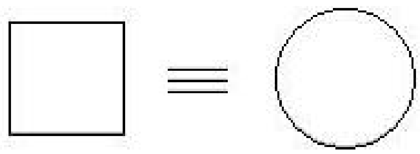
<u>Σημειώσεις στη Θεωρία Κόμβων</u>
<u>Διαμαντής Ιωάννης</u>

1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

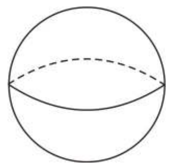
ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}^3$ και $f : A \to B$ συνάρτηση. Ο f καλείται *ομοιομορφισμός* αν είναι ένα προς ένα, συνεχής και έχει συνεχή αντίστροφη εικόνα. Τα σύνολα Α και Β καλούνται τότε *ομοιομορφικά*.

ΤΟΠΟΛΟΓΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

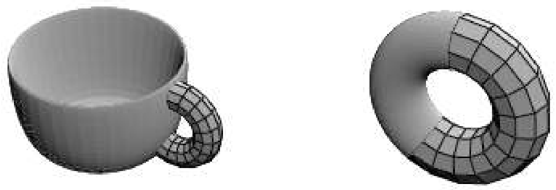
1. $I = D^1 \subset \mathbb{R}$.
2. $I \times I = D^2 \subset \mathbb{R}^2$.



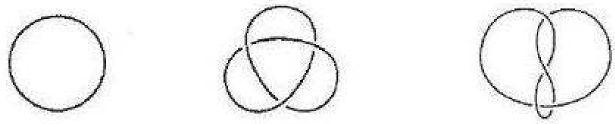
3. $I^3 \sim D^3$ ή B^3.



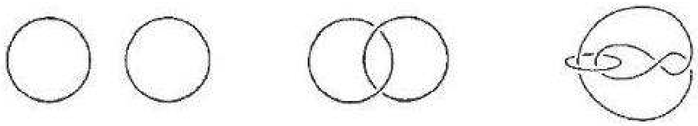
4.



ΟΡΙΣΜΟΣ Ένας *κόμβος K* είναι μια εμφύτευση του κύκλου S^1 στον χώρο $\mathbb{R}^3$ ή στην σφαίρα S^3.



ΟΡΙΣΜΟΣ Ένας *κρίκος* L είναι μια εμφύτευση από n αντίγραφα του S^1 στον χώρο $\mathbb{R}^3$ ή στην σφαίρα S^3.



ΟΡΙΣΜΟΣ Δύο κόμβοι K_1, K_2 θα ονομάζονται *ισοτοπικοί*, όταν υπάρχει ομοιομορφισμός $h:\left(S^3, K_1\right) \to \left(S^3, K_2\right)$ τέτοιος ώστε $h\left(K_1\right) = K_2$. Συμβολικά γράφουμε $K_1 \sim K_2$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Ο τετριμμένος κόμβος και ο κόμβος trefoil είναι ομοιομορφικοί, όμως δεν είναι ισοτοπικοί. Ισοτοπικοί θα ήταν αν το ζεύγος $\mathbb{R}^3$ με τον τετριμμένο ήταν ομοιομορφικό με το ζεύγος $\mathbb{R}^3$ και τον κόμβο trefoil.

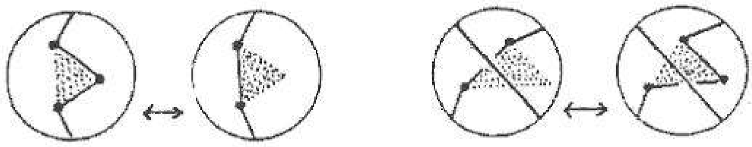
ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ Να ταξινομηθούν οι κόμβοι ως προς την έννοια της ισοτοπίας.

ΘΕΩΡΗΜΑ Ένας *tame* κόμβος είναι ισοτοπικός με μια κλειστή πολυγωνική γραμμή.

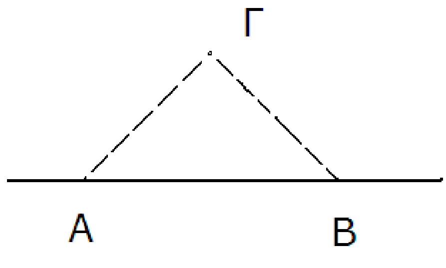
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

□

ΟΡΙΣΜΟΣ Κινήσεις Δ στο χώρο (ισοτοπία επιπέδου) καλούνται οι κινήσεις της μορφής που παρουσιάζονται στο παρακάτω σχήμα.



Έστω A, B δύο κοντινά σημεία ενός κόμβου K. Εισάγουμε ένα σημείο Γ στο χώρο, ώστε η επιφάνεια του $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ να μην τέμνει τον κόμβο. Αντικαθιστούμε το τόξο (AB) από το $(\mathrm{A\Gamma} + \mathrm{\Gamma B})$.



ΘΕΩΡΗΜΑ Μία ισοτοπία κόμβων μπορεί να πραγματοποιηθεί από μία αλληλουχία κινήσεων Δ .

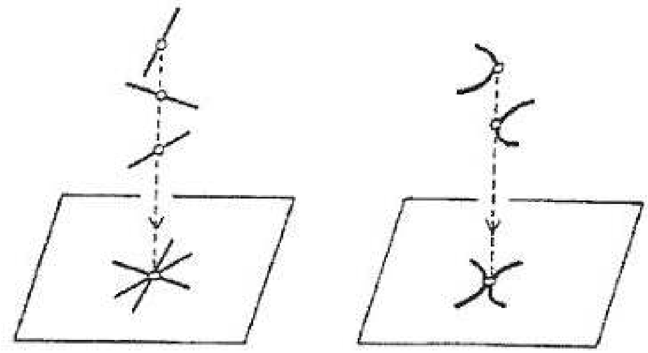
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

□

Από τον ορισμό ενός κόμβου προκύπτει ότι οι κόμβοι «ζουν» στις τρεις διαστάσεις. Για τη μελέτη τους όμως είναι βολικό να χρησιμοποιούμε την κάθετη προβολή τους σε ένα επίπεδο έτσι ώστε να ισχύουν τα παρακάτω:

1. Οι εφαπτόμενες ευθείες σε όλα τα σημεία του κόμβου θα πρέπει να προβάλλονται πάνω σε ευθείες του επιπέδου προβολής (δηλαδή οι προβολές των εφαπτομένων δεν εκφυλίζονται ποτέ σε σημείο).
2. Δεν προβάλλονται παραπάνω από δύο σημεία του κόμβου σε ένα σημείο του επιπέδου.
3. Δύο διαφορετικά σημεία του κόμβου μπορούν να προβληθούν στο ίδιο σημείο του επιπέδου μόνο αν οι προβολές των εφαπτομένων τους δεν συμπίπτουν.
4. Το σύνολο των σημείων διασταύρωσης, στα οποία προβάλλονται δύο σημεία είναι πεπερασμένο.

Για παράδειγμα, δεν επιτρέπονται οι δύο καταστάσεις που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



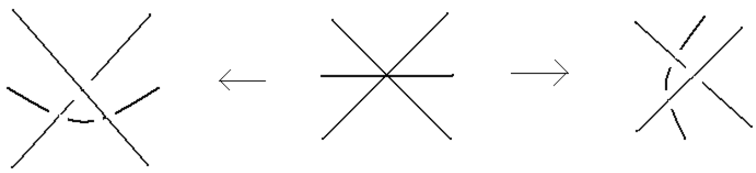
ΟΡΙΣΜΟΣ Μία προβολή κόμβου στο επίπεδο, τέτοια ώστε να υπάρχουν μόνο διπλά σημεία (όχι τριπλά) και σε κάθε διασταύρωση να υπάρχει η πληροφορία «πάνω», «κάτω», να μην υπάρχουν εφαπτομενικά σημεία και να μην υπάρχουν σημεία αναδρομής, ονομάζεται *διάγραμμα κόμβου*.

Το σύνολο των παθολογικών προβολών είναι μέτρου μηδέν στο σύνολο όλων των προβολών, όπως φαίνεται από το παρακάτω:

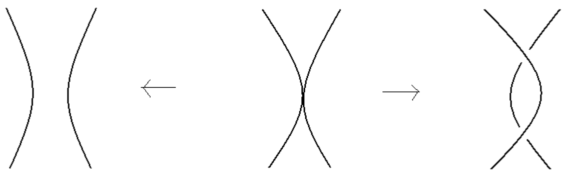
ΠΡΟΤΑΣΗ Μπορεί πάντα να βρεθεί κατάλληλο επίπεδο προβολής ενός κόμβου έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι παραπάνω συνθήκες.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

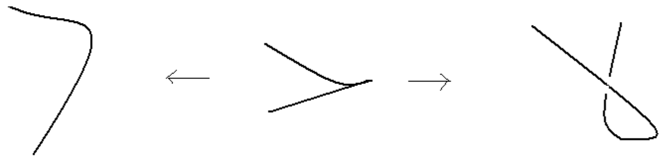
Διόρθωση τριπλής διασταύρωσης:



Διόρθωση εφαπτομενικού σημείου:



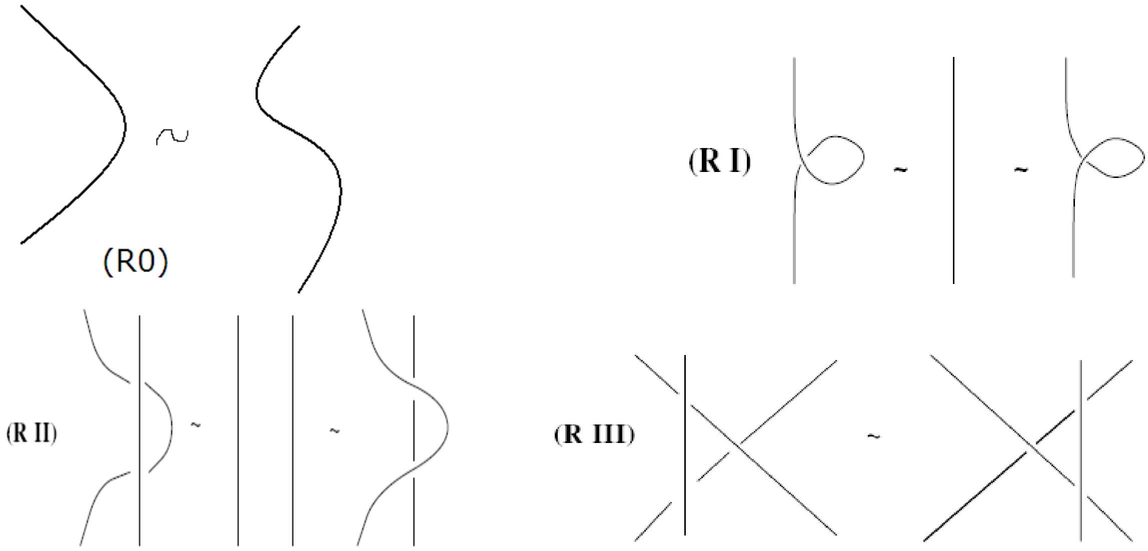
Διόρθωση σημείου αναδρομής (cusp):



□

Η ισοτοπία στο χώρο μπορεί να μεταφραστεί σε ισοτοπία διαγραμμάτων μέσω του παρακάτω θεωρήματος.

ΘΕΩΡΗΜΑ *(Reidemeister; 1935)* Δύο κόμβοι K_1, K_2 είναι *ισοτοπικοί* αν και μόνο αν οποιαδήποτε δύο διαγράμματά τους $D(K_1), D(K_2)$ διαφέρουν κατά πεπερασμένο πλήθος κινήσεων Reidemeister και ισοτοπιών επιπέδου.



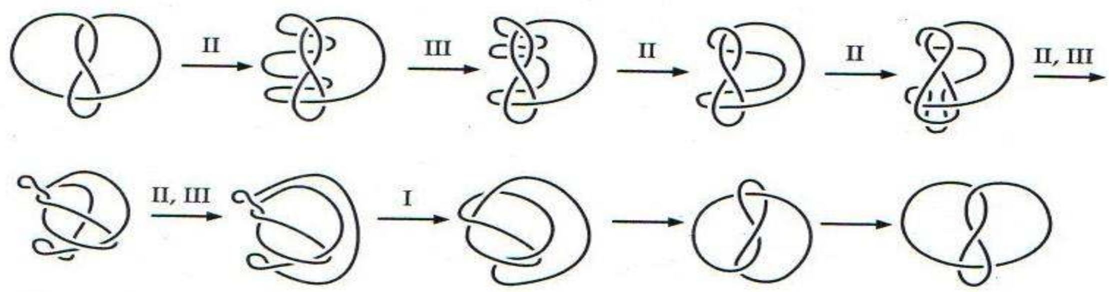
Για την απόδειξη ο Reidemeister χρησιμοποίησε τις κινήσεις Δ.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ Οι κινήσεις που παρουσιάζονται στο παρακάτω σχήμα δεν μπορούν να αποτελούν κινήσεις Reidemeister διότι δεν μπορούν να προέρχονται από κινήσεις Δ.

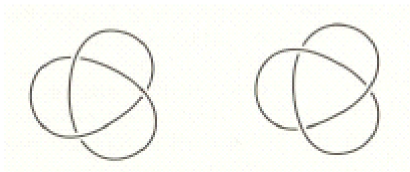
ΆΣΚΗΣΗ 1. Να δείξετε ότι κάθε κίνηση Reidemeister μπορεί να πραγματοποιηθεί με μία κίνηση Δ.

ΟΡΙΣΜΟΣ Η *κατοπτρική εικόνα* (*mirror image*) $\overline{K}$ ενός κόμβου K προκύπτει με αλλαγή όλων των διασταυρώσεων σε ένα διάγραμμά του. Ένας κόμβος που είναι ισοτοπικός με την κατοπτρική του εικόνα καλείται *αμφίχειρας* (*achiral).*

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Ο κόμβος figure-8 είναι ισοτοπικός με την κατοπτρική του εικόνα.



ΆΣΚΗΣΗ 2. Είναι ισοτοπικοί οι παρακάτω κόμβοι;



Ένας κρίκος λέγεται προσανατολισμένος όταν επιλέγεται ένας προσανατολισμός για κάθε συνιστώσα του. Τα παραπάνω περί ισοτοπίας ισχύουν και για προσανατολισμένους κρίκους, όπου στις κινήσεις ισοτοπίας εννοούνται όλοι οι πιθανοί προσανατολισμοί.

ΟΡΙΣΜΟΣ Ένας προσανατολισμένος κρίκος L καλείται *αμφίχειρας* όταν είναι ισοτοπικός με τον όμοια προσανατολισμένο κατοπτρικό του, ενώ ένας κρίκος καλείται *αντιστρέψιμος* (*invertible*) αν υπάρχει ισοτοπία που απεικονίζει τον L στον εαυτό του, με αντίθετο όμως προσανατολισμό.

Για παράδειγμα ο κόμβος trefoil είναι αντιστρέψιμος και μη αμφίχειρας, ενώ ο κόμβος 8_{17} είναι αμφίχειρας, αλλά δεν είναι αντιστρέψιμος.

Ως προς την αμφιχειρία προσανατολισμένων ή μη κρίκων έχουμε τα παρακάτω:

ΠΡΟΤΑΣΗ Έστω L κρίκος και έστω L' μία επιλογή προσανατολισμού του L. Τότε: $L \sim L^* \Rightarrow L' \sim L''^*$, για κάποιο προσανατολισμό L'' του L. Ισοδύναμα, αν L' μη ισοτοπικός με τον L''^* για κάθε επιλογή προσανατολισμού L'' του L, τότε και ο μη προσανατολισμένος κρίκος L δεν είναι ισοτοπικός με την κατοπτρική του εικόνα L^*.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έστω L' μη ισοτοπικός με τον L''^* για κάθε δυνατές επιλογές προσανατολισμού. Όμως, $L \sim L^*$, άρα υπάρχει πεπερασμένη ακολουθία κινήσεων Reidemeister από τον κρίκο L στον L^* και επιλέγοντας προσανατολισμό για τον L, έστω τον L', θα καταλήξουμε στον L^* με κάποιον (άλλο πιθανώς) προσανατολισμό L''^*, δηλαδή $L' \sim L''^*$, άτοπο. □

ΠΡΟΤΑΣΗ Αν υπάρχουν προσανατολισμοί L', L'' του κρίκου L τέτοιοι ώστε $L' \sim L''^* \Rightarrow L \sim L^*$. Ισοδύναμα, αν L μη ισοτοπικός με την κατοπτρική του εικόνα L^*, τότε για κάθε δυνατή επιλογή προσανατολισμών L', L'' θα είναι και ο L' μη ισοτοπικός με τον L''^*. Συγκεκριμένα, για $L' = L''$ αν L μη ισοτοπικός με την κατοπτρική του εικόνα L^*, τότε και ο L' θα είναι μη ισοτοπικός με τον L'^*.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Εφόσον $L' \sim L''^*$, θα υπάρχει μία πεπερασμένη ακολουθία προσανατολισμένων κινήσεων Reidemeister από τον κρίκο L' στον L''^*. Τότε, ξεχνώντας τον προσανατολισμό, η ίδια ακολουθία κινήσεων είναι μία ισοτοπία από τον κρίκο L στον κατοπτρικό του L^*. □

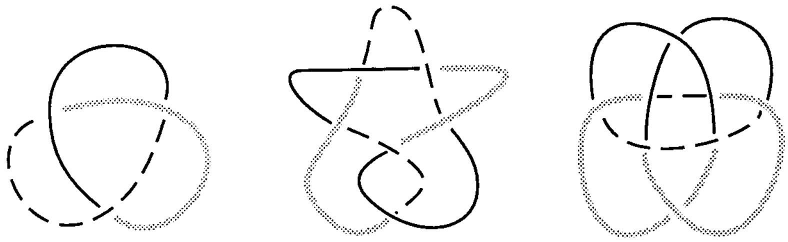
1.2 ΚΛΑΣΣΙΚΕΣ ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΕΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ Μία συνάρτηση $I:\{κόμβοι\}\to L$, όπου το σύνολο L μπορεί να αποτελείται από σύμβολα, αριθμούς, πολυώνυμα κλπ, λέγεται *αναλλοίωτη κόμβων* αν ισχύει: $K_1 \sim K_2 \Rightarrow I(K_1)=I(K_2)$.

Τοπολογικό Συμπλήρωμα: $K_1 \overset{ισοτ.}{\sim} K_2 \Rightarrow S^3\setminus K_1 \overset{ομοιομ.}{\sim} S^3\setminus K_2$.

Τριχρωματισιμότητα: Χρωματίζουμε τον κόμβο έτσι ώστε να χρησιμοποιηθούν τρία χρώματα και σε κάθε διασταύρωση να συναντιούνται και τα τρία χρώματα ή μόνο ένα χρώμα.

Ο κόμβος trefoil είναι τριχρωματίσιμος ενώ ο τετριμμένος κόμβος δεν είναι.



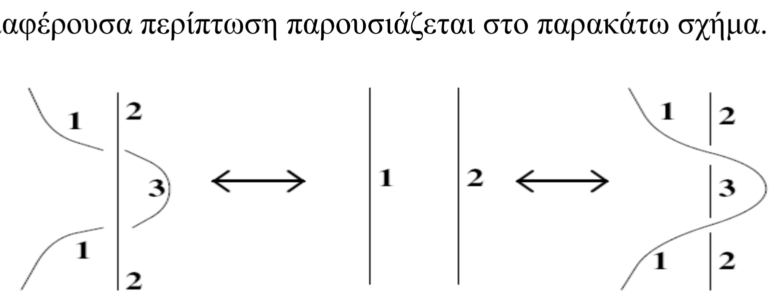
ΆΣΚΗΣΗ 3. Δ.ό. ο κόμβος figure-8 δεν είναι τριχρωματίσιμος;

ΠΡΟΤΑΣΗ Η τριχρωματισιμότητα αποτελεί αναλλοίωτη ισοτοπίας.

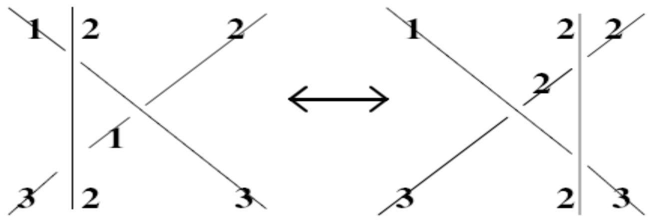
ΑΠΟΔΕΙΞΗ Αρκεί να εξετάσουμε την ιδιότητα «τριχρωματισιμότητα» ως προς όλες τις δυνατές περιπτώσεις των κινήσεων Reidemeister. Δηλαδή αν ένας κόμβος είναι τριχρωματίσιμος, τότε μέσω των κινήσεων Reidemeister παραμένει τριχρωματίσιμος.

RI. Παρατηρήστε ότι δύο τόξα εμπλέκονται στη διασταύρωση που αφαιρείται ή προστίθεται από την κίνηση αυτή. Αν λοιπόν προσθέσουμε μία διασταύρωση τότε αφήνουμε τα δύο τόξα με το ίδιο αρχικό χρώμα και ομοίως όταν αφαιρούμε μία διασταύρωση με κίνηση R1.

RII. Η πιο ενδιαφέρουσα περίπτωση παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα.



RIII. Πέρα από την τετριμμένη περίπτωση, όπου όλα τα τόξα είναι χρωματισμένα με το ίδιο χρώμα και διακρίνουμε άλλες δύο περιπτώσεις. Είτε και τα τρία χρώματα συναντώνται και στις τρεις διασταυρώσεις, είτε υπάρχει ακριβώς μία διασταύρωση που συναντάται ακριβώς ένα χρώμα.

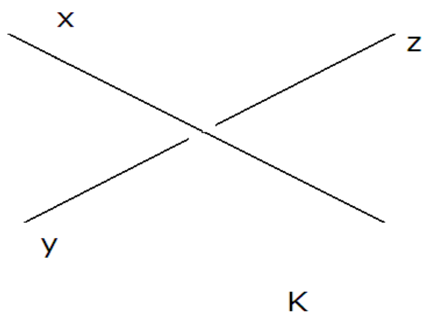


□

Επομένως, από αναλλοίωτη τριχρωματισιμότητας, ο κόμβος trefoil δεν είναι ισοτοπικός με τον τετριμμένο και με τον κόμβο figure-8, αφού κόμβος trefoil είναι τριχρωματίσιμος, ενώ οι άλλοι όχι. Δεν μπορούμε όμως να αποφανθούμε αν είναι ισοτοπικοί ή όχι ο τετριμμένος και ο κόμβος figure-8.

ΆΣΚΗΣΗ 4. Ποιοι κόμβοι μέχρι και 7 διασταυρώσεων είναι τριχρωματίσιμοι;

ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ Έστω ότι έχουμε $p \neq 2$ χρώματα με ίδιους κανόνες (τρία ή ένα χρώματα σε κάθε διασταύρωση). Έστω $\{0,1,\dots,p-1\}$ χρώματα και έστω $x,y,z \in \{0,1,\dots,p-1\}$ τέτοια ώστε



Τότε ο K είναι $p-$χρωματίσιμος αν και μόνο αν: $2x-y-z \equiv 0 \pmod{p}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ Αν κάποιο διάγραμμα $D(K)$ ενός κόμβου K είναι $p-$χρωματίσιμο, τότε κάθε διάγραμμά του είναι $p-$χρωματίσιμο.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Εξετάζοντας κινήσεις Reidemeister.

□

ΆΣΚΗΣΗ 5. Ποιοι κόμβοι μέχρι 6 διασταυρώσεις είναι 5-χρωματίσιμοι;

ΆΣΚΗΣΗ 6. Ν.Δ.Ο. οι κόμβοι $4_1, 7_1, 8_{16}$ ξεχωρίζονται με χρωματισμούς $(\bmod 5)$ και $(\bmod 7)$.

Αριθμός Διασταυρώσεων (crossing number), $c(K)$: Είναι ο ελάχιστος αριθμός διασταυρώσεων στο σύνολο όλων των διαγραμμάτων της κλάσεως ισοτοπίας του K.

ΆΣΚΗΣΗ 7. Ν.δ.ό. υπάρχει πεπερασμένος αριθμός κόμβων με $c(K) = n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Αριθμός Λύσεως (unknotting number), $u(K)$: Είναι ο ελάχιστος αριθμός αλλαγής διασταυρώσεων για να μεταβούμε από ένα κόμβο στο τετριμμένο.

ΠΟΡΙΣΜΑ $u(K) = 0 \Leftrightarrow K \sim \bigcirc$.

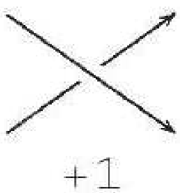
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ $u(trefoil) = 1$. Άρα ο κόμβος trefoil δεν είναι ισοτοπικός με τον τετριμμένο κόμβο.

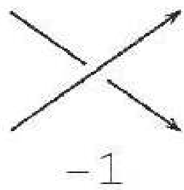
ΣΗΜΕΙΩΣΗ Προφανώς, αν αλλάξουμε μία διασταύρωση στον κόμβο K, *μπορεί* να καταλήξουμε σε μη ισοτοπικό κόμβο.

Οι αριθμοί $c(K)$ και $u(K)$ είναι προφανώς αναλλοίωτες ισοτοπίας για τον κόμβο K. Είναι όμως πολύ δύσκολο να υπολογιστούν.

Αριθμός Συνέλιξης (linking number): Έστω προσανατολισμένος κρίκος L και c_1, c_2 δύο συνιστώσες του L. Ορίζουμε: $lk(c_1, c_2) = \frac{1}{2}\sum sign($*διασταυρώσεων* μεταξύ $c_1, c_2)$

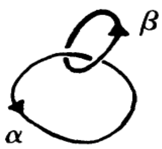
Όπου





.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ



$$lk(\alpha, \beta) = \tfrac{1}{2}(1 + 1) = 1.$$

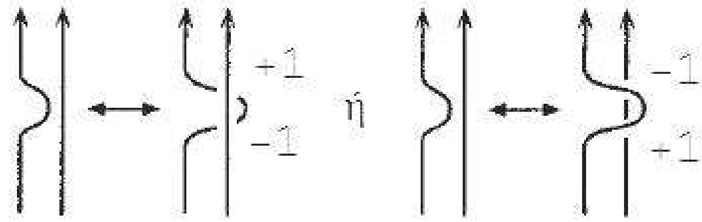
$$lk(\alpha', \beta') = \tfrac{1}{2}(-1 - 1) = -1.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ Ο αριθμός συνέλιξης αποτελεί αναλλοίωτη ισοτοπίας.

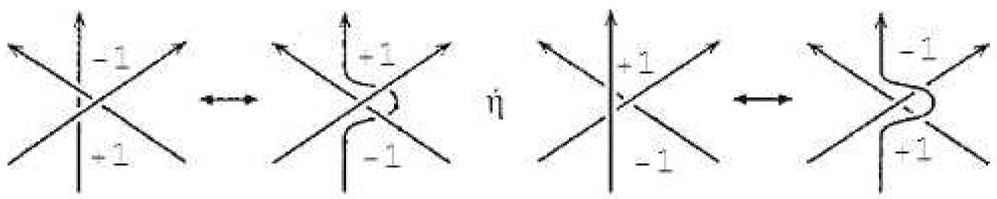
ΑΠΟΔΕΙΞΗ Με κινήσεις Reidemeister στον προσανατολισμένο κρίκο L έχουμε:

RI. Η κίνηση Reidemeister I δημιουργεί ή εξαλείφει μία διασταύρωση μεταξύ μιας συνιστώσας του κρίκου και του εαυτού της. Άρα η τιμή του αριθμού συνέλιξης δεν αλλάζει.

RII.



RIII.



□

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Αριθμός Γεφυρών (bridge number) $b(K)$: Το κομμάτι AB ονομάζεται γέφυρα ή maximal overpass (bridge). Ο ελάχιστος αριθμός γεφυρών (τετριμμένα τόξα) πάνω σε όλα τα διαγράμματα ενός κόμβου K λέγεται bridge number του K.

Παραδείγματα

1. Ο τετριμμένος έχει $b(K)=0$.
2. Ο κόμβος trefoil έχει $b(K)=2$.

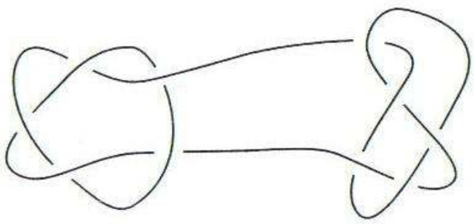
3. Οι ρητοί κόμβοι (ή two-bridge knots) έχουν $b(K)=2$.

ΆΣΚΗΣΗ 8. Ν.δ.ό. αν ένας κόμβος K έχει $b(K)=1$, τότε θα πρέπει να είναι ο τετριμμένος.

ΆΣΚΗΣΗ 9. Ν.δ.ό. ο κόμβος 5_2 έχει $b(5_2)=2$.

ΆΣΚΗΣΗ 10. Ν.δ.ό. για κάθε μη τετριμμένο κόμβο K ισχύει ότι ο αριθμός $b(K)$ είναι μικρότερος ή ίσος από τον ελάχιστο αριθμό διασταυρώσεων σε κάθε διάγραμμα του K. (Υπόδειξη: Δείτε χωριστά τις περιπτώσεις ο K να είναι εναλλασσόμενος ή μη εναλλασσόμενος.)

ΟΡΙΣΜΟΣ Ένας κόμβος καλείται *εναλλασσόμενος* (*alternating*) αν στην προβολή του οι διασταυρώσεις εναλλάσσονται πάνω και κάτω, καθώς κανείς κινείται πάνω στον κόμβο με μια συγκεκριμένη φορά.

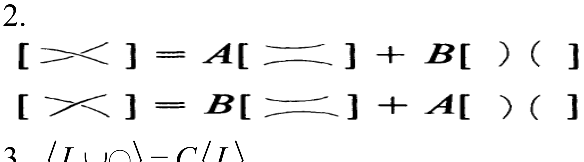


1.3 Το πολυώνυμο Kauffman bracket και το πολυώνυμο Jones (1984)

Θεωρούμε μη προσανατολισμένους κόμβους (ή κρίκους). Θα κατασκευάσουμε την απεικόνιση $\langle\ \rangle$ (bracket) που να είναι αναλλοίωτη ισοτοπίας και να ικανοποιεί τους παρακάτω κανόνες.

$$\langle\ \rangle : \{\textit{σύνολο} \text{ διαγραμμάτων}\} \to \textit{πολυώνυμο} \text{ Laurent μεταβλητής A}$$

ΚΑΝΟΝΕΣ

1. $\langle \bigcirc \rangle = 1$
2.

3. $\langle L \cup \bigcirc \rangle = C\langle L \rangle$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

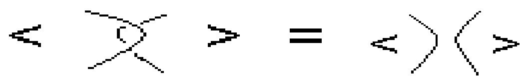
Από τους κανόνες υπολογίζεται το $\langle K \rangle$, με επαγωγή στον αριθμό των διασταυρώσεων. Πράγματι, έστω ότι γνωρίζουμε το $\langle\ \rangle$ όλων των διαγραμμάτων με n διασταυρώσεις και έστω K ένα διάγραμμα με $n+1$ διασταυρώσεις. Τότε εξομαλύνουμε μία διασταύρωση βάσει των κανόνων (2- γραμμικές σχέσεις) και καταλήγουμε σε δύο διαγράμματα με n διασταυρώσεις. Άρα εξ' επαγωγής υπολογίζουμε το $\langle\ \rangle$. Επίσης το $\langle\ \rangle$ για $n=0$ διασταυρώσεις υπολογίζεται από τον (1) και (3) κανόνα.

Για να γίνει το $\langle\ \rangle$ αναλλοίωτη ισοτοπίας κόμβων θα πρέπει να μην αλλάζει η τιμή του με κινήσεις Reidemeister.

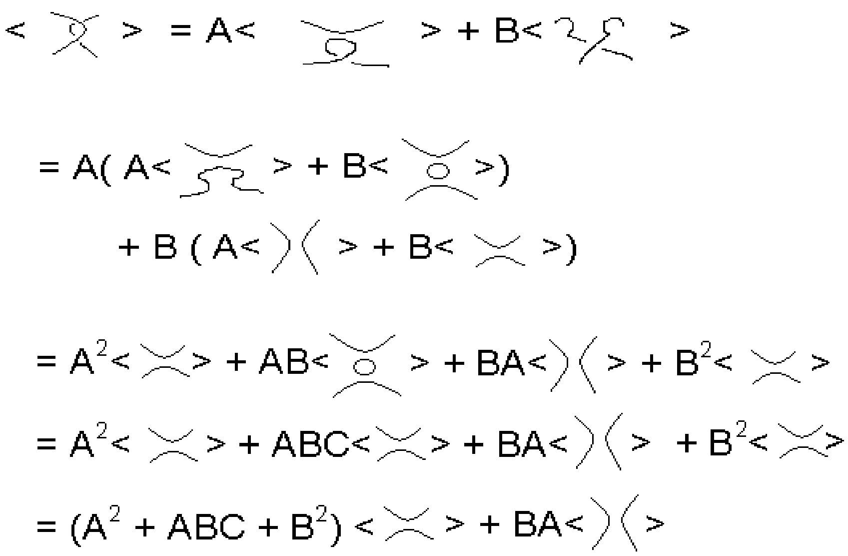
ΟΡΙΣΜΟΣ Ισοδυναμία διαγραμμάτων ως προς τις RII και RIII λέγεται *κανονική ισοτοπία* (*regular isotopy*).

Θα κάνουμε το $\langle\ \rangle$ αναλλοίωτη κανονικής ισοτοπίας:

Εξετάζουμε κατ' αρχάς το $\langle\ \rangle$ ως προς την κίνηση RII:
Θέλουμε:



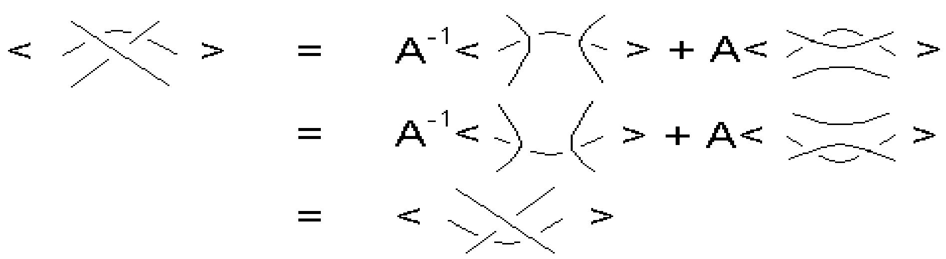
Έχουμε:



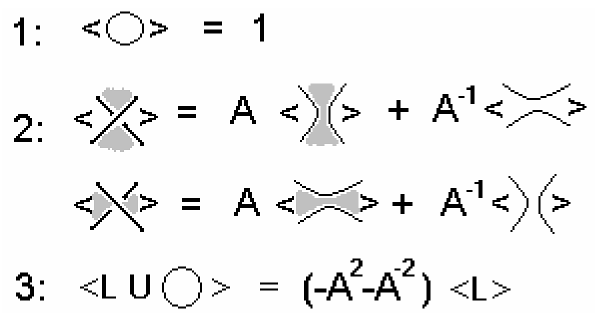
Και άρα θα πρέπει:

$$\left\{\begin{array}{l} AB=1 \\ A^2+ABC+B^2=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} B=A^{-1} \\ A^2+A^{-2}+C=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} B=A^{-1} \\ C=-A^2-A^{-2} \end{array}\right\}$$

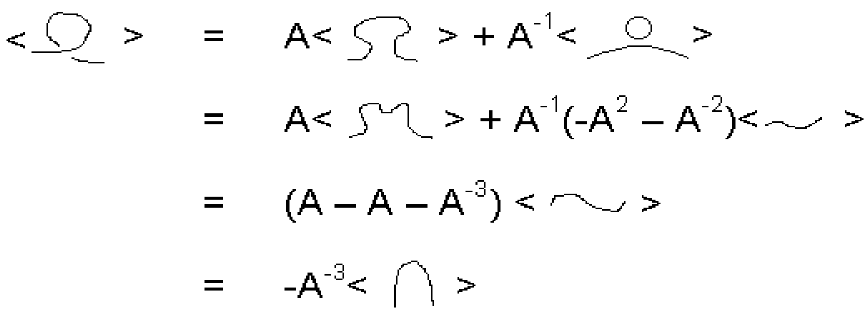
Ως προς την κίνηση RIII έχουμε:



Άρα το $\langle\ \rangle$ είναι αναλλοίωτη κανονικής ισοτοπίας με κανόνες:



Ως προς την κίνηση RI έχουμε:



Για να ικανοποιείται η κίνηση RI, θα έπρεπε $-A^3 = 1$ (πράγμα που δε θέλουμε), και επομένως το πολυώνυμο $\langle\ \rangle$ δεν αποτελεί αναλλοίωτη πλήρους ισοτοπίας.

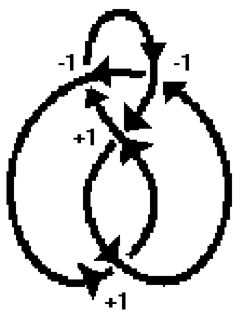
Θα χρησιμοποιήσουμε το $\langle\ \rangle$, το οποίο θεωρούμε ως πολυώνυμο Laurent μεταβλητής A για να ορίσουμε ένα άλλο πολυώνυμο που να είναι αναλλοίωτη πλήρους ισοτοπίας.

ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω K διάγραμμα προσανατολισμένου κόμβου ή κρίκου. Ορίζουμε τον *αριθμό συστροφής* του K (*writhe*), συμβολικά $w(K)$, ως:

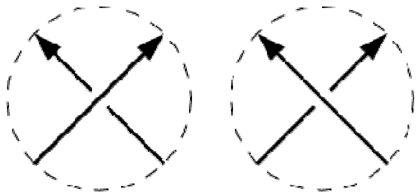
$$w(K) = \sum_{\text{όλες τις διασταυρώσεις}} sign(\delta\iota\alpha\sigma\tau\alpha\acute{\upsilon}\rho\omega\sigma\eta\varsigma).$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ο κόμβος figure-8 έχει $w = 0$.



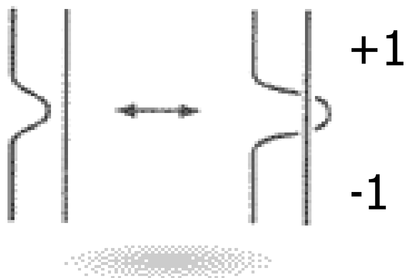
Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζεται η θετική και αρνητική διασταύρωση.



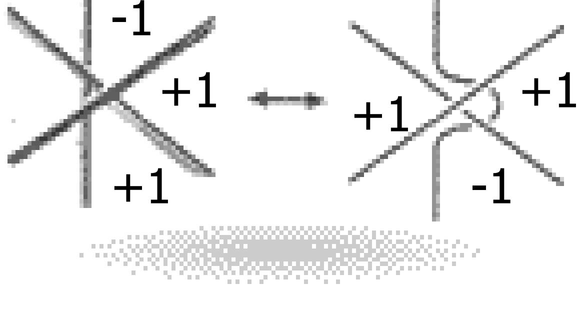
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Ο αριθμός συστροφής μεταβάλλεται από την κίνηση RI κατά ± 1.
2. Ο αριθμός συστροφής είναι αναλλοίωτη κανονικής ισοτοπίας.

Πράγματι, για την RII έχουμε ότι:



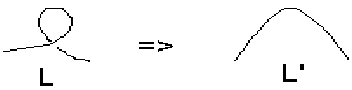
Και για την RIII έχουμε:



ΟΡΙΣΜΟΣ Ορίζουμε τη συνάρτηση
$X:\{\textit{προσανατολισμένα}\ \text{διαγράμματα}\} \to \{\textit{πολυώνυμα}\ \text{Laurent ως προς A}\}$
Τέτοια ώστε $X(L) := \left(-A^{3}\right)^{-w(L)}\langle L\rangle$ (πολυώνυμο Jones του L).

ΘΕΩΡΗΜΑ Το πολυώνυμο Jones είναι αναλλοίωτη (πλήρους) ισοτοπίας.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Το $X(L)$ είναι αναλλοίωτη κανονικής ισοτοπίας (αφού και το $\langle\ \rangle$ και το $w(L)$ δεν μεταβάλλονται από κινήσεις RII και RIII). Θα δείξουμε ότι το $X(L)$ δεν μεταβάλλεται ως προς την RI. Πράγματι:

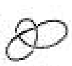


$$X(L) = (-A^{-3})^{-\omega(L)}\langle L\rangle = (-A^{-3})^{-\omega(L')+1}\langle L\rangle$$
$$= (-A^{-3})^{-\omega(L')+1}(-A^{-3})\langle L'\rangle = (-A^{-3})^{-\omega(L')+1-1}\langle L'\rangle$$
$$= (-A^{-3})^{-\omega(L')}\langle L'\rangle$$

Επομένως $X(L) = X(L')$.

□

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Θα υπολογίσουμε το πολυώνυμο bracket του κόμβου trefoil, T.

$\langle$  $\rangle = A\langle$  $\rangle + A^{-1}\langle$  $\rangle$

T

$$= A(-A^{4} - A^{-4}) + A^{-1}(-A^{-3})^{2}$$
$$= -A^{5} - A^{-3} + A^{-7}$$

ΆΣΚΗΣΗ 11. Να υπολογιστεί το bracket του κρίκου Hopf.

Θέτοντας $A^{-4} = t$: $\underbrace{X(A)}_{X-\text{πολυώνυμο}} = \underbrace{V(t)}_{\textit{αρχικό}\ \text{πολυώνυμο Jones}}$, όπως το κατασκεύασε ο V.F.R. Jones το 1984 χρησιμοποιώντας operator algebras, Von Neumann algebras και subfactor indices σε συνδυασμό με το θεώρημα Markov για κοτσίδες (και αυτό του έδωσε το fields medal).

ΙΣΤΟΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Το $V(t)$ ήταν η πρώτη ισχυρή αναλλοίωτη κόμβων (από το πολυώνυμο Alexander που θα αναλύσουμε παρακάτω).
2. 1989: Ο E. Witten χρησιμοποίησε το πολυώνυμο Jones για να κατασκευάσει μία αναλλοίωτη τρισδιάστατων πολλαπλοτήτων (3-maniflods) χρησιμοποιώντας Feynman path integrals και gauge theory (Fields medal). Οι N. Reshetikhen και V. Turaer έδωσαν μαθηματική απόδειξη των Witten invariants χρησιμοποιώντας θεωρία αναπαραστάσεων σλγεβρών Hopf.
3. Απειρία από κβαντικές αναλλοίωτες (quantum invariants, N. Reshetikhen και V. Turaer).
4. Συνάφεια με Στατιστική Μηχανική και τα μοντέλα Ising και Potts (λιώσιμο πάγου, Jones και Kauffman).
5. Εφαρμογές της Θεωρίας Κόμβων στη τοπολογία του DNA (1989, K. Ernst, D.W. Sumners).

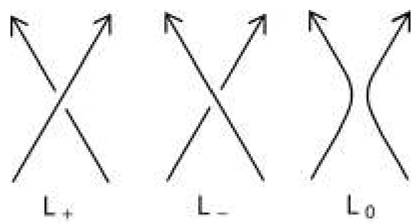
ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ: Υπάρχει μη τετριμμένος κόμβος K με $V(K)=1$;

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ JONES ΚΑΙ BRACKET

ΠΡΟΤΑΣΗ Το πολυώνυμο $V(t)$ ικανοποιεί την παρακάτω σχέση skein:

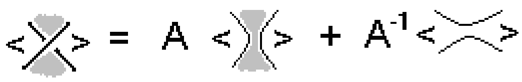
$$t^{-1}V(L_+)-tV(L_-)+\left(t^{-1/2}-t^{1/2}\right)V(L_0)=0 \qquad (*)$$

Όπου L_+,L_-,L_0 είναι προσανατολισμένα διαγράμματα κρίκων που είναι παντού ίδια εκτός από μία διασταύρωση, όπου διαφέρουν κατά μία θετική, αρνητική και μηδενική διασταύρωση αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έστω L κρίκος. Δίνουμε προσανατολισμό στον $L=L_+$ και θα δ.ό. τα $V(L_+)$, $V(L_-)$ και $V(L_0)$ ικανοποιούν την $(*)$.

Ξεκινώντας από το $\langle L\rangle$ και αγνοώντας τον προσανατολισμό έχουμε



Επειδή ο όρος  δεν είναι συμβατός με τον προσανατολισμό του L, θα απαλείψουμε τον όρο από τις παραπάνω σχέσεις. Αφαιρούμε κατά μέλη και έχουμε $A\langle L_+\rangle - A^{-1}\langle L_-\rangle = \left(A^2 - A^{-2}\right)\langle L_0\rangle$. Έστω $w_0 = w(L_0)$. Τότε $w(L_+) = w_0 + 1$ (2) και $w(L_-) = w_0 - 1$ (3). Από τις (1),(2),(3) έπεται ότι:

$$-A^4 X(L_+) + A^{-4} X(L_-) = \left(A^2 - A^{-2}\right) X(L_0) \overset{t \leftrightarrow A^{-4}}{\Leftrightarrow} t^{-1} V(L_+) + tV(L_-) = \left(t^{-1/2} - t^{1/2}\right) V(L_0)$$

□

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Η σχέση $X(L) = \left(-A^3\right)^{-w(L)} \langle L\rangle$ και η σχέση $(*)$ δείχνουν ότι το πολυώνυμο Jones δεν μεταβάλλεται αλλάζοντας τους προσανατολισμούς.

ΠΡΟΤΑΣΗ Η σχέση $(*)$ μαζί με την αρχική συνθήκη $V(\bigcirc) = 1$ αρκούν για να υπολογιστεί το $V(K)$, για κάθε κόμβο K.

Σημειώνουμε ότι η αλλαγή μίας διασταύρωσης μπορεί να οδηγήσει σε πιο πολύπλοκο διάγραμμα. Για την απόδειξη της Πρότασης έχουμε το παρακάτω:

ΛΗΜΜΑ Κάθε διάγραμμα προσανατολισμένου κόμβου γίνεται ισοτοπικό με τον τετριμμένο μετά από πεπερασμένες αλλαγές διασταυρώσεων. Αντίστοιχα, κάθε κρίκος γίνεται ισοτοπικός με τον τετριμμένο κρίκο μετά από πεπερασμένες αλλαγές διασταυρώσεων.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Στον κόμβο K επιλέγουμε αρχικό σημείο και βαδίζουμε κατά μήκος του K σύμφωνα με τον προσανατολισμό του. Κάθε φορά που συναντάμε μία διασταύρωση για πρώτη φορά, αν βρεθούμε στο κάτω τόξο της την αλλάζουμε. Αν βρεθούμε στο πάνω, την αφήνουμε ως έχει. Όταν ολοκληρωθεί η βόλτα έχουμε ένα «κατιόν» διάγραμμα (σαν ελατήριο), που είναι ισοτοπικό με τον τετριμμένο.

Σε περίπτωση κρίκου, αριθμούμε τις συνιστώσες και ακολουθούμε την παραπάνω διαδικασία, ώστε η i-συνιστώσα να βρίσκεται πάνω από την $i+1$-συνιστώσα και καταλήγουμε στον τετριμμένο κρίκο.

□

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΠΡΟΤΑΣΗΣ Έστω διάγραμμα K το οποίο με αλλαγή n-διασταυρώσεων οδηγεί στον τετριμμένο. Έστω ακόμα N το πλήθος των διασταυρώσεων του K. Με επαγωγή υποθέτουμε ότι γνωρίζουμε το $V(L)$ για κάθε L με λιγότερες από N διασταυρώσεις. Σε κάθε μία από τις n-διασταυρώσεις του Λήμματος κάνουμε αλλαγή και εξομάλυνση.

Έστω τώρα $K_1, \ldots, K_n$ τα n-διαγράμματα που προκύπτουν από την εξομάλυνση μίας διασταύρωσης. Αυτά έχουν $N-1$ διασταυρώσεις το καθένα και άρα γνωρίζουμε το $V(K_i)$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$, από υπόθεση.

Ξεκινώντας από το τελικό ζευγάρι, $\bigcirc$, K_n, γνωρίζουμε τα $V(\bigcirc) = 1$, $V(K_n)$ από επαγωγή. Άρα, εφαρμόζοντας σ' αυτούς την σχέση $(*)$, θα υπολογίσουμε το πολυώνυμο Jones του κόμβου της $(n-1)$στής αλλαγής.

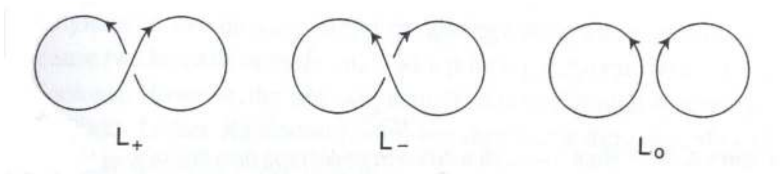
Πηγαίνοντας προς τα πίσω βρίσκουμε τελικά το $V(K)$.

□

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Θα υπολογίσουμε το πολυώνυμο Jones του κόμβου figure-8.

$$t^{-1}V(L_+) = tV(L_0) - \left(t^{-1/2} - t^{1/2}\right)V(L_{+0}) \Leftrightarrow V(L_+) = t^2 - \left(t^{1/2} - t^{3/2}\right)V(\bigcirc\bigcirc) \quad (1).$$

Για το $V(\bigcirc\bigcirc)$ έχουμε:



Και επομένως: $t^{-1}V(L_+) - tV(L_-) + \left(t^{-1/2} - t^{1/2}\right)V(\bigcirc\bigcirc) = 0 \Leftrightarrow V(\bigcirc\bigcirc) = \dfrac{t^{-1} - t}{t^{1/2} - t^{-1/2}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow V(\bigcirc\bigcirc) = -\left(t^{-1/2} + t^{1/2}\right).$

Παρατήρηση: Γενικότερα ισχύει ότι $V\left(\underbrace{\bigcirc\ldots\bigcirc}_{n}\right) = \left[-\left(t^{-1/2} + t^{1/2}\right)\right]^{n-1}$.

Άρα, από (1) έχουμε: $V(L_+) = t^2 + \left(t^{1/2} - t^{3/2}\right)\left(t^{-1/2} + t^{1/2}\right)$, και επομένως:

$$t^{-1}\underbrace{V(L_+)}_{\text{γνωστό από προηγούμενο βήμα}} - t\underbrace{V(L_-)}_{\text{ζητούμενο}} + \left(t^{-1/2} - t^{1/2}\right)\underbrace{V(L_0)}_{\text{γνωστό από επαγωγή}} = 0.$$

□

ΆΣΚΗΣΗ 12. Υπολογίστε ότι:

$a)$ $V(\textit{δεξιόστροφου trefoil}) = -t^{-4} + t^{-3} + t^{-1}$ και

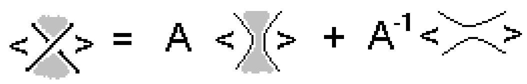
$b)$ $V(\textit{αριστερόστροφου trefoil}) = -t^{4} + t^{3} + t$.

Επομένως, οι δύο αυτοί κόμβοι είναι μη ισοτοπικοί.

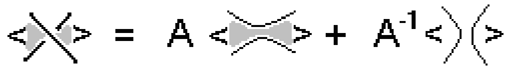
ΆΣΚΗΣΗ 13. Υπολογίστε τα πολυώνυμα Jones του κόμβου 7_4 και του κρίκου 6_3^2.

ΠΡΟΤΑΣΗ $V_K\left(t^{-1}\right) = V_{\overline{K}}(t)$ και $\langle K\rangle\left(A^{-1}\right) = \langle\overline{K}\rangle(A)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έστω ότι για τον κόμβο K ισχύει σε μία διασταύρωση η σχέση:



Τότε για τον κόμβο $\overline{K}$ θα ισχύει η σχέση:



Επομένως, $\langle K\rangle\left(A^{-1}\right)=\langle\overline{K}\rangle(A)$.

Δίνουμε τώρα προσανατολισμό στον κόμβο K και ίδιο προσανατολισμό στον κατοπτρικό του $\overline{K}$ και εξετάζουμε την αλλαγή του writhe: Όπως αναφέραμε παραπάνω, η κατοπτρική εικόνα $\overline{K}$ ενός κόμβου K προκύπτει με αλλαγή όλων των διασταυρώσεων του K και επομένως $w(\overline{K})=-w(K)$. Άρα,

$$X_{\overline{K}}(A)=\left(-A^{3}\right)^{-w(\overline{K})}\langle\overline{K}\rangle(A)=\left(-A^{3}\right)^{w(K)}\langle K\rangle\left(A^{-1}\right)=-\left(A^{-1}\right)^{-3w(K)}\langle K\rangle\left(A^{-1}\right)=X_{K}\left(A^{-1}\right)$$

και για $-A^{4}\rightarrow t \Rightarrow V_{\overline{K}}(t)=V_{K}\left(t^{-1}\right)$.

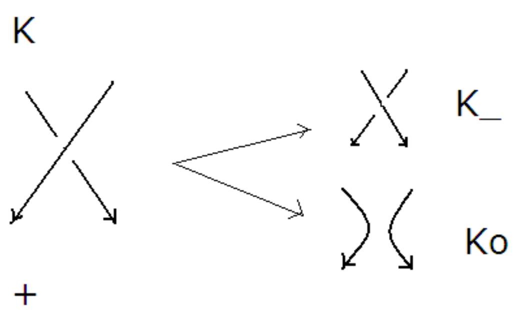
□

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Από την παραπάνω πρόταση συμπεραίνουμε ότι αν το $V_{K}(t)$ δεν είναι συμμετρικό ως προς τους εκθέτες του t, τότε ο κόμβος K είναι μη αμφίχειρας. Αν όμως το $V_{K}(t)$ είναι συμμετρικό, δηλαδή $V_{K}=V_{\overline{K}}$, τότε δεν μπορούμε να αποφανθούμε αν ο κόμβος K είναι αμφίχειρας ή όχι.

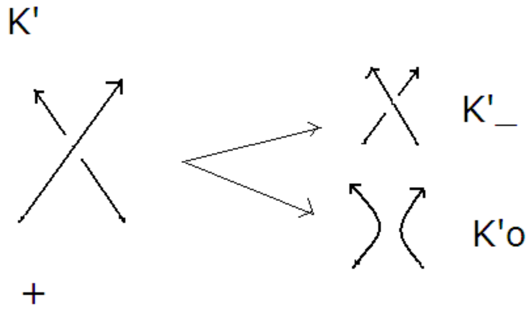
ΠΡΟΤΑΣΗ Έστω K' ο κόμβος με προσανατολισμό αντίθετο του κόμβου K. Τότε $V(K')=V(K)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για μία θετική διασταύρωση του κόμβου K μετά από εξομάλυνση έχουμε:



Ενώ για μία θετική διασταύρωση του κόμβου K' μετά από εξομάλυνση έχουμε:



Από τα παραπάνω παρατηρούμε ότι $\langle K' \rangle = \langle K \rangle$ (εξ' ορισμού του K') και $w(K') = w(K)$. Επομένως και $X_{K'}(A) = X_K(A) \overset{A^{-4} \to t}{\Rightarrow} V_{K'}(t) = V_K(t)$.

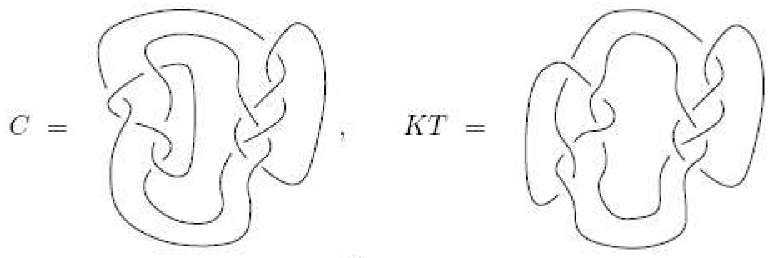
$\square$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Εν γένει οι κόμβοι K και K' δεν είναι ισοτοπικοί, όμως το πολυώνυμο Jones δεν τους ξεχωρίζει.

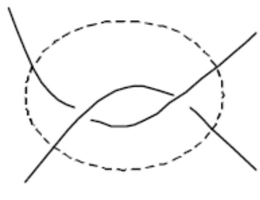
ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω L κρίκος. Ένας άλλος κρίκος θα καλείται *μεταλλαγμένος* (mutant) του L, συμβολικά $m(L)$, αν προκύπτει από τον L ως εξής:

Οι L, $m(L)$ έχουν διαγράμματα που ταυτίζονται έξω από έναν κυκλικό δίσκο, του οποίου τα σύνορα το τέμνουν σε 4 ακριβώς σημεία, ενώ τα τμήματα των διαγραμμάτων μέσα στο δίσκο διαφέρουν κατά στροφή 180° στο χώρο ή στο επίπεδο, η οποία διατηρεί συνολοθεωρητικά τα 4 σημεία.

Οι δύο κόμβοι που παρουσιάζονται παρακάτω είναι το πιο γνωστό παράδειγμα μεταλλαγμένων κόμβων με 11 διασταυρώσεις και ανακαλύφθηκε από τους Conway, Kinoshita-Terasaka.



ΣΗΜΕΙΩΣΗ Το τμήμα του διαγράμματος μέσα στο δίσκο λέγεται 2-tangle (2-συμπλοκή).



ΠΡΟΤΑΣΗ $\langle m(L)\rangle = \langle L\rangle$ και $V(m(L)) = V(L)$.

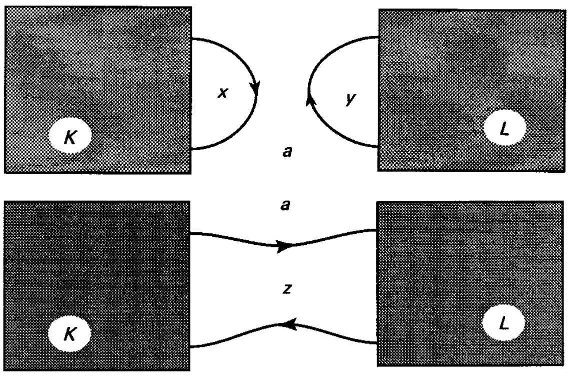
ΑΠΟΔΕΙΞΗ Περιστρέφουμε το δίσκο κατά 180° διατηρώντας συνολοθεωρητικά τα 4 σημεία και παρατηρούμε ότι ενώ αλλάζουν θέση τα άκρα των διασταυρώσεων, ο τύπος της κάθε διασταύρωσης δεν αλλάζει. Επομένως: $\langle m(L)\rangle = \langle L\rangle$. Επίσης, ένας προσανατολισμός του L επάγει έναν προσανατολισμό στον $m(L)$, οι οποίοι συμφωνούν μέσα και έξω από το δίσκο. Επομένως, έχουμε και ότι $w(m(L)) = w(L)$ και άρα και $V(m(L)) = V(L)$.

□

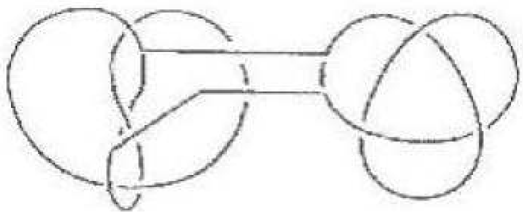
ΆΣΚΗΣΗ 14. Δείξτε ότι μετάλλαξη σε έναν κόμβο δίνει πάλι κόμβο και όχι κρίκο.

ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω K_1, K_2 προσανατολισμένοι κόμβοι. Ορίζουμε το *συνεκτικό άθροισμα* των K_1, K_2, συμβολικά $K_1 \# K_2$ ή $K_1 + K_2$ ως εξής:

i) Ορίζουμε στον καθένα μία σφαίρα που να περιέχει ένα ακριβώς τετριμμένο τόξο του κόμβου. Σε επίπεδο διαγραμμάτων ορίζουμε δίσκους.
ii) Αφαιρούμε τις σφαίρες με τα τετριμμένα τμήματα των K_1, K_2.
iii) Ταυτίζουμε τα 4 συνοριακά σημεία ανά δύο έτσι ώστε να είναι συμβατοί οι προσανατολισμοί.



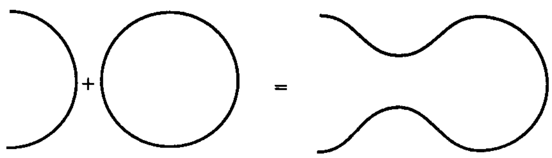
Όμοια ορίζεται το συνεκτικό άθροισμα μη προσανατολισμένων κόμβων (χωρίς να μας ενδιαφέρει ποια συνοριακά σημεία θα ταυτιστούν).



Ανεπιθύμητες διασταυρώσεις στο συνδετικό άθροισμα

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Συρρικνώνοντας τον K_1 και στη συνέχεια τον K_2 μπορούμε να εμφανίσουμε το K_1+K_2 σε οποιεσδήποτε περιοχές των K_1, K_2. Άρα το K_1+K_2 είναι καλά ορισμένο.
2. Προφανώς η Παρατήρηση 1 δεν ισχύει για κρίκους εν γένει (για μη συμμετρικούς κρίκους).
3. Ουδέτερο στοιχείο είναι ο τετριμμένος κόμβος όπως φαίνεται και παρακάτω:



4. $K_1+(K_2+K_3)=(K_1+K_2)+K_3$ (προσεταιριστική ιδιότητα).

Επομένως, $(L,+)$ είναι ένα μονοειδές.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1. Υπάρχει αντίθετο στοιχείο ως προς την πράξη αυτή:
2. Είναι το $+$ καλά ορισμένο για μη προσανατολισμένους κόμβους;
3. Επεκτείνεται τον ορισμό του $\#$ σε 2 ή 3 διαστάσεις.

ΠΡΟΤΑΣΗ Ισχύει ότι $\langle K_1+K_2\rangle=\langle K_1\rangle\langle K_2\rangle$ και $V(K_1+K_2)=V(K_1)V(K_2)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Για τον υπολογισμό του $\langle K_1+K_2\rangle$ εξομαλύνουμε πρώτα όλες τις διασταυρώσεις του K_1 και εφαρμόζοντας τον κανόνα 3 βγάζουμε όλες τις τετριμμένες συνιστώσες που εμφανίζονται. Άρα θα ισχύουν τα παρακάτω:

$$\langle K_1+K_2\rangle=\sum\lambda_i\langle K_2\rangle=\langle K_2\rangle\sum\lambda_i=\langle K_2\rangle\langle K_1\rangle$$

$$w(K_1+K_2)=w(K_1)+w(K_2).$$

Επομένως, $X_{(K_1+K_2)}=X_{K_1}X_{K_2}$.

□

ΣΗΜΕΙΩΣΗ Το $\langle\ \rangle$ χρησιμοποιήθηκε από τους Murasugi, Kauffman και άλλους για να αποδειχθούν κάποιες εικασίες του Tait για εναλλασσόμενους κόμβους.

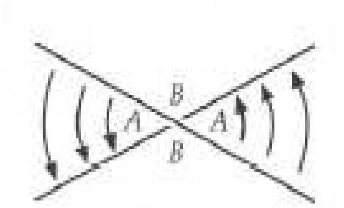
ΆΣΚΗΣΗ 15. Βρείτε τύπους για $\langle L_1 \cup L_2 \rangle$ και $X_{L_1 \cup L_2}$ ως προς τα $\langle L_1 \rangle$, $\langle L_2 \rangle$, X_{L_1}, X_{L_2}, όπου $L_1 \cup L_2$ η ξένη ένωση των L_1, L_2, δηλαδή τα L_1, L_2 μπορούν να διαχωριστούν από μία σφαίρα.

ΑΝΑΛΥΤΙΚΟΣ ΤΥΠΟΣ ΓΙΑ ΤΟ BRACKET

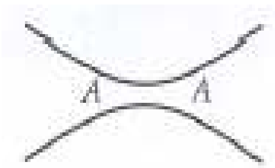
Εξομαλύνοντας όλες τις διασταυρώσεις καταλήγουμε σε 2^n διαγράμματα χωρίς διασταυρώσεις.

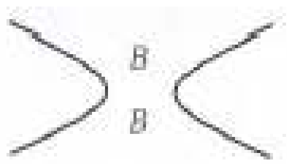
Σε κάθε διασταύρωση συναντιούνται 4 περιοχές, τις οποίες ονομάζουμε ως εξής:

Σαρώνοντας τη διασταύρωση κατά τη θετική φορά του επιπέδου, ονομάζουμε A τις περιοχές που σαρώνονται από το πάνω τόξο και B τις άλλες δύο.

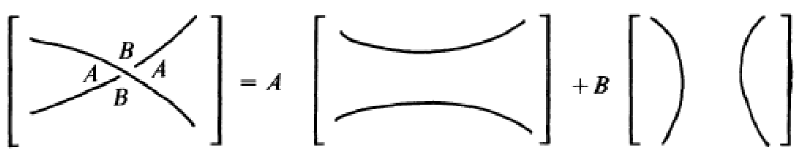


Η μία εξομάλυνση ενώνει τις περιοχές A και στον κανόνα του bracket παίρνει συντελεστή A (A-εξομάλυνση), ενώ η άλλη εξομάλυνση ενώνει τις περιοχές B και στον κανόνα του bracket παίρνει συντελεστή B (B-εξομάλυνση).





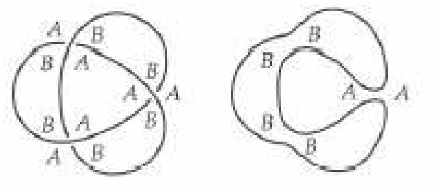
Η γραμμική σχέση του bracket λοιπόν είναι:



και καταλήγουμε: $\langle K \rangle = \sum_{i=1,\ldots 2^n} A^{s_i} B^{r_i} \left\langle \underbrace{\bigcirc\ldots\bigcirc}_{\# l_i} \right\rangle$, όπου $\left\langle \underbrace{\bigcirc\ldots\bigcirc}_{\# l_i} \right\rangle = C^{l_i - 1}$ και $C = -A^2 - A^{-2}$.

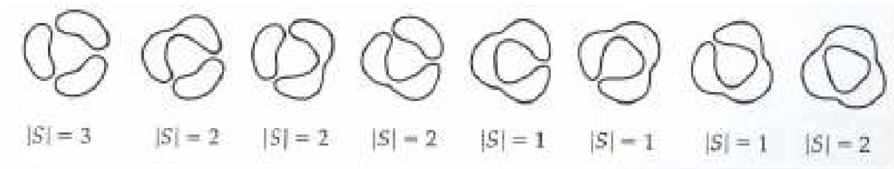
Η επιλογή μιας συγκεκριμένης εξομάλυνσης για κάθε διασταύρωση του κόμβου K λέγεται *κατάσταση* του K. Ο K έχει λοιπόν 2^n καταστάσεις, οι οποίες εμφανίζονται στα 2^n τελικά διαγράμματα της ανάλυσής του.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Ο κόμβος trefoil και μία κατάστασή του.



Έστω S το σύνολο όλων των καταστάσεων του κόμβου K και έστω $s \in S$ και $|s|$ ο αριθμός των τετριμμένων συνιστωσών της κατάστασης s. Τότε:
$\langle K \rangle = \sum_{s\in S} A^{a(s)} B^{b(s)} \langle s \rangle$, όπου $a(s)$ ο αριθμός A-εξομαλύνσεων στην $s \in S$, $b(s)$ ο αριθμός B-εξομαλύνσεων στην $s \in S$ και $\langle s \rangle = C^{|s|-1}$. Επομένως:
$\langle K \rangle = \sum_{s\in S} A^{a(s)} B^{b(s)} C^{|s|-1}$, όπου $B = A^{-1}$ και $C = -A^2 - A^{-2}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Για τον κόμβο trefoil έχουμε $2^3 = 8$ καταστάσεις.



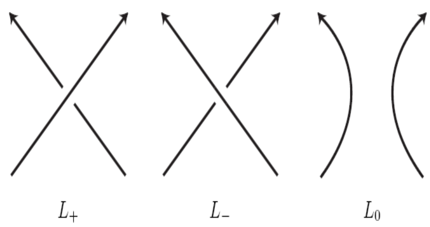
Δείξτε ότι $\langle trefoil \rangle = A^7 - A^3 - A^{-5}$.

ΆΣΚΗΣΗ 16. Βρείτε με τον παραπάνω τύπο το $\langle\ \rangle$ του κόμβου figure-8.

ΤΟ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ ALEXANDER Δ(K) (1928,1969)

Το πολυώνυμο Alexander ορίζεται σε διαγράμματα από τους κανόνες:

1. $\Delta(\bigcirc) = 1$.
2. $\Delta(L_+) - \Delta(L_-) + \left(t^{1/2} - t^{-1/2}\right)\Delta(L_0) = 0$, όπου



ΆΣΚΗΣΗ 17. Ν.δ.ό. το $\Delta(L)$ είναι αναλλοίωτη ισοτοπίας για τον L.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ Θα υπολογίσουμε αρχικά το $\Delta(\bigcirc\bigcirc)$.

$$0 = \Delta(L_+) - \Delta(L_-) + (t^{1/2} - t^{-1/2})\Delta(L_0)$$

$= \Delta($  $) + \Delta($  $) + (t^{1/2} - t^{-1/2})\Delta(L_0)$

$$= \Delta(\bigcirc) - \Delta(\bigcirc) + (t^{1/2} - t^{-1/2})\Delta(L_0)$$

$$= (t^{1/2} - t^{-1/2})\Delta(L_0)$$

$$\Rightarrow \Delta(L_0) = 0.$$

Υπολογίζουμε τώρα το $\Delta($  $)$ και έχουμε:

$$0 = \Delta(L_+) - \Delta(L_-) + (t^{1/2} - t^{-1/2})\Delta(L_0)$$

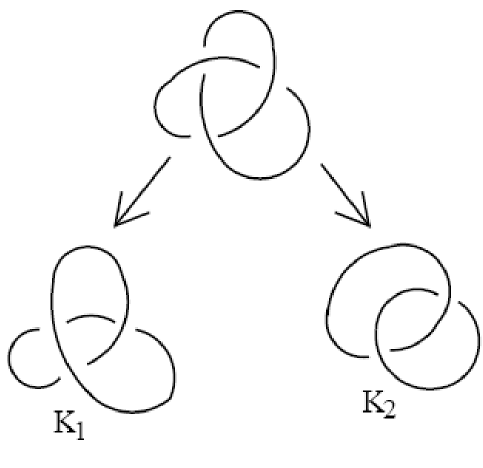
$= \Delta(L_+) - \Delta($  $) + (t^{1/2} - t^{-1/2})\Delta($  $)$

$$= \Delta(L_+) - 0 + (t^{1/2} - t^{-1/2})\Delta(\bigcirc)$$

$$= \Delta(L_+) + (t^{1/2} - t^{-1/2})$$

$\Rightarrow \Delta($  $) = t^{-1/2} - t^{1/2}$

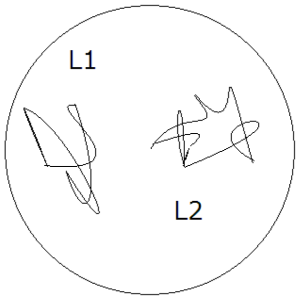
Θα υπολογίσουμε τέλος το πολυώνυμο Alexander του κόμβου trefoil *K*. Σύμφωνα με τον κανόνα 2 θα είναι: $\Delta(K) - \Delta(K_1) + \left(t^{1/2} - t^{-1/2}\right)\Delta(K_2) = 0$, όπου K_1 και K_2:



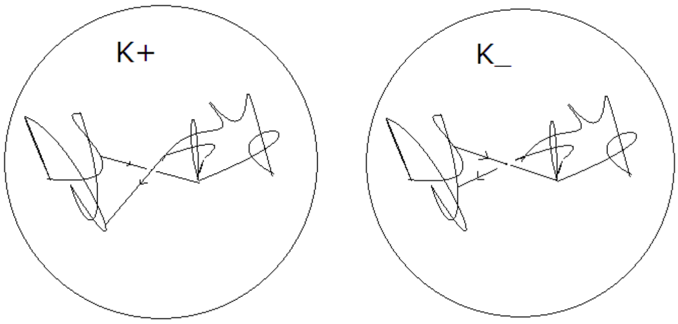
Γνωρίζουμε από τον κανόνα 1 ότι $\Delta(K_1) = \Delta(\bigcirc) = 1$ και δείξαμε ότι $\Delta(K_2) = t^{-1/2} - t^{1/2}$. Επομένως, $\Delta(trefoil) = 1 + \left(t^{1/2} - t^{-1/2}\right)^2$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ Θα δείξουμε ότι $\Delta(L_1 \cup L_2) = 0$, όπου με $L_1 \cup L_2$ εννοούμε την ξένη ένωση των L_1 και L_2.

Υπάρχει διάγραμμα του $L_1 \cup L_2$ τέτοιο ώστε οι L_1 και L_2 να απομονώνονται από ένα δίσκο στο επίπεδο.



Βρίσκουμε κατάλληλα τόξα στα διαγράμματα των L_1 και L_2 τέτοια ώστε ο $L_1 \cup L_2$ να θεωρηθεί ως K_0 και να έχουμε επίσης τα διαγράμματα K_+, K_- εισάγοντας κατάλληλες διασταυρώσεις:



$$\Delta(L_+) - \Delta(L_-) + \left(t^{1/2} - t^{-1/2}\right)\Delta(L_0) = 0 \overset{K_+ \sim L_1 \cup L_2 \sim K_- \Rightarrow \Delta(K_+) = \Delta(K_-)}{\Rightarrow} \Delta(K_0) = 0 = \Delta(L_1 \cup L_2)$$

ΆΣΚΗΣΗ 18. Υπολογίστε το πολυώνυμο Alexander του κόμβου figure-8.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Υπάρχουν (άπειροι) μη τετριμμένοι κόμβοι με $\Delta = 1$. Για παράδειγμα ο (-3,5,7)-κόμβος pretzel.

ΆΣΚΗΣΗ 19. Εξετάστε τη συμπεριφορά του πολυωνύμου Δ ως προς:
i) Κατοπτρικές εικόνες,
ii) Αλλαγές προσανατολισμών,
iii) Συνδετικά αθροίσματα.

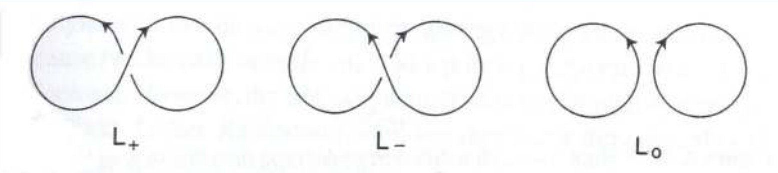
ΤΟ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ HOMFLYPT P(K) (1984)

Το πολυώνυμο HOMFLYPT είναι μια πολυωνυμική αναλλοίωτη κόμβων δύο μεταβλητών m, l και γενικεύει τα πολυώνυμα Alexander και Jones (δείξτε το).
Ορίζεται από τους κανόνες:

1. Αν K ο τετριμμένος κόμβος, τότε $P(K) = 1$.
2. $l \cdot P(L_+) + l^{-1} \cdot P(L_-) + m \cdot P(L_0) = 0.$

ΆΣΚΗΣΗ 20. Ν.δ.ό. το πολυώνυμο HOMFLYPT είναι αναλλοίωτη ισοτοπίας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Έστω L προσανατολισμένος τετριμμένος κρίκος αποτελούμενος από δύο συνιστώσες. Τότε, όπως φαίνεται και στο σχήμα παρακάτω, τα L_+, L_- είναι ισοτοπικά με τον τετριμμένο κόμβο και άρα θα ισχύει ότι $P(L_+) = P(L_-) = P(unknot) \overset{1\text{ο Αξίωμα}}{=} 1$.



Από το δεύτερο αξίωμα τώρα προκύπτει ότι:

$$l \cdot P(L_+) + l^{-1} \cdot P(L_-) + m \cdot P(L_0) = 0 \Rightarrow$$

$$l \cdot 1 + l^{-1} \cdot 1 + m \cdot P(L_0) = 0 \Rightarrow P(L_0) = -m^{-1} \cdot \left(l + l^{-1}\right) \overset{L_0 = L}{=} P(L).$$

Αν και ο κρίκος L είναι η ένωση δύο τετριμμένων κόμβων, το πολυώνυμό του δεν ισούται με δύο.

ΆΣΚΗΣΗ 21. Υπολογίστε τα πολυώνυμα HOMFLYPT του κόμβου trefoil και του κρίκου Hopf.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ HOMFLYPT

ΆΣΚΗΣΗ 22. Δ.ό. $P(K) = P(K^*)$, όπου ο κόμβος K^* είναι ο κόμβος K με αντίθετο προσανατολισμό.

ΆΣΚΗΣΗ 23.

i) Δ.ό. $P(L \cup \bigcirc) = -\left(l + l^{-1}\right) m^{-1} P(L)$.

ii) Έστω $L_1 \cup L_2$ ξένη ένωση. Δ.ό. $P(L_1 \cup L_2) = -\left(l + l^{-1}\right) m^{-1} P(L_1) P(L_2)$ και συνάγετε ότι $P\left(\underbrace{\bigcirc \ldots \bigcirc}_{n}\right) = \left[-\left(l + l^{-1}\right) m^{-1}\right]^{n-1}$.

ΆΣΚΗΣΗ 24. Δ.ό. $P(L_1 + L_2) = P(L_1) P(L_2)$.