8. Με αυτά τα δεδομένα ένα *threading* για το K κατασκευάζεται ως εξής: Χωρίς βλάβη της γενικότητας η καμπύλη L διασταυρώνεται εγκάρσια με το K . Στη συνέχεια, ακολουθώντας τον προσανατολισμό του K αλλάζουμε τις περιοχές στα σημεία διασταύρωσης του K με την L έτσι ώστε το K να περνάει πάνω από την L όταν ερχόμαστε στη διασταύρωση από την περιοχή που περιέχει τα σημεία S , και κάτω από την L όταν ερχόμαστε από την περιοχή που έχει τα F . Το τελικό αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας είναι ένας κρίκος *braided* $K \cup L$, το οποίο είναι *threading* για το K . Βλέπε το ακόλουθο σχήμα για ένα παράδειγμα.



Σχήμα 3.8: Threading

Ο κρίκος $K \cup L$ που προκύπτει από την παραπάνω διαδικασία είναι ένα treading για το K και άρα είναι κρίκος braided.

Θεώρημα 5. Από οποιοδήποτε *threading* σε ένα διάγραμμα K προκύπτει ένας κρίκος *braided*.

Απόδειξη. Διαλέγουμε *overpasses* (S, F) για το διάγραμμα K και μία κλειστή καμπύλη L στο επίπεδο P τέτοια ώστε να χωρίζει τα σημεία S από τα F . Στη συνέχεια ισιώνουμε την καμπύλη L με μια ισοτοπία του P , η οποία μεταφέρει μαζί το K , αφήνοντας πάντα από τη μία της πλευρά τα σημεία του S και από την άλλη τα σημεία του F . Βλέπε, για παράδειγμα, Σχ. 3.9 (α). Ταυτόχρονα, το K ισοτοπείται ώστε τα *overpasses* και *underpasses* να βρεθούν σε επίπεδα παράλληλα του P , όπως περιγράψαμε παραπάνω. Βλέπε Σχ. 3.9 (γ).

Αλλάζοντας την οπτική μας γωνία μπορούμε να φανταστούμε το P σαν το επίπεδο xz και την L σαν τον άξονα z (με ένα σημείο στο άπειρο). Χρησιμοποιώντας πολικές συνταταγμένες ως προς την L (ως άξονα), το επίπεδο P χωρίζεται σε δύο ημιεπίπεδα που το ένα δίνεται για γωνία $\theta = 0$ και περιέχει τα σημεία του F και το άλλο για $\theta = \pi$ και περιέχει τα σημεία του S .

Στη συνέχεια, προβάλλουμε τα *overpasses* του K από το άνω παράλληλο επίπεδο του P στα ημιεπίπεδα $\theta = -\epsilon$ και $\theta = \pi + \epsilon$, και ομοίως τα *underpasses*

από το κάτω παράλληλο επίπεδο του P στα ημιεπίπεδα $\theta = \epsilon$ και $\theta = \pi - \epsilon$, για κατάλληλα μικρό $\epsilon > 0$. Τα τόξα των overpasses και underpasses συνδέονται μεταξύ τους με κατακόρυφα τόξα που διέρχονται ακριβώς από τα σημεία των S και F πάνω στο P . Σαν αποτέλεσμα έχουμε ένα διάγραμμα ισοτοπικό με το K , το οποίο έχει την ίδια προβολή με το K στο επίπεδο P .

Εκτός από τα σημεία όπου το K τέμνει τον άξονα L η πολική συντεταγμένη αυξάνει μονότονα, εφόσον είναι σταθερή στα ημιεπίπεδα και αύξουσα στα κατακόρυφα τόξα.

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.9 στα (β) και (δ), στα σημεία που το K τέμνει τον άξονα L κάνουμε τα εξής: Θεωρούμε έναν κύλινδρο με άξονα L και μικρή ακτίνα $d > 0$ και ισοτοπούμε το K έτσι ώστε κάθε τμήμα του που απέχει $r < d$ από τον L να περνάει πάνω ή κάτω από τον L σε απόσταση d με τρόπο ώστε η πολική συντεταγμένη να αυξάνει. Τα τμήματα που τέμνουν τον L και περνάνε από την πλευρά των S στην πλευρά των F , θα περνάνε πάνω από τον L (δηλαδή από τη γωνία $\theta = \frac{\pi}{2}$) ενώ τα τμήματα που περνάνε από τα F στα S θα περνάνε κάτω από τον L .

Συνεπώς το K έχει ισοτοπηθεί έτσι ώστε, με τον L ως άξονα, η καμπύλη K να αυξάνει μονότονα ως προς την πολική συντεταγμένη. Αυτό μας εξασφαλίζει ότι το $K \cup L$ είναι braided.

□

3.5 Απόδειξη 5 κατά Yamada [15]

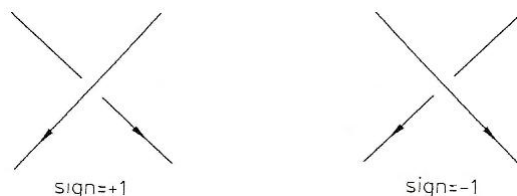
Ο Yamada κάνει μια εναλλακτική απόδειξη του Θεωρήματος Alexander κρατώντας σταθερό τον αριθμό συστροφής του προσανατολισμένου διαγράμματος (που είναι το άθροισμα των προσήμων των διασταυρώσεων) και τον αριθμό των κύκλων Seifert, του διαγράμματος (βλ. ορισμό παρακάτω) κατά τη διαδικασία μετατροπής ενός προσανατολισμένου κρίκου σε κλειστή κοτσίδα.

3.5.1 Ορισμοί

Έστω D το διάγραμμα ενός προσανατολισμένου κρίκου D . Ορίζουμε τον αριθμό συστροφής (*writhe*) του D ως:

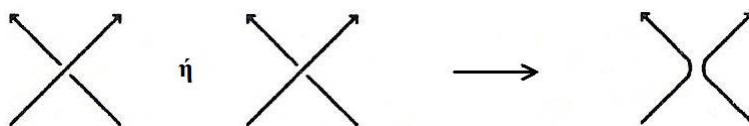
$$wr(D) = \sum_c sign(c)$$

όπου το c διατρέχει όλες τις διασταυρώσεις του D και το πρόσημο μιας διασταύρωσης, $sign(c)$, ορίζεται όπως στο παρακάτω σχήμα:



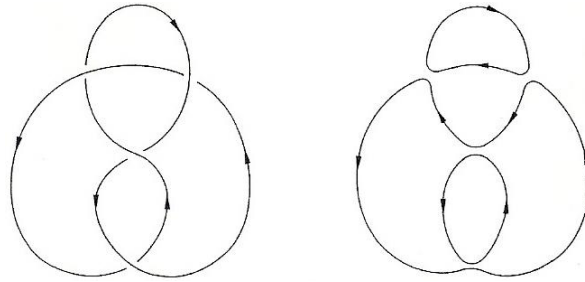
Σχήμα 3.10: Σύμβαση προσήμων διασταυρώσεων

Στη συνέχεια, εξομαλύνουμε κάθε διασταύρωση του D με τρόπο συμβατό με τον προσανατολισμό του, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



Σχήμα 3.11: Εξομάλυνση διασταυρώσεων

Σαν αποτέλεσμα παίρνουμε έναν αριθμό από κλειστές καμπύλες στο επίπεδο, τις οποίες ονομάζουμε κύκλους *Seifert*. Ο αριθμός των κύκλων Seifert συμβολίζεται με $s(D)$. Το διάγραμμα που προκύπτει μετά την εξομάλυνση το ονομάζουμε *εικόνα Seifert* του D . Για παράδειγμα, στο Σχήμα 3.12 δείχνονται οι κύκλοι Seifert για τον κόμβο figure8.



Σχήμα 3.12: Εικόνα Seifert του figure8

Για έναν κρίκο L , ο αριθμός *Seifert* $s(L)$ ορίζεται ως το ελάχιστο $s(D)$, όπου D διατρέχει όλα τα διαγράμματα του L .

Έστω τώρα μια κοτσίδα b και έστω \hat{b} το διάγραμμα του κλεισίματος της b . Το εκθετικό άθροισμα (*exponent sum*) $e(b)$ της b ορίζεται ως $e(b) = wr(\hat{b})$, ενώ το $n(b)$ συμβολίζει τον αριθμό των κλωστών της b . Σημειώνουμε ότι το διάγραμμα \hat{b} έχει $n(b)$ κύκλους Seifert. Για έναν κρίκο L ο δείκτης κοτσίδας (*braid index*) $b(L)$ του L ορίζεται ως το ελάχιστο $n(b)$ όπου το b διατρέχει όλες τις δυνατές αναπαραστάσεις του L από κοτσίδες. Προφανώς, οι αριθμοί $s(L)$ και $b(L)$ είναι αναλλοίωτες ιστοπίες για τον κρίκο L .

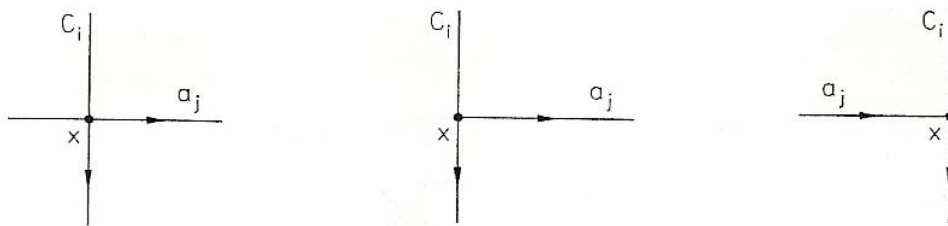
Η απόδειξη του Yamada συνεπάγεται επιπλέον πως $s(L) \geq b(L)$, για κάθε προσανατολισμένο κρίκο L . Είναι προφανές πως $s(L) \leq b(L)$ (εφόσον μια κοτσίδα με n κλωστές θα μας δώσει n κύκλους *Seifert*). Έτσι παίρνουμε το ακόλουθο θεώρημα, το οποίο παραθέτουμε χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 6 (Yamada). *Για κάθε προσανατολισμένο κρίκο L , $s(L) = b(L)$.*

Ας προχωρήσουμε τώρα στην απόδειξη του Θεωρήματος Alexander κατά Yamada.

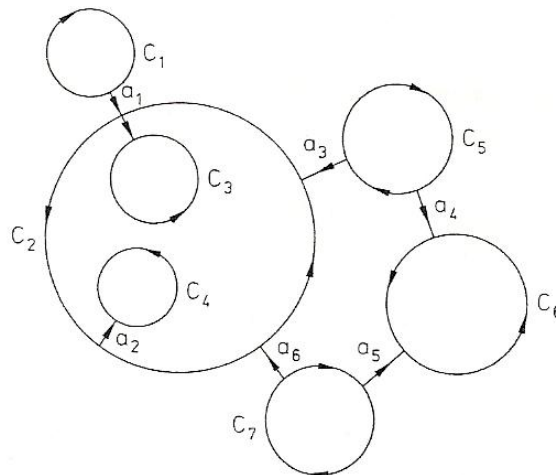
Έστω C και C' προσανατολισμένοι κύκλοι πάνω στην S^2 . Λέμε ότι οι C και C' είναι συμβατοί, συμβολικά $[C]=[C']$ (αντίστοιχα μη συμβατοί, συμβολικά $[C]=-[C']$) αν και μόνο αν οι C και C' , ως σύνορα ενός προσανατολισμένου κυκλικού δακτυλίου A , έχουν τον ίδιο προσανατολισμό (αντίστοιχα αντίθετο προσανατολισμό).

Έστω C_1, \dots, C_n ξένοι μεταξύ τους προσανατολισμένοι κύκλοι στη σφαίρα S^2 . Στον κάθε κύκλο αντιστοιχίζεται ένας θετικός ακέραιος αριθμός που συμβολίζεται $w(C_i)$ και καλείται βάρος του C_i . Έστω a_1, \dots, a_r ξένα μεταξύ τους προσανατολισμένα απλά τόξα στην S^2 τέτοια ώστε για κάθε a_i να ισχύει ότι αν $x \in (C_i \cap a_j) \cup \partial a_j$, τότε μια περιοχή του x είναι διαφορομορφική με μία από τις περιπτώσεις του παρακάτω σχήματος:



Σχήμα 3.13:

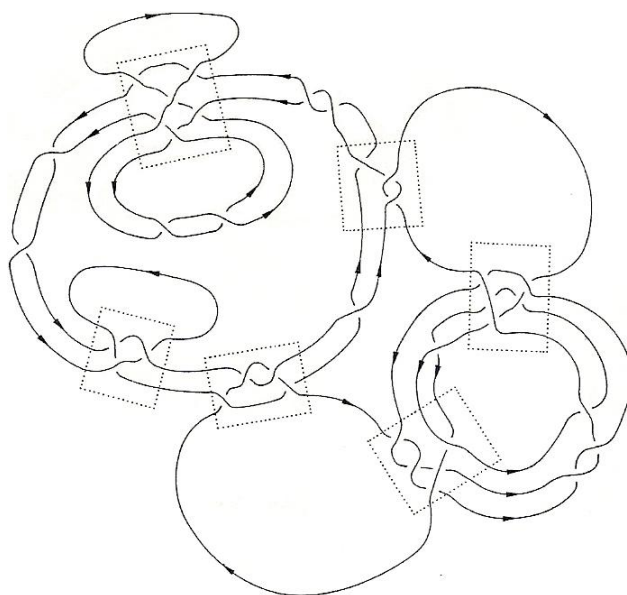
Τότε λέμε πως το $\{C_1, \dots, C_n; a_1, \dots, a_r\}$ είναι ένα σύστημα weighted κύκλων Seifert. Ένα παράδειγμα εικονίζεται στο Σχήμα 3.14.



$$w(C_1)=1, w(C_2)=2, w(C_3)=2, w(C_4)=1, w(C_5)=1, w(C_6)=3, w(C_7)=1$$

Σχήμα 3.14:

Έστω \mathcal{S} το σύνολο όλων των weighted κύκλων Seifert και έστω $S = \{C_1, \dots, C_n; a_1, \dots, a_r\}$ ένα στοιχείο του \mathcal{S} . Τότε από το S μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα διάγραμμα κόμβου (στην πραγματικότητα, άπειρα) με τον εξής τρόπο: Αρχικά αντικαθιστούμε κάθε C_i με μια αυθαίρετη κλειστή κοτσίδα με $w(C_i)$ κλωστές. Έπειτα αντικαθιστούμε κάθε a_i με μια αυθαίρετη κοτσίδα με $[w(C_{i_1}) + \dots + w(C_{i_m})]$ κλωστές, ώστε τα άκρα των κλωστών αυτών να ενώνονται με κάθε κλωστή από τις C_{i_k} κοτσίδες, όπου C_{i_1}, \dots, C_{i_m} είναι οι κύκλοι του S που τέμνονται με το a_j . Για παράδειγμα, στο Σχήμα 3.15 εικονίζεται ένα διάγραμμα που κατασκευάσαμε από το σύστημα του Σχήματος 3.14. Αν ένα διάγραμμα κόμβου D προκύπτει από ένα σύστημα S μέσω της μεθόδου που περιγράψαμε, θα λέμε ότι το D παράγεται από το S .



Σχήμα 3.15:

Ως $\mathcal{D}(S)$ ορίζεται το σύνολο όλων των διαγραμμάτων κρίκων που παράγονται από το S . Για κάθε ακέραιο t , ως $\mathcal{D}(S, t) = \{D \in \mathcal{D}(S) \mid wr(D) = t\}$. Ως $\mathcal{L}(S, t)$ (αντίστοιχα $\mathcal{L}(S)$) ορίζεται το σύνολο όλων των προσανατολισμένων κρίκων που αναπαριστώνται από ένα διάγραμμα στο $\mathcal{D}(S, t)$ (αντίστοιχα $\mathcal{D}(S)$).

Εύκολα αποδεικνύεται πως για κάθε προσανατολισμένο διάγραμμα κρίκου D , υπάρχει ένα σύστημα $S \in \mathcal{S}$ τέτοιο ώστε $D \in \mathcal{D}(S)$. Πράγματι, διαλέγουμε σύστημα $S = \{C_1, \dots, C_n; a_1, \dots, a_r\}$, όπου C_1, \dots, C_n είναι οι κύκλοι Seifert του D , τα τόξα a_1, \dots, a_r τοποθετούνται σε κάθε διασταύρωση του διαγράμματος και $w(C_i) = 1$ για κάθε i . Προφανώς το σύστημα S ανακατασκευάζει το αρχικό διάγραμμα D .

Έστω τώρα $S = \{C_1, \dots, C_n; a_1, \dots, a_r\} \in \mathcal{S}$. Ορίζουμε το *συνολικό βάρος* (*total weight*) $w(S)$ του S ως $w(S) = w(C_1) + \dots + w(C_n)$

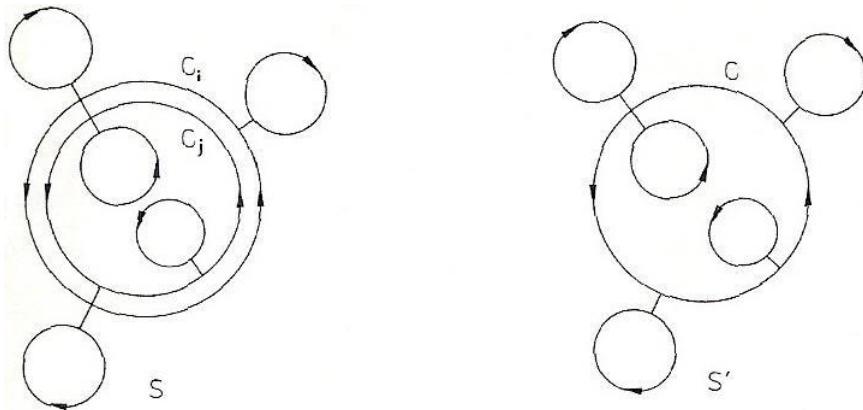
Για κάθε θετικό ακέραιο p , έστω $\mathcal{S}_p = \{S \in \mathcal{S} \mid w(S) = p\}$ και έστω $T_p = \{C; \} \in \mathcal{S}_p$, ένα σύστημα με έναν μονό κύκλο βάρους p . Τότε, το $\mathcal{D}(T_p)$ είναι το σύνολο των διαγραμμάτων των κλειστών κοτσίδων με p κλωστές.

Καλούμε το T_p τετριμμένο σύστημα με συνολικό βάρος p .

3.5.2 Πράξεις Ομαδοποίησης

Θα ορίσουμε δύο πράξεις στο σύνολο \mathcal{S} που καλούνται *πράξεις ομαδοποίησης* (*bunching operations*) τύπου I και τύπου II ως εξής:

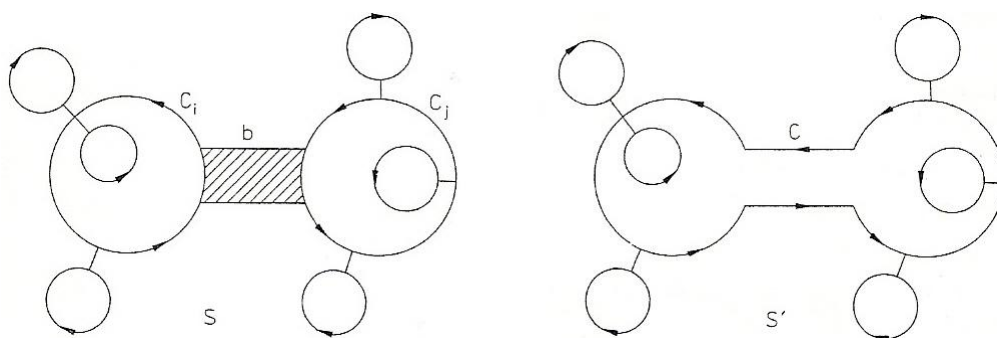
Τύπου I: Έστω $S = \{C_1, \dots, C_n; a_1, \dots, a_r\}$ ένα στοιχείο του \mathcal{S} . Αν υπάρχουν δύο συμβατοί κύκλοι C_i και C_j τέτοια ώστε $\text{Int}(A) \cap (\{C_1 \cup \dots \cup C_n\}) = \emptyset$ όπου A είναι ο κυκλικός δακτύλιος με σύνορο τους C_i και C_j στην \mathbb{S}^2 , τότε ορίζουμε ένα νέο σύστημα S' ως ακολούθως: Έστω C ένας αυθαίρετος κύκλος και $f : A \rightarrow C$ μία συνεχής απεικόνιση τέτοια ώστε οι περιορισμοί $f|_{C_i}$ και $f|_{C_j}$ να είναι ομοιομορφισμοί. Αν $A \cap a_k \neq \emptyset$, τότε $f(C_i \cap a_k) \neq f(C_j \cap a_k)$. Έτσι παίρνουμε το σύστημα $S' = S \cup C \setminus \{C_i \cup C_j\}$. (Ουσιαστικά η f είναι μία ακτινωτή ταύτιση όλων των σημείων του A που έχουν την ίδια εικόνα). Λέμε ότι το S' προέρχεται από το S μέσω της εφαρμογής της πράξης ομαδοποίησης τύπου I στα C_i και C_j . Βλέπε Σχ. 3.16.



Σχήμα 3.16: Πράξη ομαδοποίησης τύπου I

Τύπου II: Αν υπάρχουν δύο μη συμβατοί κύκλοι C_i και C_j του S και μία λωρίδα b στην \mathbb{S}^2 τέτοια ώστε $b \cap S = \partial b \cap (C_i \cup C_j) = d_i \cup d_j$ και $b \cap$

$\{a_1 \cup \dots \cup a_r\} = \emptyset$, όπου d_i και d_j είναι υποτόξα των C_i και C_j αντίστοιχα, τότε παίρνουμε το σύστημα $S' = \{C_1, \dots, \check{C}_i, \dots, \check{C}_j, \dots, C_n, C; a_1, \dots, a_r\}$, όπου \check{C}_i και \check{C}_j σημαίνει τη διαγραφή αυτών των κύκλων, $C = (C_i \cup C_j \cup \partial b) - \text{Int}(d_i \cup d_j)$, και όπου ο προσανατολισμός του C καθορίζεται από αυτό των C_i και C_j κατά φυσικό τρόπο. Τέλος, $w(C) = w(C_i) + w(C_j)$. Λέμε ότι το S' προέρχεται από το S μέσω της εφαρμογής της πράξης ομαδοποίησης τύπου II στους C_i και C_j . Βλέπε Σχ. 3.17.



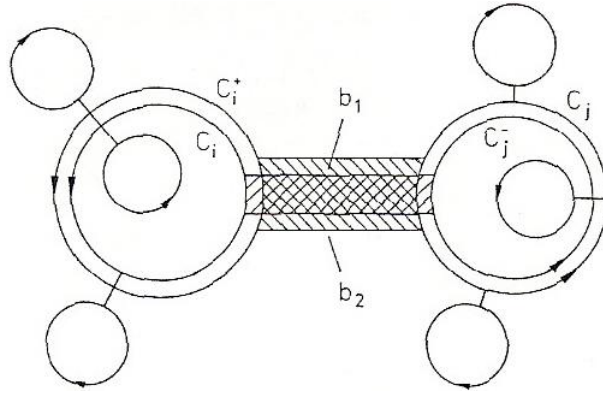
Σχήμα 3.17: Πράξη ομαδοποίησης τύπου II

Σημειώνουμε ότι οι πράξεις ομαδοποίησης ελαττώνουν τον αριθμό των κύκλων ενός συστήματος.

Λήμμα 2. Έστω S και S' στοιχεία του \mathcal{S} . Αν το S' προέρχεται από το S μέσω της εφαρμογής μιας πράξης ομαδοποίησης τύπου I ή τύπου II, τότε $w(S) = w(S')$ και $\mathcal{L}(S, t) \subset \mathcal{L}(S', t)$, για κάθε ακέραιο t .

Απόδειξη. Από τον ορισμό των πράξεων ομαδοποίησης είναι προφανές ότι $w(S) = w(S')$. Για την πράξη τύπου I, εύκολα αποδεικνύεται ότι $\mathcal{D}(S, t) \subset \mathcal{D}(S', t)$. Πράγματι, σε περιοχές όπου το S' περιέχει οποιαδήποτε κοτσίδα με $w_i + w_j$ κλωστές, στις αντίστοιχες περιοχές το S περιέχει κοτσίδες με w_i κλωστές δίπλα σε κοτσίδες με w_j κλωστές. Συνεπώς, $\mathcal{L}(S, t) \subset \mathcal{L}(S', t)$. Για την πράξη τύπου II, έστω C_i και C_j οι κύκλοι του S στους οποίους εφαρμόζεται η πράξη τύπου II. Έστω b, d_i, d_j ορισμένα όπως παραπάνω και έστω N_k μια

κανονική περιοχή του C_k . Για $N_k \cap \{C_1 \cup \dots \cup C_n\} = C_k$ $k = i, j$, έστω C_i^+ το τμήμα του ∂N_i που τέμνει το b . Έστω b_1 μία λεπτή λωρίδα που ενώνει το C_i με το C_j^- και μία πιά παχιά λωρίδα b_2 που ενώνει τα C_i^+ και C_j όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.18.



Σχήμα 3.18:

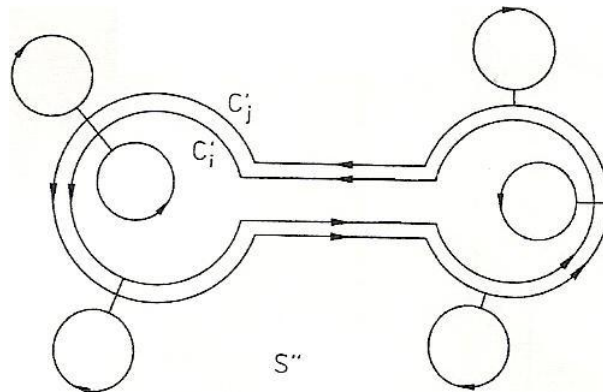
Τέλος, έστω:

$$C'_i = \{C_i \cup C_j^- \cup \partial b_1\} - \text{Int}\{(C_i \cup C_j^-) \cap \partial b_1\},$$

$$C'_j = \{C_j \cup C_i^+ \cup \partial b_2\} - \text{Int}\{(C_j \cup C_i^+) \cap \partial b_2\},$$

$$d'_i = C_i \cap b_1, \quad d'_j = C_j \cap b_2, \quad e_i = C'_i - C_i \quad \text{και} \quad e_j = C'_j - C_j.$$

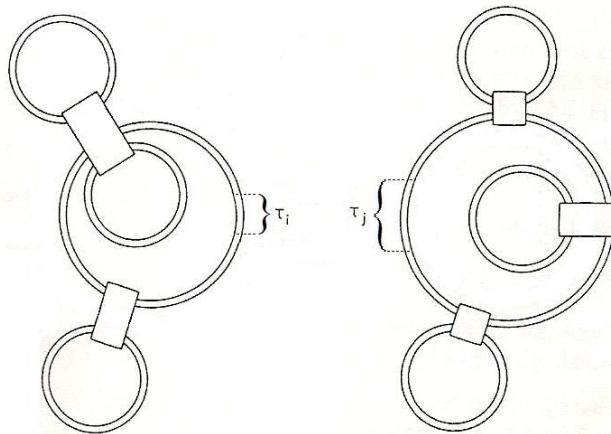
Τότε, παίρνουμε το σύστημα $S'' = \{C_1, \dots, \check{C}_i, \dots, \check{C}_j, \dots, C_n, C'_i, C'_j; a_1, \dots, a_r\}$, όπου οι προσανατολισμοί των C'_i και C'_j καθορίζονται από αυτούς των C_i και C_j με φυσικό τρόπο και $w(C'_i) = w(C_i), w(C'_j) = w(C_j)$. Βλέπε Σχ. 3.19.



Σχήμα 3.19:

Για κάθε στοιχείο D του $\mathcal{D}(S, t)$ μέσω μιας κανονικής ισοτοπίας μπορούμε να πάρουμε ένα στοιχείο D' του $\mathcal{D}(S'', t)$ ως εξής:

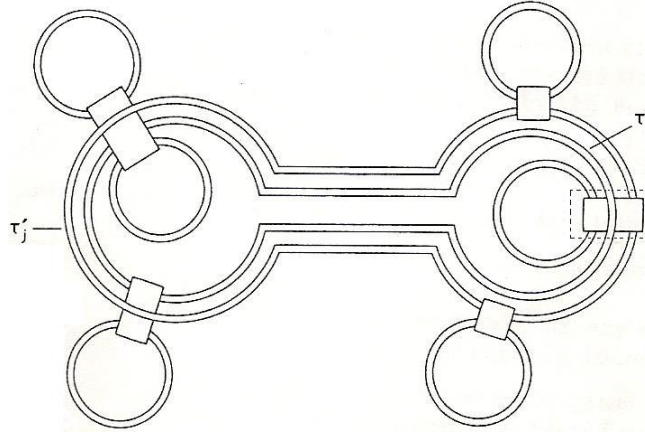
Θεωρούμε ότι τα d'_i και d'_j αντικαθιστώνται από τετριμμένες κοτσίδες όταν παράγουμε το D από το S . Έστω τ_i και τ_j αυτές οι τετριμμένες κοτσίδες. Βλέπε Σχ. 3.20.



Σχήμα 3.20:

Στη συνέχεια τεντώνουμε το τ_j στο τ'_j και το τοποθετούμε επί του e_j και αντίστοιχα τεντώνουμε το τ_i στο τ'_i και το τοποθετούμε επί του e_i . Βλέπε

Σχήμα 3.21. Θέτουμε τώρα e ως το e_i (e_j αντίστοιχα).



Σχήμα 3.21:

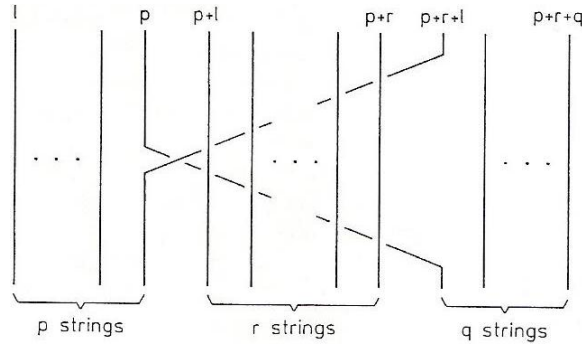
Αν ένα τόξο a του S τμήσει το e , τότε η κοτσίδα β που τοποθετείται στο a αλλάζει μέσω της ακόλουθης απεικόνισης φ :

$$\varphi : B_{p+q} \rightarrow B_{p+q+r}, \begin{cases} \sigma_k \mapsto \sigma_k & \text{αν } 1 \leq k \leq p-1 \\ \sigma_p \mapsto \rho^{-1} \sigma_p \rho & \text{όπου } \rho = \prod_{l=p+1}^{p+r} \sigma_l \\ \sigma_k \mapsto \sigma_{k+r} & \text{αν } p+1 \leq k \leq p+q-1 \end{cases}$$

(Σχήμα 3.22), όπου σ_i είναι οι γεννήτορες της ομάδας των κοτσίδων,

$$p = \sum_{\substack{Cna' \neq \emptyset \\ C \in S}} w(C), \quad q = \sum_{\substack{Cna'' \neq \emptyset \\ C \in S}} w(C),$$

όπου a' (αντίστοιχα a'') οι συνιστώσες του $a-e$ που περιέχουν τα σημεία αρχής (αντίστοιχα τέλους) του προσανατολισμένου τόξου a και $r = n(\tau)$.



Σχήμα 3.22: $\sigma_p \mapsto \rho^{-1}\sigma_p\rho$

Το S' προκύπτει από το S'' μέσω της πράξης τύπου I, άρα $D' \in \mathcal{D}(S', t)$.

Παρατηρούμε, τέλος, ότι η φ κρατάει σταθερό το εκθετικό άθροισμα των κοτσίδων. Συνεπώς $wr(D) = wr(D')$. Εδώ τελειώνει η απόδειξη του λήμματος.

□

Το επόμενο λήμμα λέει ότι οποιοδήποτε προσανατολισμένο διάγραμμα μπορεί να ισοτοπηθεί σε κλειστή κοτσίδα με πράξεις ομαδοποίησης.

Λήμμα 3. Έστω S ένα μη τετριμμένο σύστημα. Τότε υπάρχει ένα ζεύγος κύκλων του S στο οποίο η πράξη ομαδοποίησης τύπου I ή τύπου II μπορεί να εφαρμοστεί.

Απόδειξη. Έστω $S = \{C_1, \dots, C_n; a_1, \dots, a_r\}$. Κόβουμε τη σφαίρα S^2 κατά μήκος των C_1, \dots, C_n τότε υπάρχει τμήμα P το οποίο δεν είναι δίσκος επειδή το S είναι μη τετριμμένο. Στην περίπτωση όπου το P είναι κυκλικός δακτύλιος ($C_i \cup C_j = \partial P$), αν οι C_i, C_j είναι συμβατοί, τότε θα μπορεί να εφαρμοστεί η πράξη τύπου I. Αν είναι μη συμβατοί, θα μπορεί να εφαρμοστεί η πράξη τύπου II.

Στην περίπτωση όπου το P δεν είναι κυκλικός δακτύλιος, κόβουμε το P κατά μήκος των a_1, \dots, a_r . Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι κάθε τμήμα είναι

δίσκος, επειδή αν δεν είναι, μπορούμε να προσθέσουμε προσανατολισμένα τόξα στο S και να το κόψουμε σε δίσκους. Τότε υπάρχει ένα κομμάτι Q τέτοιο ώστε το πλήθος των τόξων του $\partial Q \cap (C_1 \cup \dots \cup C_n)$ να είναι ≥ 4 επειδή το P δεν είναι ούτε κυκλικός δακτύλιος ούτε δίσκος. Το πλήθος των τόξων του $\partial Q \cap (C_1 \cup \dots \cup C_n)$ είναι πάντα άρτιο κι αυτό γιατί σε μια περιοχή Q_i ο αριθμός των a_j στο ∂Q_i είναι άρτιος και κάθε δύο γειτονικά a_k, a_l έχουν αντίθετο προσανατολισμό, διαφορετικά θα υπήρχε a_j που θα συνέδεε μη συμβατούς κύκλους, άτοπο. Άρα και τα συμπληρωματικά κομμάτια του ∂Q_i θα είναι άρτιου πλήθους.

Έστω $\partial Q \cap (C_1 \cup \dots \cup C_n) = E_1 \cup \dots \cup E_m$, όπου τα τόξα E_1, \dots, E_m βρίσκονται στο ∂Q με αυτή τη σειρά, $m \geq 4$ και m άρτιος. Έστω $E_j \subset C_i$. Τότε οι C_{i_j} και $C_{i_{j+1}}$ είναι συμβατοί ($1 \leq j \leq m-1$), συνεπώς οι C_{i_j} και $C_{i_{j+2}}$ είναι μη συμβατοί ($1 \leq j \leq m-2$). Ισχυριζόμαστε ότι $C_{i_1} \neq C_{i_3}$ ή $C_{i_2} \neq C_{i_4}$. Ας υποθέσουμε πως $C_{i_1} = C_{i_3}$ και $C_{i_2} = C_{i_4}$ και έστω D_j ο δίσκος με σύνορο τον C_j που δεν περιέχει το Q ($j = 1, 2$). Τότε το $Q \cup D_1 \cup D_2$ περιέχει μία επιφάνεια γένους ένα (δηλαδή τόρο). Άτοπο, εφόσον είμαστε στην επιφάνεια της σφαίρας.

Συνεπώς η πράξη τύπου II μπορεί να εφαρμοστεί σε ένα από τα ζεύγη (C_{i_1}, C_{i_3}) και (C_{i_2}, C_{i_4}) .

Εδώ ολοκληρώνεται η απόδειξη του λήμματος 3 και κατά συνέπεια η απόδειξη του Θεωρήματος 1.

□

3.6 Απόδειξη 6 κατά Vogel [13]

Η απόδειξη του Vogel είναι στην ίδια λογική με την απόδειξη του Yamada. Σε σχέση με την κατασκευή του Yamada, η διαδικασία που ακολουθεί ο Vogel είναι πιο οικονομική και εύχρηστη, καθώς χρησιμοποιεί μόνο μία στοιχειώδη πράξη η οποία διατηρεί σταθερό τον αριθμό των κύκλων Seifert και προσθέτει μόνο

δύο διασταυρώσεις στα διαγράμματα (μέσω μιας κίνησης Reidemeister τύπου II) και μπορεί εύκολα να προγραμματιστεί σε υπολογιστή.

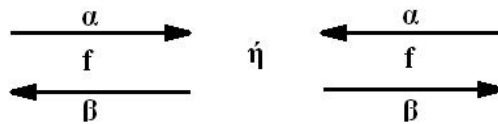
3.6.1 Περιγραφή της στοιχειώδους πράξης

Έστω L προσανατολισμένος κρίκος στο \mathbb{R}^3 και D ένα διάγραμμα του L . Θεωρώντας το D σαν ένα γράφημα στο επίπεδο, οι διασταυρώσεις (του L) θα είναι οι κορυφές του D και τα τόξα (του L) ανάμεσα στις διασταυρώσεις, οι πλευρές του D . Έστω f μία έδρα του D , δηλαδή μια συνιστώσα του τοπολογικού συμπληρώματος του D στο επίπεδο και έστω α, β δύο πλευρές του D που περιέχονται στο ∂f . Υποθέτουμε ότι το (f, α, β) ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

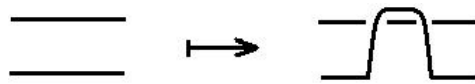
(i) τα α και β περιέχονται σε διαφορετικούς κύκλους Seifert.

(ii) τα α και β έχουν τον ίδιο προσανατολισμό ως προς οποιοδήποτε προσανατολισμό του ∂f .

Μια τέτοια τριάδα (f, α, β) καλείται *αποδεκτή (admissible)* και έχει την ακόλουθη μορφή.



Σε μια τέτοια τριάδα μπορεί να εφαρμοστεί η στοιχειώδης πράξη $T(f, \alpha, \beta)$, η οποία μετασχηματίζει το D μέσω μιας κίνησης Reidemeister II, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



Θεώρημα 7. Υπάρχει απεικόνιση χ από το σύνολο των κλάσεων ισοτοπίας των διαγραμμάτων κρίκων στο \mathbb{N} με τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) Αν D διάγραμμα προσανατολισμένου κρίκου με n κύκλους Seifert, τότε:

$$2n + 1 \leq \chi(D) \leq \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Επιλέον, αν το D είναι συνεκτικό, τότε το $\chi(D)$ δεν είναι μικρότερο του $3n$.

(ii) Αν D' είναι το αποτέλεσμα της εφαρμογής της πράξης T στο διάγραμμα του D , τότε:

$$\chi(D) < \chi(D')$$

(iii) Αν το D είναι συνεκτικό διάγραμμα με n κύκλους Seifert έτσι ώστε:

$$\chi(D) < \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

τότε μία στοιχειώδης πράξη T μπορεί να εφαρμοστεί στο D .

(iv) Αν D είναι ένα συνεκτικό διάγραμμα με n κύκλους Seifert, τότε το D είναι ισοτοπικό στη σφαίρα με το κλείσιμο μιας κοτσίδας αν και μόνον αν:

$$\chi(D) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

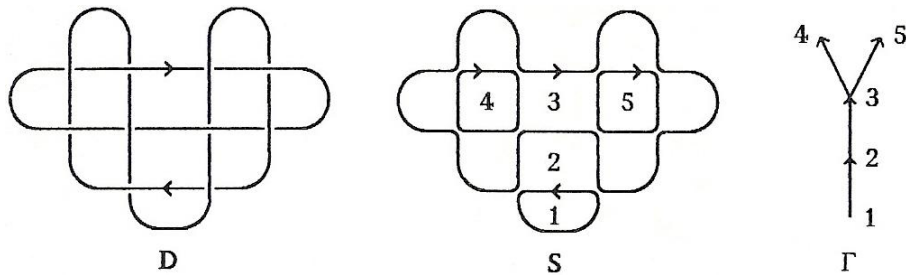
Παρατήρηση 1. Έστω D συνεκτικό διάγραμμα ενός κρίκου L . Βάσει του παραπάνω θεωρήματος, για να μετασχηματίσουμε το D προκειμένου να πάρουμε μια κλειστή κοτσίδα, αρκεί να εφαρμόσουμε μια στοιχειώδη πράξη $T(f, \alpha, \beta)$ κάθε φορά που βρίσκουμε μια αποδεκτή τριάδα (f, α, β) . Όταν αυτή η διαδικασία σταματήσει, το αποτέλεσμα θα είναι μια κλειστή κοτσίδα. Αν το D έχει n κύκλους Seifert και p διασταυρώσεις, ο αριθμός των στοιχειωδών πράξεων που πρέπει να κάνουμε είναι το πολύ:

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 3n = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

και θα έχουμε σαν αποτέλεσμα μια λέξη που ανήκει στην ομάδα \mathbf{B}_n , μήκους το πολύ $p + (n-1)(n-2)$. Αν το $\chi(D)$ είναι μεγαλύτερο από $3n$, ο αριθμός των στοιχειωδών πράξεων που θα χρειαστούν είναι μικρότερος.

3.6.2 Κατασκευή της απεικόνισης χ

Έστω D το διάγραμμα ενός κρίκου L . Οι προσανατολισμένοι κύκλοι Seifert του D χωρίζουν το επίπεδο σε πολλές συνιστώσες τις οποίες αποκαλούμε έδρες της εικόνας Seifert του S . Κάθε προσανατολισμένος κύκλος Seifert C είναι σύνορο δύο εδρών, μιας έδρας f_0 στα αριστερά του (ως προς τον προσανατολισμό του) και μιας έδρας f_1 στα δεξιά του. Βάσει αυτών κατασκευάζουμε ένα προσανατολισμένο γράφημα Γ ως εξής: Κάθε κορυφή του Γ αντιστοιχεί σε μια έδρα του S και κάθε κύκλος Seifert C αναπαριστά μία πλευρά από την κορυφή που αντιστοιχεί στο f_0 προς την κορυφή που αντιστοιχεί στο f_1 . Έτσι, το γράφημα Γ είναι ένα δένδρο.



Σχήμα 3.23:

Ένα προσανατολισμένο δένδρο ισομορφικό με μία υποδιαίρεση ενός προσανατολισμένου διαστήματος θα καλείται *αλυσίδα*. Μία αλυσίδα έχει k πλευρές ($k \geq 0$) και $k + 1$ κορυφές. Ορίζουμε ως $\chi(\Gamma)$ τον αριθμό των αλυσίδων που περιέχονται στο Γ και θέτουμε $\chi(D) = \chi(\Gamma)$.

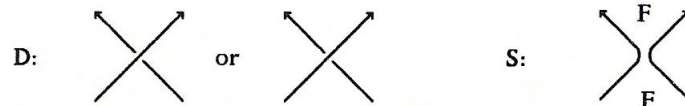
3.6.3 Ιδιότητες της απεικόνισης χ

Αν ένα διάγραμμα D έχει n κύκλους Seifert, η εικόνα Seifert S θα έχει n κύκλους και το δένδρο Γ n πλευρές και $n + 1$ κορυφές. Συνεπώς το Γ θα περιέχει $2n + 1$ αλυσίδες μήκους μικρότερου του 2 (όπου το μήκος αλυσίδας

ορίζεται ως ο αριθμός των πλευρών της) και έχουμε :

$$2n + 1 \leq \chi(D)$$

Τώρα θεωρούμε το D συνεκτικό. Τότε το σύνορο κάθε έδρας του D είναι συνεκτικό. Έστω F μια έδρα της εικόνας S που δεν είναι δίσκος. Το σύνορο του F είναι μη συνεκτικό και το F δεν είναι έδρα του D . Συνεπώς το F θα είναι το συνεκτικό άθροισμα τουλάχιστον δύο εδρών του D και κάπου στο διάγραμμα θα υπάρχει η ακόλουθη εικόνα:



Σχήμα 3.24:

Άρα θα υπάρχουν δύο κύκλοι με αντίθετο προσανατολισμό στο σύνορο του F . Επιπλέον, η εικόνα S έχει αυτή την ιδιότητα για κάθε έδρα με μη-συνεκτικό σύνορο. Αυτό σημαίνει πως το Γ ικανοποιεί την ιδιότητα:

(P) - Κάθε κορυφή του Γ που δεν είναι απομονωμένη θα περιέχεται στο εσωτερικό μιας αλυσίδας.

Λήμμα 4. Αν ένα δένδρο Γ με n πλευρές ($n \geq 1$) ικανοποιεί την ιδιότητα (P), τότε ισχύει ότι:

$$\chi(\Gamma) \geq 3n$$

Απόδειξη. (Με επαγωγή στο n). Η ανισότητα είναι προφανής για $n = 1$, διότι τότε $\chi(\Gamma) = 3$. Έστω $n \geq 2$ και Γ_1 το δένδρο που παίρνουμε από το Γ αν αφαιρέσουμε από αυτό τις ελεύθερες πλευρές του και τις μεμονωμένες του κορυφές. Υποθέτουμε ότι το Γ_1 δεν είναι σημείο. Τότε θα έχει μία ελεύθερη πλευρά s με κορυφές a , b και έστω a η μεμονωμένη κορυφή. Υποθέτουμε πως η s έχει προσανατολισμό από το a προς το b (ειδιάλως αντιστρέφουμε τον

προσανατολισμό του Γ). Σε αυτή την κατάσταση το Γ έχει p πλευρές με τελική κορυφή το a ($p \geq 0$) και $q + 1$ πλευρές με αρχική κορυφή το a ($q \geq 0$). Δεδομένου ότι το Γ ικανοποιεί την ιδιότητα (P) έχουμε:

$$q \neq 0 \Rightarrow p \neq 0$$

Έστω, τώρα, Γ' το δένδρο που παίρνουμε από το Γ αφαιρώντας του τις ελεύθερες πλευρές που περιέχουν το a . Διαπιστώνεται εύκολα ότι το Γ' έχει $n - p - q$ πλευρές και ικανοποιεί την ιδιότητα (P) . Επιπλέον, το Γ έχει ακριβώς $p + q$ κορυφές και $p + q$ πλευρές που δεν περιλαμβάνονται στο Γ' και $p(q + 1)$ αλυσίδες μήκους 2 που διέρχονται από το a . Επομένως έχουμε

$$\begin{aligned} \chi(\Gamma) &\geq \chi(\Gamma') + 2(p + q) + p(q + 1) \geq 3(n - p - q) + 3p + 2q + pq \Rightarrow \\ &\Rightarrow \chi(\Gamma) \geq 3n + (p - 1)q \geq 3n \end{aligned}$$

Σημειώνουμε ότι η ανισότητα $\chi(\Gamma') \geq 3(n - p - q)$ προκύπτει από την υπόθεση επαγωγής.

Αν το γράφημα Γ_1 αποτελείται από μία κορυφή a , το Γ έχει p πλευρές με τελική κορυφή το a και q πλευρές με αρχική κορυφή το a . Επειδή το Γ ικανοποιεί την ιδιότητα (P) , τα p και q είναι θετικά. Έτσι έχουμε:

$$\chi(\Gamma) = \underbrace{p + q + 1}_{\text{κορυφές}} + \underbrace{p + q + pq}_{\text{πλευρές}} = 3n + (p - 1)(q - 1) \geq 3n$$

□

3.6.4 Η απεικόνιση χ και η πράξη T

Λήμμα 5. Έστω (f, α, β) μια αποδεκτή τριάδα ενός διαγράμματος D , έστω Γ το προερχόμενο δένδρο από το D και σ, τ οι πλευρές του Γ που αντιστοιχούν στους κύκλους Seifert που περιέχουν τα α, β αντίστοιχα. Έστω u η κορυφή του

Γ που αντιστοιχεί στην έδρα της εικόνας Seifert S που περιέχει το f . Ορίζουμε D' το διάγραμμα που παίρνουμε από το D μέσω της πράξης $T(f, \alpha, \beta)$ και Γ' το δένδρο που αντιστοιχεί στο D' .

Τότε οι σ και τ έχουν και οι δύο το u σαν αρχική ή σαν τελική κορυφή και το Γ' το παίρνουμε από το Γ ταυτίζοντας τις σ και τ και προσθέτοντας μια καινούρια ελεύθερη πλευρά θ τέτοια ώστε:

- Αν σ και τ έχουν το u σαν αρχική κορυφή στο Γ , η αρχική κορυφή του θ να είναι η τελική των σ, τ .

- Αν σ και τ έχουν το u σαν τελική κορυφή στο Γ , η τελική κορυφή του θ να είναι η αρχική των σ, τ .

Παρατήρηση 2. Αυτή η στοιχειώδης πράξη στο Γ εξαρτάται μόνο από τις σ και τ και μπορεί να οριστεί σε κάθε δένδρο. Η μόνο προϋπόθεση για τις σ και τ είναι η ακόλουθη:

$\sigma \cap \tau \neq \emptyset$ και $\sigma \cup \tau$ δεν είναι αλυσίδα.

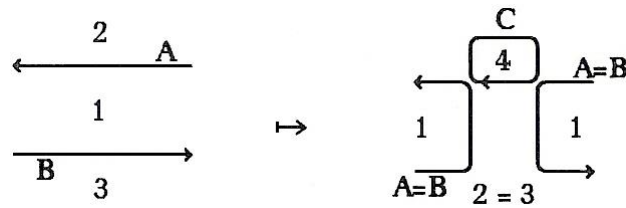
Μια τέτοια πράξη μπορεί να οριστεί ως $T(\sigma, \tau)$.

Απόδειξη. Έστω (f, α, β) μία αποδεκτή τριάδα του D . Αντιστρέφοντας τον προσανατολισμό του D και του Γ , αν είναι αναγκαίο, μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι προσανατολισμοί των α και β είναι συμβατοί με τον προσανατολισμό του ∂f . Έτσι, ο μετασχηματισμός $T(f, \alpha, \beta)$ έχει ως εξής:



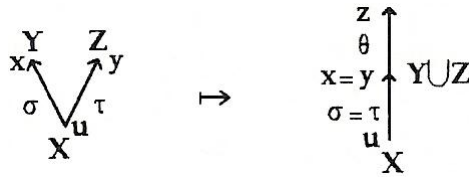
Σχήμα 3.25:

Ο μετασχηματισμός $T(f, \alpha, \beta)$ τροποποιεί την εικόνα Seifert S με τον εξής τρόπο:



Σχήμα 3.26:

Εφόσον τα α και β δεν βρίσκονται στους ίδιους κύκλους Seifert A και B , η νέα εικόνα Seifert S' έχει τον ίδιο αριθμό συνιστωσών. Επιπλέον οι κύκλοι A και B και οι έδρες 2 και 3 γίνονται ο ίδιος κύκλος και η ίδια έδρα. Ωστόσο, δημιουργείται ένας καινούριος κύκλος C και μια καινούρια έδρα 4. Ο αντίστοιχος μετασχηματισμός για το δένδρο Γ είναι όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.

Σχήμα 3.27: Η πράξη $T(f, \alpha, \beta)$ στα δένδρα

Στο Σχήμα 3.27 τα X , Y και Z είναι υποδέντρα του Γ και οι u , x , y και z είναι κορυφές που αντιστοιχούν στις έδρες 1, 2, 3 και 4. Το δένδρο Γ είναι η ένωση των X , Y , Z , σ και τ και το δένδρο Γ' είναι η ένωση των X , Y , Z , $\sigma = \tau$ και θ . Έτσι, έχουμε κατασκευάσει τον ισοδύναμο μετασχηματισμό $T(\sigma, \tau)$ στο Γ .

□

Λήμμα 6. Αν ένα δένδρο Γ' προέρχεται από ένα δένδρο Γ μέσω του μετασχηματισμού $T(\sigma, \tau)$, τότε $\chi(\Gamma') > \chi(\Gamma)$.

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε τους προηγούμενους συμβολισμούς, όπου το u είναι κοινή κορυφή των σ και τ και οι x και y είναι οι άλλες κορυφές των σ και τ (στο Γ). Η επιπλέον πλευρά στο Γ' είναι η θ με z την απομονωμένη της κορυφή. Οι εικόνες των x και σ μέσω της απεικόνισης $\varphi : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ θα συμβολίζονται x' και σ' αντίστοιχα. Έστω C και C' τα σύνολα των αλυσίδων που περιέχονται στα Γ και Γ' . Ως συνήθως, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το u είναι η αρχική κορυφή των σ και τ . Έχουμε λοιπόν μια απεικόνιση ψ από το C στο C' που ορίζεται ως εξής:

$$\psi(U) = \begin{cases} \varphi(U) \cup \theta & \text{αν } y \text{ η τελική κορυφή του } U \\ \varphi(U) & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Είναι εύκολο να δούμε πως η ψ είναι ένα-προς-ένα και πως το $\{z\}$ δεν ανήκει στην εικόνα του ψ . Γι'αυτό, το $\chi(\Gamma')$ είναι μεγαλύτερο του $\chi(\Gamma)$.

□

Παρατήρηση 3. Αν υποθέσουμε πως τα δέντρα Y και Z δεν έχουν πλευρές με τελική κορυφή x ή y , τότε $\chi(\Gamma') = \chi(\Gamma) + 1$. Συγκεκριμένα, αυτό συμβαίνει αν το Γ ικανοποιεί την ιδιότητα:

(P1)-Κάθε υποδένδρο του Γ με μόνο δύο απομονωμένες κορυφές είναι ένωση μίας ή δύο αλυσίδων.

Επιπλέον, αν το Γ ικανοποιεί την (P1), τότε την ικανοποιεί και το Γ' .

Πόρισμα 1. Αν Γ δένδρο με n πλευρές τότε:

$$\chi(\Gamma) \leq \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν το Γ είναι αλυσίδα.

Απόδειξη. Αν το Γ δεν είναι αλυσίδα τότε θα μπορεί να εφαρμοστεί σε αυτό μία στοιχειώδης πράξη $T(\sigma, \tau)$. Έτσι παίρνουμε μια ακολουθία Γ_p από δένδρα, τέτοια ώστε $\Gamma_0 = \Gamma$ και κάθε Γ_{p+1} προκύπτει από το Γ_p μέσω μιας στοιχειώδους

πράξης T . Αυτή η διαδικασία σταματά στο p -στό επίπεδο αν το Γ_p είναι αλυσίδα. Άρα:

$$\chi(\Gamma) < \chi(\Gamma_p) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

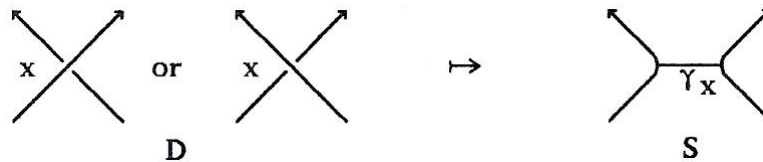
με ισότητα αν το Γ είναι αλυσίδα.

3.6.5 Απόδειξη του (iii) του Θεωρήματος 7.

Έστω D το διάγραμμα ενός κρίκου L . Το διάγραμμα θεωρείται συνεκτικό με n κύκλους Seifert. Αν $\chi(D) < \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, τότε το αντίστοιχο δένδρο Γ δεν είναι αλυσίδα και έχει δύο πλευρές σ και τ με μία αρχική ή τελική κορυφή u . Ισοδύναμα, η εικόνα Seifert S έχει μια έδρα F και δύο κύκλους Seifert στο ∂F με προσανατολισμούς που συμφωνούν με τον επαγόμενο προσανατολισμό του συνόρου ∂F .

Έστω C ένας κύκλος Seifert στο ∂F . Αυτός ο κύκλος θα λέγεται θετικός (ή αρνητικός) αν ο προσανατολισμός του είναι συμβατός (ή μη συμβατός) με τον προσανατολισμό του ∂F . Ορίζουμε p (αντίστοιχα q) τον αριθμό των θετικών (αντίστοιχα αρνητικών) κύκλων Seifert στο ∂F . Από υπόθεση, είτε το p ή το q θα είναι μεγαλύτερο του 1. Αλλάζοντας τον προσανατολισμό του D , αν χρειαστεί, μπορούμε να υποθέσουμε πως $p > 1$.

Έστω x μια διασταύρωση του D . Ορίζουμε ως γ_x ένα ευθύγραμμο τμήμα κοντά στη διασταύρωση, που ενώνει τους δύο κύκλους Seifert, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:



Σχήμα 3.28:

Αυτά τα ευθύγραμμα τμήματα είναι όλα ξένα μεταξύ τους και καθένα ενώνει σε μια έδρα του S δύο κύκλους Seifert με αντίθετους προσανατολισμούς. Έστω K το σύνολο των ευθύγραμμων τμημάτων γ_x που περιέχει μια έδρα F . Εάν κόψουμε το F κατά μήκος αυτών των τμημάτων παίρνουμε έναν υπόχωρο \hat{F} του F με πολλές συνιστώσες, που κάθε μία αντιστοιχεί σε μια έδρα του D .

Υποθέτουμε πως για κάθε τέτοια έδρα f δεν υπάρχει αποδεκτή τριάδα (f, α, β) . Αυτό σημαίνει πως κάθε συνιστώσα f του \hat{F} συναντά ακριβώς ένα θετικό και έναν αρνητικό κύκλο Seifert στο ∂F . Έστω f_+ ο θετικός κύκλος Seifert που συναντά η f . Αν δύο συνιστώσες f και f' τέμνονται, οι αντίστοιχοι κύκλοι Seifert f_+ και f'_+ είναι ο ίδιος κύκλος. Γι'αυτό η απεικόνιση $f \mapsto f_+$ είναι τοπικά σταθερή, συνεπώς σταθερή. Αυτό σημαίνει πως το ∂F έχει μόνο ένα θετικό κύκλο Seifert, γεγονός που έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση πως $p > 1$.

Γι'αυτό, μία αποδεκτή τριάδα υπάρχει και μια στοιχειώδης πράξη T μπορεί να εφαρμοστεί στο D .

3.6.6 Απόδειξη του (iv) του Θεωρήματος 7.

Αν $\chi(D) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ το δένδρο Γ είναι αλυσίδα και η εικόνα Seifert S είναι, ως προς μια ισοτοπία στη σφαίρα, η ένωση n κύκλων με ίδιο προσανατολισμό και κοινό κέντρο. Με μία δεύτερη ισοτοπία μπορούμε επίσης να υποθέσουμε πως κάθε τμήμα γ_x περιέχεται σε μια ακτίνα. Τώρα, κάθε πλευρά του διαγράμματος D είναι κάθετη σε κάθε ακτίνα και το D είναι το κλείσιμο μιας κοτσίδας.

Εδώ ολοκληρώνεται η απόδειξη του Θεωρήματος 7. □

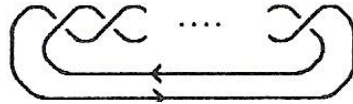
Παρατήρηση 4. Ο αριθμός των στοιχειωδών πράξεων T που χρειάζονται για να μετατραπεί το διάγραμμα του D σε κλειστή κοτσίδα εξαρτάται από την ακολουθία των αποδεκτών τριάδων. Το ίδιο ισχύει και για ένα δένδρο. Ένα

άλλο πρόβλημα είναι το γεγονός πως δεν μπορεί κάθε στοιχειώδης πράξη στο δένδρο Γ να αναχθεί σε μια στοιχειώδη πράξη στο διάγραμμα D . Το μόνο αποτέλεσμα που μπορούμε να επαληθεύσουμε είναι πως για κάθε στοιχειώδη πράξη $T(\sigma, \tau)$ στο Γ υπάρχει μια στοιχειώδης πράξη $T(\sigma', \tau')$ που αντιστοιχεί στην ίδια κορυφή του Γ και με τον ίδιο προσανατολισμό των πλευρών του Γ όπως στην $T(\sigma, \tau)$, η οποία ανάγεται σε μία στοιχειώδη πράξη $T(f, \alpha, \beta)$ στο D .

Μία ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι η ακόλουθη: Υποθέτουμε πως το αντίστοιχο δένδρο Γ ενός διαγράμματος κρίκου D ικανοποιεί την ιδιότητα (P1). Τότε κάθε μετασχηματισμός T παράγει ένα νέο διάγραμμα με τις ακόλουθες ιδιότητες:

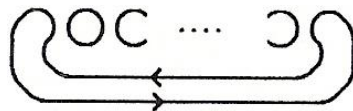
- Το αντίστοιχο δένδρο Γ' του D' ικανοποιεί την ιδιότητα (P1)
- $\chi(D') = \chi(D) + 1$

Επομένως, αν το D έχει n κύκλους Seifert, ο αριθμός των μετασχηματισμών που χρειάζεται προκειμένου να γίνει κλειστή κοτσίδα είναι ακριβώς $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - \chi(D)$. Ένα παράδειγμα ενός τέτοιου διαγράμματος είναι το ακόλουθο.



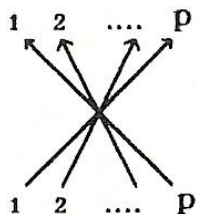
Σχήμα 3.29:

Ο αριθμός των διασταυρώσεων είναι $n = 2p$ και ο αριθμός των κύκλων Seifert είναι $2p$. Η εικόνα Seifert είναι η εξής:



Σχήμα 3.30:

με p θετικούς και p αρνητικούς κύκλους. Το γράφημα Γ είναι το παρακάτω:



Σχήμα 3.31:

Ο αριθμός $\chi(\Gamma)$ είναι ακριβώς $1 + 4p + p^2$. Τότε, μετά από ακριβώς $p^2 - p$ στοιχειώδεις μετασχηματισμούς, παίρνουμε μια κλειστή κοτσίδα με $2p^2 = n^2/2$ διασταυρώσεις.

Κεφάλαιο 4

Το Θεώρημα Markov

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε πώς να μετατρέπουμε έναν προσανατολισμένο κόμβο σε κοτσίδα (με ισοτοπικό κλείσιμο). Το ερώτημα τώρα είναι: Αν δύο κόμβοι είναι ισοτοπικοί, πώς σχετίζονται μεταξύ τους δύο αντίστοιχες κοτσίδες τους; Η απάντηση δόθηκε από τον Markov το 1936 με μια σχέση ισοδυναμίας ανάμεσα σε κοτσίδες, που χρησιμοποιούσε αρχικά τρεις αλγεβρικές κινήσεις, οι οποίες στη συνέχεια περιορίστηκαν σε δύο από τον Weinberg.

Θεώρημα 2. (Markov, Weinberg, 1936) Δύο προσανατολισμένοι κόμβοι (ή κρίκοι) είναι ισοτοπικοί αν και μόνο αν οποιεσδήποτε δύο αντίστοιχες κοτσίδες τους είναι ισοδύναμες μέσω σχέσεων στις ομάδες \mathbf{B}_n και μέσω των κινήσεων

$$(i) \text{ Συζυγία σε κάθε } \mathbf{B}_n : \alpha \sim \sigma_i^{-1} \alpha \sigma_i$$

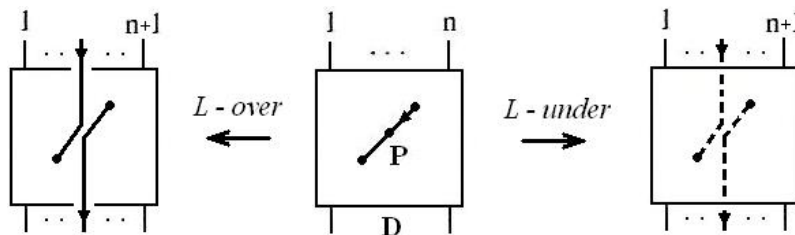
$$(ii) \text{ Κίνηση Markov} : \mathbf{B}_n \ni \alpha \sim \alpha \sigma_n^{\pm 1} \in \mathbf{B}_{n+1}$$

Το Θεώρημα Markov επιτρέπει την κατασκευή αναλλοίωτων ισοτοπίας κόμβων, χρησιμοποιώντας τις ομάδες των κοτσίδων και αλγεβρικά εργαλεία.

4.1 Απόδειξη κατά Λαμπροπούλου – Rourke [7]

Στο παρόν κεφάλαιο θεωρούμε για τα διαγράμματα τις παραδοχές της απόδειξης Alexander κατά Λαμπροπούλου, δηλαδή ότι είναι υποδιαιρεμένα σε υποτόξα *over* ή *under*.

Ορισμός 15. (*Η κίνηση L*). Έστω ένα D διάγραμμα κόμβου ή κοτσίδας και έστω P ένα σημείο του D τέτοιο ώστε να μην βρίσκεται ευθυγραμμισμένο κατακόρυφα με κάποια διασταύρωση ή με τα άκρα κάποιας κλωστής του D ή με κάποια άλλη κορυφή το D . Τότε μπορούμε να κάνουμε την ακόλουθη πράξη: Κόβουμε το διάγραμμα στο P , κάμπουμε με κινήσεις ισοτοπίας τα δύο νέα άκρα που προκύπτουν και τα τεντώνουμε σε δύο αντίστοιχες κλωστές του D (στην κατακόρυφο του P), έτσι ώστε οι καινούριες κλωστές να είναι προσανατολισμένες προς τα κάτω και να περνάνε και οι δύο πάνω από το υπόλοιπο διάγραμμα ή και οι δύο κάτω (βλέπε Σχήματα 4.1 και 3.5). Έτσι υπάρχουν δύο τύποι κίνησης L , η πάνω (*over*), L_o , και η κάτω (*under*), L_u . Για αφηρημένα παραδείγματα βλέπε Σχήμα 4.1.



Σχήμα 4.1: L-moves

Προφανώς αν ενώσουμε τις αντίστοιχες κλωστές μιας κίνησης L με ένα απλό τόξο, το διάγραμμα που προκύπτει είναι ισοτοπικό με το αρχικό διάγραμμα D (κόμβου ή κοτσίδας).

4.1.1 Το Θεώρημα Markou μίας κίνησης

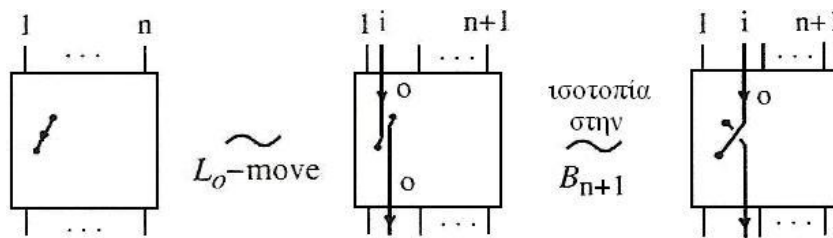
Για την απόδειξη του Θεωρήματος Markou θα αποδειχθεί το παρακάτω ισοδύναμο.

Θεώρημα 8 (Θεώρημα Markou μίας κίνησης [7]). Δύο κόμβοι είναι ισοτοπικοί αν και μόνο αν δύο οποιεσδήποτε κοτσίδες τους διαφέρουν κατά κινήσεις L .

Με το λήμμα που ακολουθεί αποδεικνύεται η ισοδυναμία των Θεωρημάτων 2 και 8.

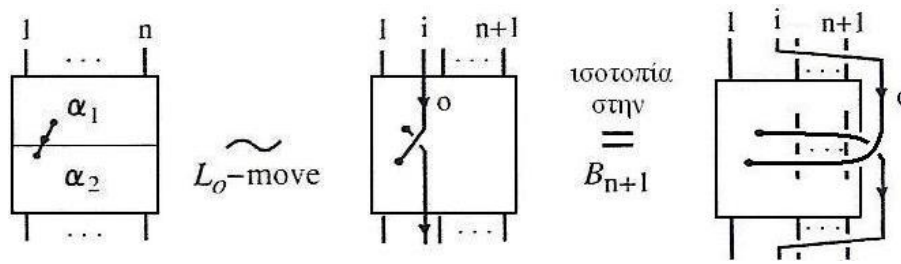
Λήμμα 7. Η ισοδυναμία στο $\bigcup_{i=1}^n \mathbf{B}_n$ που επάγεται από το Θεώρημα Markou είναι η ίδια με αυτή που επάγεται από το Θεώρημα Markou μίας κίνησης.

Απόδειξη. Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι με μία πολύ μικρή ισοτοπία κοτσίδων, μια κίνηση L σε μια κοτσίδα μπορεί να πάρει την ακόλουθη μορφή, την οποία θα χρησιμοποιούμε ελεύθερα σαν κίνηση L , κατά την οποία εισάγεται τοπικά μια νέα διασταύρωση στην τελική κοτσίδα, βλέπε Σχήμα 4.2.



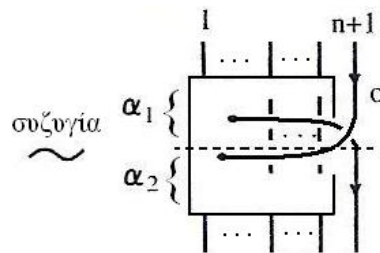
Σχήμα 4.2:

Για την μία κατεύθυνση της απόδειξης, μία κίνηση L μπορεί να παραχθεί από συζυγία κοτσίδων και μία κίνηση Markou, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



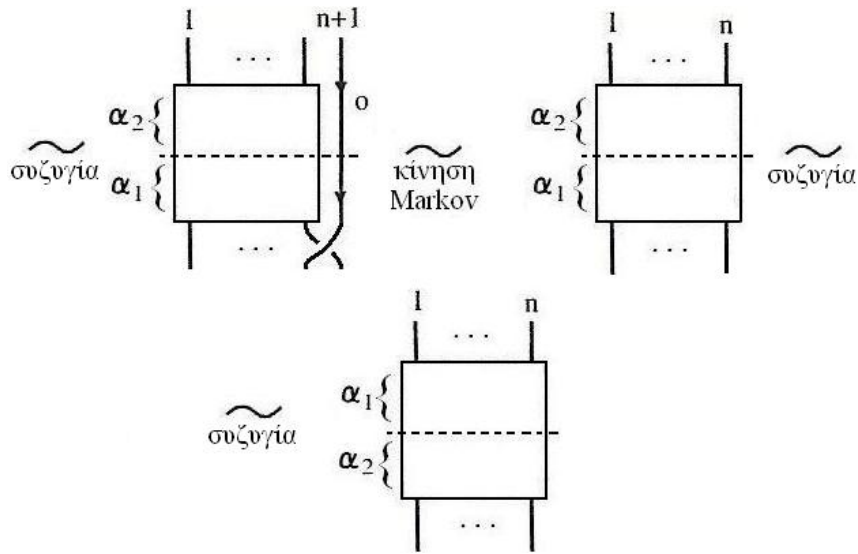
Σχήμα 4.3:

Πράγματι με απαλοιφή των πάνω και κάτω από την κοτσίδα διασταυρώσεων (λογω συζυγίας) παίρνουμε την εξής ισοδύναμη κοτσίδα:



Σχήμα 4.4:

Αλλά από (i) έχουμε: $\alpha_1\alpha_2 \sim \alpha_2\alpha_1$, διότι $\alpha_1\alpha_2 \sim \alpha_2(\alpha_1\alpha_2)\alpha_2^{-1}$



Σχήμα 4.5:

Σημειώνουμε ότι η τελευταία εικόνα του Σχήματος 4.3 μας δίνει την παρακάτω αλγεβρική έκφραση για τις κινήσεις L_o και L_u αντίστοιχα.

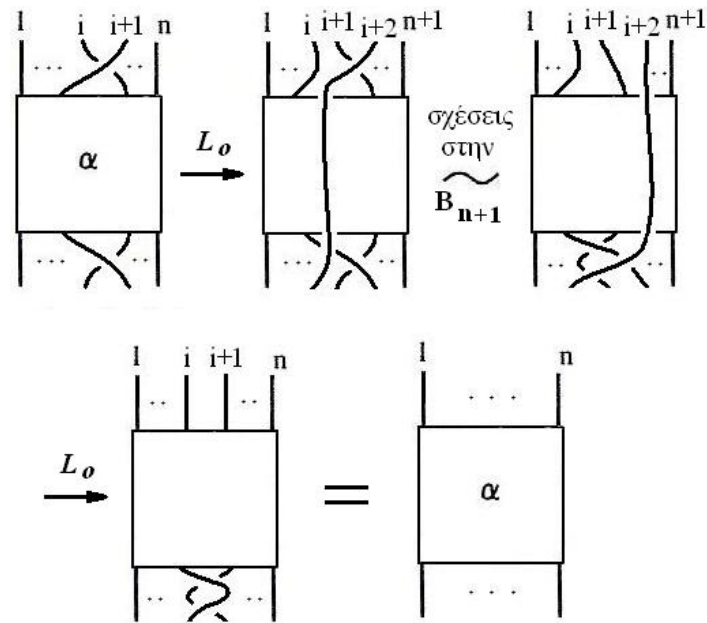
$$\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \stackrel{L_o}{\sim} \sigma_i^{-1} \cdots \sigma_n^{-1} \widetilde{\alpha}_1 \sigma_{i-1}^{-1} \cdots \sigma_{n-1}^{-1} \sigma_n^{\pm 1} \sigma_{n-1} \cdots \sigma_i \widetilde{\alpha}_2 \sigma_n \cdots \sigma_i,$$

$$\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \stackrel{L_u}{\sim} \sigma_i \cdots \sigma_n \widetilde{\alpha}_1 \sigma_{i-1} \cdots \sigma_{n-1} \sigma_n^{\pm 1} \sigma_{n-1}^{-1} \cdots \sigma_i^{-1} \widetilde{\alpha}_2 \sigma_n^{-1} \cdots \sigma_i^{-1},$$

όπου $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{B}_n$ και $\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2 \in \mathbf{B}_{n+1}$.

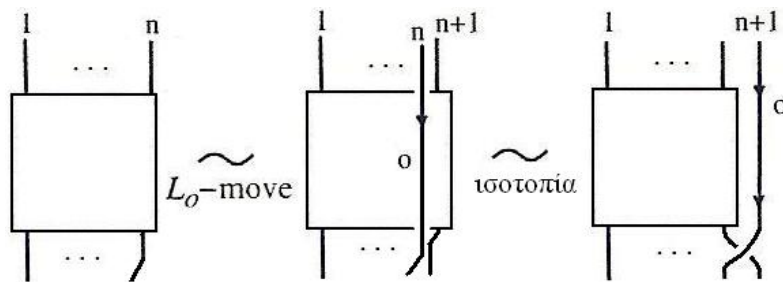
Αντίστροφα, θαδειχθεί ότι οι κινήσεις (i),(ii) του Θεωρήματος Markov μπορούν να παραχθούν από κινήσεις L .

Για την (i) έχουμε:



Σχήμα 4.6:

Η κίνηση (ii) , τέλος, είναι μια ειδική περίπτωση κίνησης L :



Σχήμα 4.7:

Εδώ ολοκληρώνεται η απόδειξη του λήμματος 7.

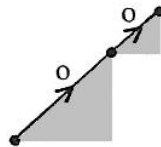
□

4.1.2 Απόδειξη του Θεωρήματος Markov μίας κίνησης

Ας θυμηθούμε τώρα τη στοιχειώδη κίνηση braiding σε ένα διάγραμμα, όπως περιγράφεται στην παράγραφο 3.3 και απεικονίζεται στο Σχήμα 3.5. Σύμφωνα με τον ορισμό των κινήσεων L η απαλειφή ενός up-arc μπορεί να πραγματοποιηθεί με μια κίνηση ίδιου τύπου.

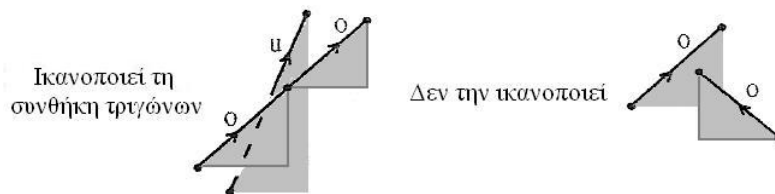
Ορισμός 16. Έστω QP up-arc στο οποίο εφαρμόζεται κίνηση L . Το ορθογώνιο τρίγωνο, με υποτείνουσα το QP , πάνω στο οποίο ολισθαίνει η καινούρια κάτω κλωστή, καλείται *τρίγωνο ολίσθησης* $T(P)$. Λέμε ότι το τρίγωνο ολίσθησης είναι τύπου over ή under σύμφωνα με την ταμπέλα του up-arc.

Δύο τρίγωνα ολίσθησης λέγονται *γειτονικά* αν βρίσκονται στο ίδιο τόξο και έχουν μία κοινή κορυφή. Ένα παράδειγμα φαίνεται παρακάτω.



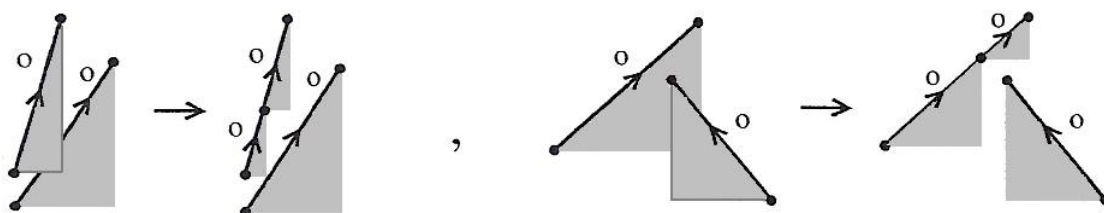
Σχήμα 4.8: Γειτονικά τρίγωνα

Συνθήκη τριγώνων : Σε ένα διάγραμμα κόμβου μη γειτονικά τρίγωνα επιτρέπεται να τέμνονται μόνο αν είναι αντίθετου τύπου (δηλαδή το ένα over και το άλλο under). Για παράδειγμα:



Σχήμα 4.9: Η συνθήκη τριγώνων

Η συνθήκη τριγώνων μπορεί να ικανοποιείται πάντα. Πράγματι, στην περίπτωση που παραβιάζεται, υποδιαιρούμε το ένα τόξο σε μικρότερα υποτόξα, μέχρι τα μικρότερα τρίγωνα ολίσθησης που δημιουργούνται να μην την παραβιάζουν, όπως εικονίζεται ακολούθως.



Σχήμα 4.10:

Για την απόδειξη του Θεωρήματος Markov μιας κίνησης θα πρέπει να δείξουμε τα εξής:

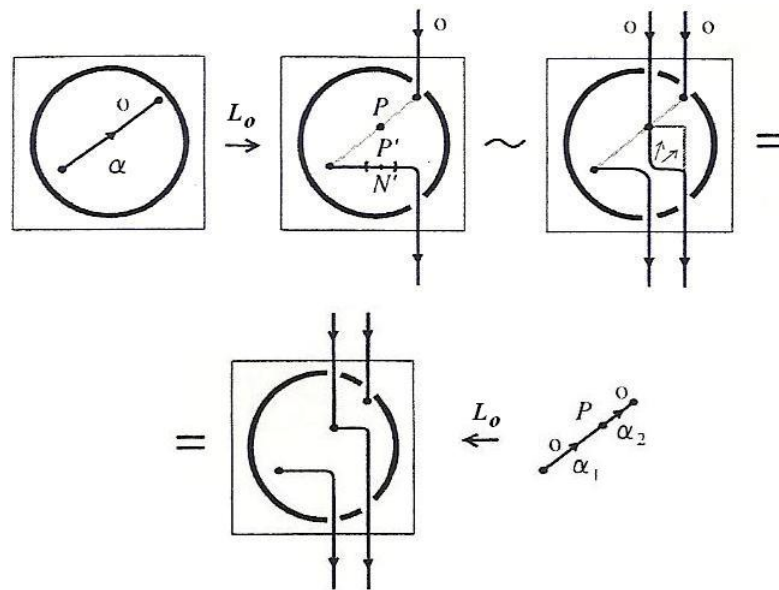
- α) Διαφορετικές επιλογές στο braiding ενός διαγράμματος δίνουν L -ισοδύναμες κοτσίδες (στατικό μέρος).
- β) Κινήσεις Δ (κινήσεις Reidemeister) στο διάγραμμα επάγουν L -ισοδύναμες κοτσίδες (κινητικό μέρος).

Λόγω του ότι, οι κινήσεις Δ μπορούν να θεωρηθούν εντελώς τοπικές σε ένα διάγραμμα, μπορούμε να υποθέσουμε ότι έχουμε κάνει το braiding σε όλα τα up-arcs του διαγράμματος εκτός από εκείνο που μας ενδιαφέρει κάθε φορά.

Θα δείξουμε ότι οι τελικές κοτσίδες εξαρτώνται (ως προς L -ισοδυναμία) από τις επιλογές που έχουμε κατά το braiding, δηλαδή από την επιλογή των σημείων υποδιαίρεσης στο αρχικό διάγραμμα και από επιλογές σήμανσης για ελεύθερα up-arcs. Εξάλλου η συνθήκη τριγώνου μας εξασφαλίζει ότι η απαλοιφή των up-arcs δεν εξαρτάται από τη σειρά τους.

4.1.3 Το στατικό μέρος της απόδειξης

Λήμμα 8. Αν προσθέσουμε σε ένα ur -arc α ένα σημείο υποδιαίρεσης P και ονομάσουμε τα δύο καινούρια ur -arcs α_1 και α_2 , οι τελικές κοτσίδες είναι L -ισοδύναμες (με ίδιες ταμπέλες).



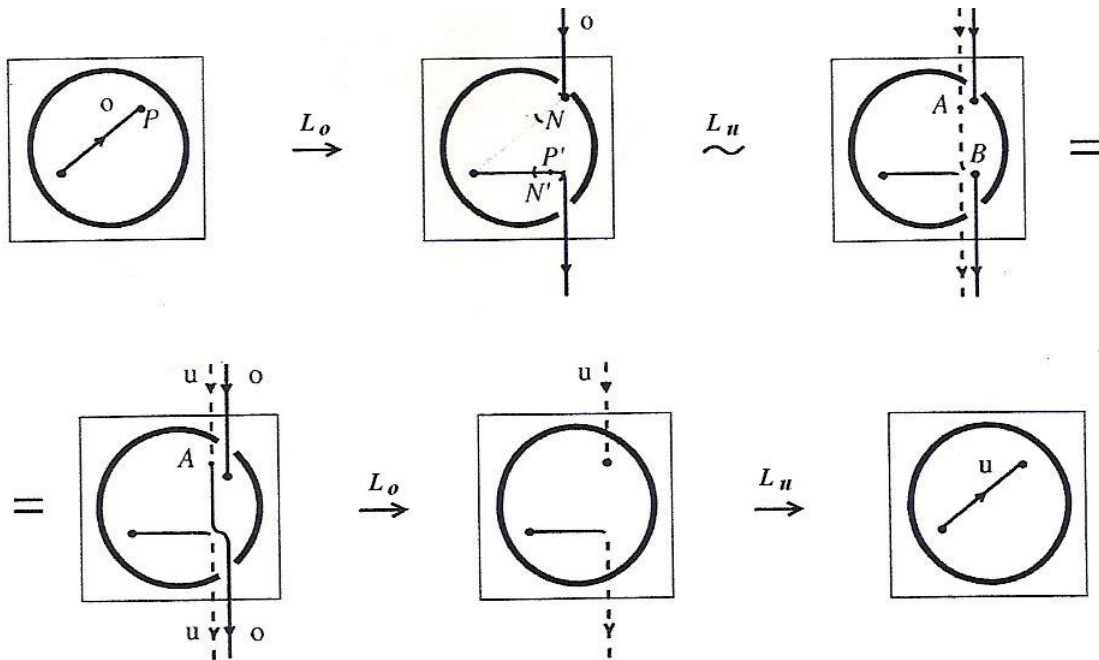
Σχήμα 4.11:

Απόδειξη. Θεωρούμε ότι το α είναι “ o ” (αντίστοιχη είναι η απόδειξη για “ u ”). Απαλείφουμε το α με μια κίνηση L_o (βλέπε Σχήμα 4.11). Στη συνέχεια, πάνω στο οριζόντιο κομμάτι κλωστής που δημιουργείται επιλέγουμε μια μικρή περιοχή N' γύρω από την κατακόρυφη προβολή P' του P (βλέπε Σχήμα 4.11). Με ισοτοπία επιπέδου γλιστράμε την περιοχή N' προς τα κάτω, έτσι ώστε να δημιουργηθεί ένα τόξο υπό γωνία και εφαρμόζουμε μια κίνηση L_o στο P' . Τέλος, με ισοτοπία επιπέδου σε κατάλληλο τμήμα της καινούριας κλωστής παίρνουμε μια κοτσίδα που είναι το αποτέλεσμα braiding του αρχικού διαγράμματος, που όμως περιλαμβάνει το σημείο υποδιαίρεσης P (βλέπε Σχήμα 4.11).

□

Λήμμα 9. Από την απαλοιφή ενός ελεύθερου ur -arc στο διάγραμμα, για το οποίο έχουμε την επιλογή σήμανσης “ o ” ή “ u ”, προκύπτουν L -ισοδύναμες κοτσίδες ανεξάρτητα από τη σήμανση που θα επιλέξουμε.

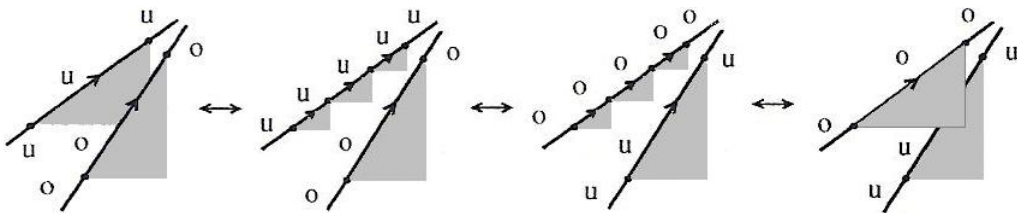
Απόδειξη. Αρχικά, για λόγους απλοποίησης υποθέτουμε πως το τρίγωνο ολίσθησης του ur -arc δεν βρίσκεται πάνω ή κάτω από κάποιο άλλο τόξο του αρχικού διαγράμματος. Επίσης, θεωρούμε πως το ur -arc έχει τη σήμανση “ o ” και το απαλείφουμε με μια L_o .



Σχήμα 4.12:

Έπειτα, στο σχεδόν οριζόντιο τμήμα της καινούριας κλωστής επιλέγουμε μια κατάλληλα μικρή περιοχή N' ενός σημείου P' , προβολή μιας περιοχής N του αρχικού ur -arc, τέτοια ώστε να μην υπάρχει κάποια ενδιάμεση κλωστή μεταξύ των κάθετων ευθειών που διέρχονται από τα P και P' (βλέπε Σχήμα 4.12). Στη συνέχεια, εφαρμόζουμε μία κίνηση L_u στο P' . Το γεγονός ότι το αρχικό ur -arc είναι ελεύθερο και αρκετά μικρό συνεπάγεται πως μόνο κατακόρυφες κλωστές

μπορούν να περάσουν πάνω ή κάτω από το τρίγωνο ολίσθησής του. Γι'αυτό, εφόσον το N είναι κατάλληλα μικρό, δεν υπάρχει τόξο που να διασταυρώνεται με το AB και να το αναγκάζει να γίνει under. Έτσι, με ισοτοπία επιπέδου κοτσίδων υψώνουμε το A τόσο, ώστε να είμαστε σε θέση να απαλείψουμε μια κίνηση L_o (βλέπε Σχήμα 4.12). Μετά την απαλοιφή αυτή, η κοτσίδα που προκύπτει μπορεί να θεωρηθεί ως αποτέλεσμα της εφαρμογής μια L_u στο αρχικό διάγραμμα με το ελεύθερο τόξο με σήμανση “ u ” αντί για “ o ”. Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη του λήμματος, έστω ότι το τρίγωνο ολίσθησης του αρχικού up-arc περνάει πάνω ή κάτω από άλλα τόξα του διαγράμματος. Σε αυτή την περίπτωση το υποδιαιρούμε, χρησιμοποιώντας το Λήμμα 8, έως ότου τα τρίγωνα ολίσθησης να μην τέμνονται με τόξα και δίνουμε στα καινούρια τόξα τη σήμανση του αρχικού. Τέλος, εφαρμόζουμε την πιά πάνω διαδικασία σε κάθε μικρότερο up-arc και χρησιμοποιώντας το Λήμμα 8 απαλείφουμε όλα τα σημεία υποδιαίρεσης, όπως φαίνεται στο παρακάτω Σχήμα 4.13.



Σχήμα 4.13:

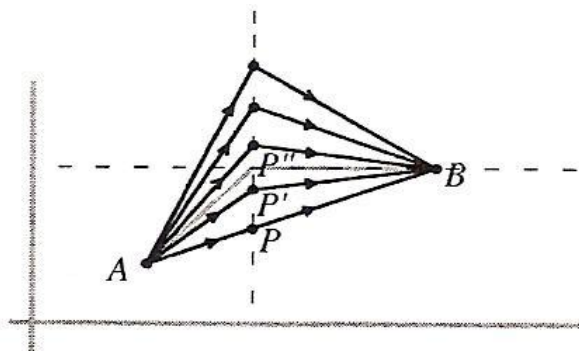
4.1.4 Το κινητικό μέρος της απόδειξης

Τώρα θα μελετήσουμε την επίδραση στις τελικές κοτσίδες των κινήσεων Δ στο διάγραμμα. Θα ξεκινήσουμε από τις κινήσεις Δ επιπέδου. Μία κίνηση Δ μπορεί να θεωρηθεί σαν μία συνεχής οικογένεια διαγραμμάτων (βλέπε Σχήμα 4.14). Από την τοπικότητα των κινήσεων Δ μπορούμε να υποθέσουμε ότι δεν

παραβιάζεται η συνθήκη τριγώνων. Επίσης, λόγω συμμετρίας θα ελέγξουμε τις κινήσεις Δ που βρίσκονται στο πρώτο τέταρτο του επιπέδου, πάνω από την πλευρά AB του σχήματος 4.14 και χωρίς βλάβη της γενικότητας το AB θα είναι up-arc. Έτσι θα ελέγξουμε δύο περιπτώσεις. Στην πρώτη, το σημείο υποδιαίρεσης βρίσκεται εντός της περιοχής που ορίζουν οι κατακόρυφες ευθείες που διέρχονται από τα A, B και στη δεύτερη, εκτός αυτής.

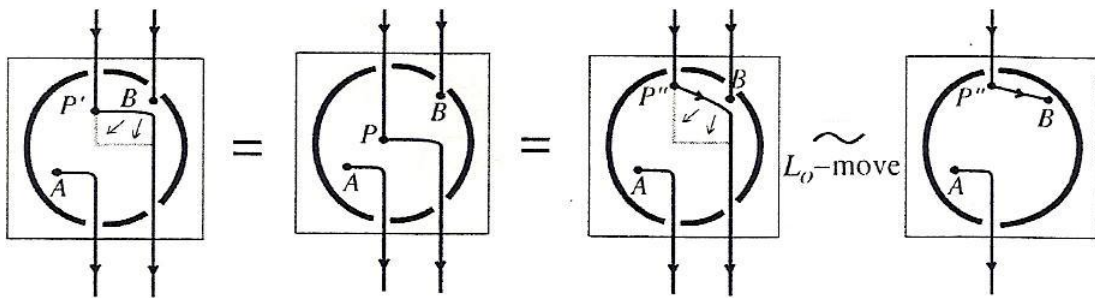
- (i) Εσωτερικό σημείο υποδιαίρεσης.

Έστω η συνεχής οικογένεια τριγώνων με πλευρά AB για τα οποία η καινούρια κορυφή βρίσκεται στην κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από ένα εσωτερικό σημείο P του AB (βλέπε ακόλουθο σχήμα).



Σχήμα 4.14:

Μία νέα κορυφή δεν μπορεί να βρίσκεται στην ίδια οριζόντια ευθεία με το B . Έτσι αν το $P'B$ είναι μία καινούρια πλευρά κάτω από την οριζόντια ευθεία του B , ισχύει η L -ισοδυναμία στις αντίστοιχες κοτσίδες. Αυτό φαίνεται εύκολα αν εισάγουμε μια κορυφή στο σημείο P του AB και εφαρμόσουμε το Λήμμα 8. Βλέπε δύο πρώτες εικόνες του Σχ. 4.15.



Σχήμα 4.15:

Αν το $P''B$ βρίσκεται πάνω από την οριζόντια ευθεία του B , εφαρμόζουμε μια κίνηση L στο σημείο B και δείχνουμε πως η κοτσίδα που παίρνουμε είναι ίδια με την κοτσίδα που θα παίρναμε αν είχαμε υποδιαίρεσει το AB στο σημείο P (βλέπε Σχήμα 4.15). Η L θα είναι “ o ” ή “ u ” αντίστοιχα με τη σήμανση του AB .

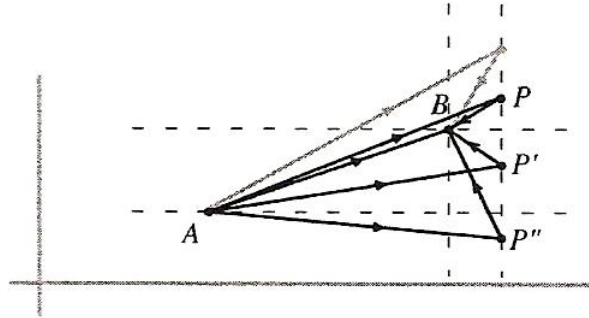
Στην περίπτωση όπου το AB είναι down-arc, μετά την υποδιαίρεση τα καινούρια τόξα θα έχουν αντίθετη φορά από αυτή που έχουμε θεωρήσει στο Σχήμα 4.15. Σε αυτή την περίπτωση, υποδιαιρώντας το AB και κάνοντας μια κίνηση L καταλήγουμε στην κοτσίδα του άλλου μέρους της κίνησης Δ .

- (ii) Εξωτερικό σημείο υποδιαίρεσης.

Από εδώ και στο εξής, με τον συμβολισμό (APB) θα δηλώνουμε την κοτσίδα που παίρνουμε εφαρμόζοντας braiding στα τόξα AP και PB .

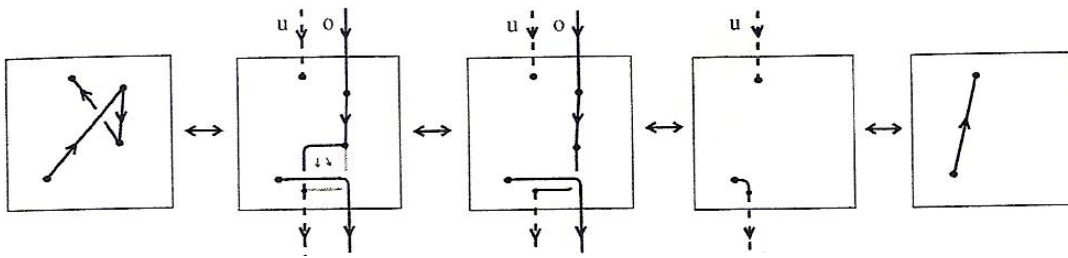
Θεωρούμε τώρα τη συνεχή οικογένεια τριγώνων με πλευρά AB με όλες τις καινούριες κορυφές να βρίσκονται έξω από την κατακόρυφη ζώνη που ορίζουν τα A και B , όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.16. Λόγω συμμετρίας, θα εξετάσουμε μόνο την περίπτωση που η κίνηση Δ γίνεται δεξιά του σημείου B . Όπως προηγουμένως, αν P' είναι μια καινούρια κορυφή, ώστε $P'B$ να βρίσκεται κάτω από την οριζόντια ευθεία του B , τότε η κοτσίδα $(AP'B)$ διαφέρει από την (APB) κατά την εφαρμογή μιας κίνησης L στο σημείο B . Αν P'' είναι μια νέα κορυφή ώστε το $P''A$ να βρίσκεται κάτω από την οριζόντια ευθεία του A , τότε

η κοτσίδα $(AP''B)$ είναι ίδια με την $(AP'B)$. Όμοια, στην περίπτωση που η νέα κορυφή βρίσκεται πάνω από την οριζόντια ευθεία του B .



Σχήμα 4.16:

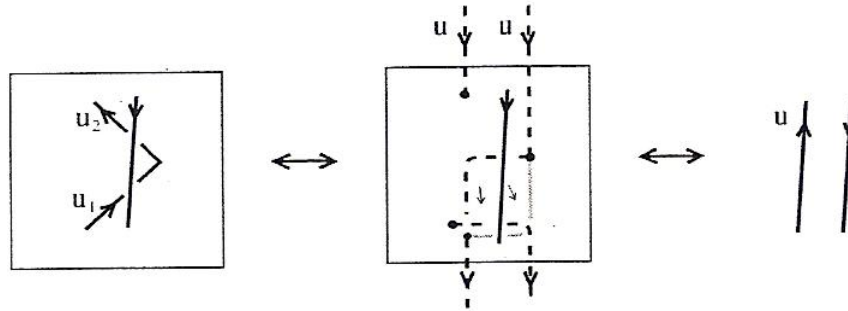
Τέλος, θα ελέγξουμε τις κινήσεις Reidemeister. Για την RI , παρουσιάζουμε, για παράδειγμα, στο Σχήμα 4.17, ότι η κοτσίδα που παίρνουμε μετά την εφαρμογή της κίνησης RI είναι L -ισοδύναμη με αυτή που παίρνουμε πριν την εφαρμογή της κίνησης, μέσω ισοτοπίας κοτσίδων και μίας κίνησης L_0 .



Σχήμα 4.17:

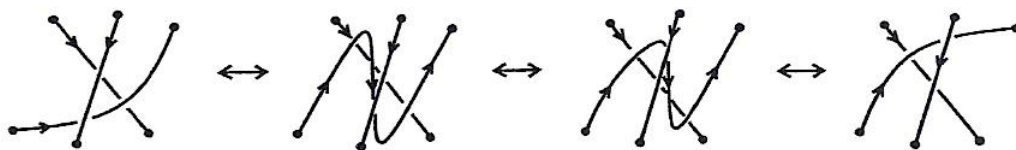
Για την κίνηση RII ολοκληρώνουμε το braiding στο αριστερό διάγραμμα του Σχ. 4.18 και παρατηρούμε ότι, χρησιμοποιώντας ισοτοπία κοτσίδων, όπως δείχνουν τα βελάκια στη μεσαία εικόνα, μπορούμε να αφαιρέσουμε μια κίνηση L_u . Τότε, καταλήγουμε στην κοτσίδα που θα παίρναμε από το braiding του

δεξιού διαγράμματος στο Σχ. 4.18, με σήμανση “ u ” για το up-arc όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.18.



Σχήμα 4.18:

Τέλος, θα ελέγξουμε την κίνηση $RIII$. Αν και τα τρία τόξα είναι down-arcs, τότε η κίνηση είναι μία ισοτοπία κοτσίδων. Αν το τελείως πάνω ή το τελείως κάτω τόξο είναι up-arc, τότε η κίνηση $RIII$ είναι αόρατη σε επίπεδο κοτσίδων. Μένει να εξετάσουμε την περίπτωση που τα δύο εξωτερικά τόξα είναι down-arcs και το ενδιάμεσο είναι up-arc. Αλλά με την ισοτοπία που παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.19 (μια RII) βρισκόμαστε στην περίπτωση μιας $RIII$ με όλα τα τόξα να είναι down-arcs. Τελικά, με μια κίνηση RII καταλήγουμε στην δεξιά πλευρά της κίνησης $RIII$, βλέπε Σχήμα 4.19.



Σχήμα 4.19:

Εδώ ολοκληρώνεται η απόδειξη του Θεωρήματος Markov μιας κίνησης, το οποίο, όπως δείξαμε, είναι ισοδύναμο με το κλασικό Θεώρημα Markov.

□

Άλλες αποδείξεις του Θεωρήματος Markov έχουν δοθεί από τους H.R. Morton (1986) [10] χρησιμοποιώντας τον δικό του αλγόριθμο “threading” για μετατροπή διαγραμμάτων σε κοτσίδες, P. Traczyk (1998) [12] χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Vogel και από τους J.S. Birman-W.W. Menasco (2001) [5] χρησιμοποιώντας τις ιδέες του D. Bennequin (1982) [3].

Βιβλιογραφία

- [1] C.C.Adams: "*The Knot Book: An elementary introduction to the mathematical theory of knots*", W.H.Freeman and Company New York (1994)
- [2] J.W.Alexander: "*A Lemma on systems of knotted curves*", Bulletin of the American Mathematical Society, Ser.2, 26, No.8, (1923) 369-372
- [3] D.Bennequin: "*Entrelacements et équations de Pfaffe*", Third Schnepfenried geometry conference, Vol.1, (Schnepfenried, 1982), 87-161, Astérisque, 107-108, Societé Mathématique de France, Paris, (1983)
- [4] J.S.Birman: "*Braids, Links and Mapping class Group*", Annals of Math. Studies no.82, Prinston Univ. Press, New Jersey, (1976)
- [5] J.S.Birman, W.W.Menasco: "*On Markov's Theorem*", Journal of Knot Theory and its Ramifications, Vol.11, no.3 (2002) 295-310
- [6] S.Lambropoulou: "*Short proofs of Alexander's and Markov's theorems*", Preliminary Version (September 1990)
- [7] S.Lambropoulou, C.P.Rourke: "*Markov's Theorem in 3-manifolds*", Topology and its Application 78 (1997) 95-122
- [8] Σ.Λαμπροπούλου: "*Σημειώσεις Μεταπτυχιακού μαθήματος Θεωρίας Κόμβων*", Τομέας Μαθηματικών Ε.Μ.Π. (2007)

-
- [9] A.A.Markov: "*Über die freie Äquivalenz geschlossener Zöpfe*", Rec. Math. Moscou 1 (1935)
- [10] H.R.Morton: "*Threading knot diagrams*", Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 99 (1986) 247-260
- [11] K.Reidemeister: "*Elementare Begründung der Knotentheorie*", Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 5 (1927) 24-32
- [12] P.Traczyk: "*A new proof of Markov's Braid theorem*", Knot Theory Banach Center Publication, Vol.42, Institute of Mathematics Polish Academy of Sciences, Warszawa (1998)
- [13] P.Vogel: "*Representation of links by braid: A new algorithm*", Commentarii Mathematici Helvetici 65 (1990) 104-113
- [14] N.Weinberg: "*Sur l' equivalence libre des tresses fermées*", Dokl. Akad. Nauk SSSR 23 (1939) 215-216
- [15] S.Yamada: "*The minimal number of Seifert circles equals the braid index of a link*", Inventiones mathematicae 89, Springer-Verlag (1987) 347-356