

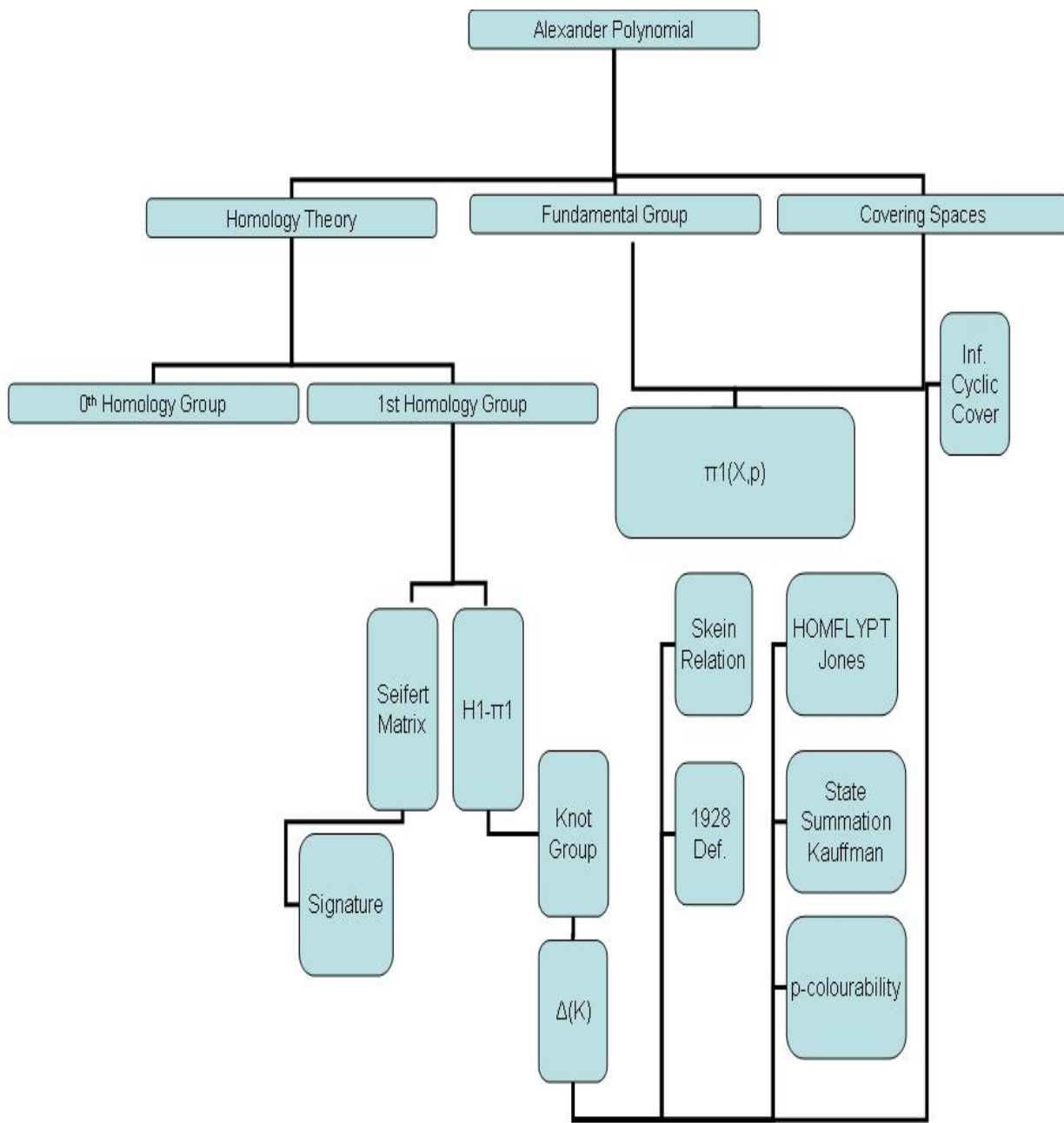
Το Πολυώνυμο Alexander



Διαμαντής Ιωάννης

Υποψήφιος Διδάκτορας

Αθήνα 2008



ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Στη παρούσα εργασία θα μελετήσουμε το πολυώνυμο Alexander, μία από τις ελάχιστες αναλλοίωτες κόμβων που παρέχουν πληροφορίες για τη τοπολογία του κόμβου.

Στα Κεφάλαια 2 και 3 αναπτύσσουμε τη γεωμετρική μέθοδο κατασκευής του πολυωνύμου Alexander ενός κόμβου μέσω των επιφανειών και των πινάκων Seifert, από όπου προκύπτουν και άλλες ισχυρές αναλλοίωτες όπως η υπογραφή και η ορίζουσα κόμβου.

Στο Κεφάλαιο 4 αναλύουμε τον τρόπο κατασκευής του Conway μέσω μιας σχέσης skein, ο οποίος αποτελεί την πιο απλή μέθοδο κατασκευής του πολυωνύμου αυτού και μελετάμε κάποιες ιδιότητές του.

Στο Κεφάλαιο 5 παρουσιάζουμε περιληπτικά το πολυώνυμο Jones μέσω ομάδων κοτσίδων και το πολυώνυμο HOMFLYPT μέσω μιας σχέσης skein, καθώς και την σύνδεσή τους με το πολυώνυμο Alexander.

Στο Κεφάλαιο 6 παρουσιάζεται ένας αλγεβρικός τρόπος για να ορίσουμε το πολυώνυμο Alexander ενός κόμβου μέσω της ομάδας του κόμβου. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Wirtinger ή Dehn για την παράσταση ομάδας κόμβου βρίσκουμε τους γεννήτορες της ομάδας και τις σχέσεις που τους συνδέουν. Χρησιμοποιώντας τη παράγωγο Fox για τις λέξεις της ομάδας κατασκευάζουμε τον Ιακωβιανό πίνακα της παράστασης της ομάδας και αποδεικνύεται ότι το πολυώνυμο Alexander προκύπτει ως η ορίζουσα του Ιακωβιανού πίνακα.

Στο Κεφάλαιο 7 αναφέρουμε τον συνδυαστικό τρόπο του Alexander, ο οποίος ήταν ο πρώτος τρόπος κατασκευής της πολυωνυμικής αυτής αναλλοίωτης και τον τρόπο κατασκευής του πολυωνύμου μέσω αθροίσματος καταστάσεων του κόμβου από τον Kauffman.

Αξίζει να σημειωθεί ότι το πολυώνυμο Alexander ενός κόμβου K συνδέεται με το απείρως κυκλικό κάλυμμα του K , με την ομολογία Khovanov, καθώς και με την ιδιότητα της p -χρωματισσιμότητας ενός κόμβου, θέματα που δεν θα αναλυθούν όμως στην εργασία.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την Κα Λαμπροπούλου για τον πολύτιμο χρόνο που μου αφιέρωσε.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. Εισαγωγικές Έννοιες.....	9
2. Επιφάνειες Seifert.....	13
3. Πίνακες Seifert και το Πολυώνυμο Alexander.....	19
4. Το Πολυώνυμο Conway, Υπογραφή και Ορίζουσα Κόμβων.....	23
5. Τα Πολυώνυμα Jones και HOMFLYPT.....	27
6. Ομάδες Κόμβων και το Πολυώνυμο Alexander.....	31
7. Συνδυαστικές Μέθοδοι.....	35
8. Παράρτημα.....	39
9. Βιβλιογραφία.....	47

1. Εισαγωγικές Έννοιες

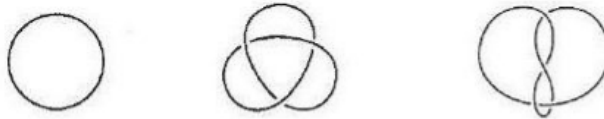
ΟΡΙΣΜΟΣ 1.1 Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}^3$ και $f: A \rightarrow B$ συνάρτηση. Ο f καλείται *ομοιομορφισμός* αν είναι ένα προς ένα, συνεχής και έχει συνεχή αντίστροφη εικόνα. Τα σύνολα A και B καλούνται τότε *ομοιομορφικά*.

Αν $A, B \subseteq \mathbb{R}^3$ και υπάρχει ομοιομορφισμός $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ τέτοιος ώστε $h(A) = B$, τότε γράφουμε $h: (\mathbb{R}^3, G_1) \rightarrow (\mathbb{R}^3, G_2)$.

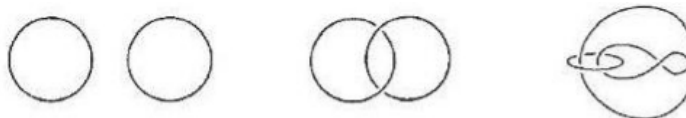
ΟΡΙΣΜΟΣ 1.2 Έστω G υποσύνολο του \mathbb{R}^3 . Μία *εμφύτευση* (*embedding*) του G είναι η εικόνα ενός ομοιομορφισμού $h: G \rightarrow G'$, όπου G' είναι επίσης υποσύνολο του \mathbb{R}^3 .

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.3 Ένας *κόμβος* K είναι μια εμφύτευση του κύκλου S^1 στον χώρο \mathbb{R}^3 ή στην σφαίρα S^3 . Ένας *κρίκος* L είναι μια εμφύτευση από n αντίγραφα του S^1 στον χώρο \mathbb{R}^3 ή στην σφαίρα S^3 .

Με τον όρο «κόμβος» θα εννοούμε κόμβους και κρίκους εκτός αν δηλώνεται διαφορετικά. Το γεγονός ότι ένας κόμβος είναι εικόνα ομοιομορφισμού του κύκλου, σημαίνει ότι δεν επιτρέπονται αυτοτομές.



Σχήμα 1.1 Παραδείγματα κόμβων



Σχήμα 1.2 Παραδείγματα κρίκων

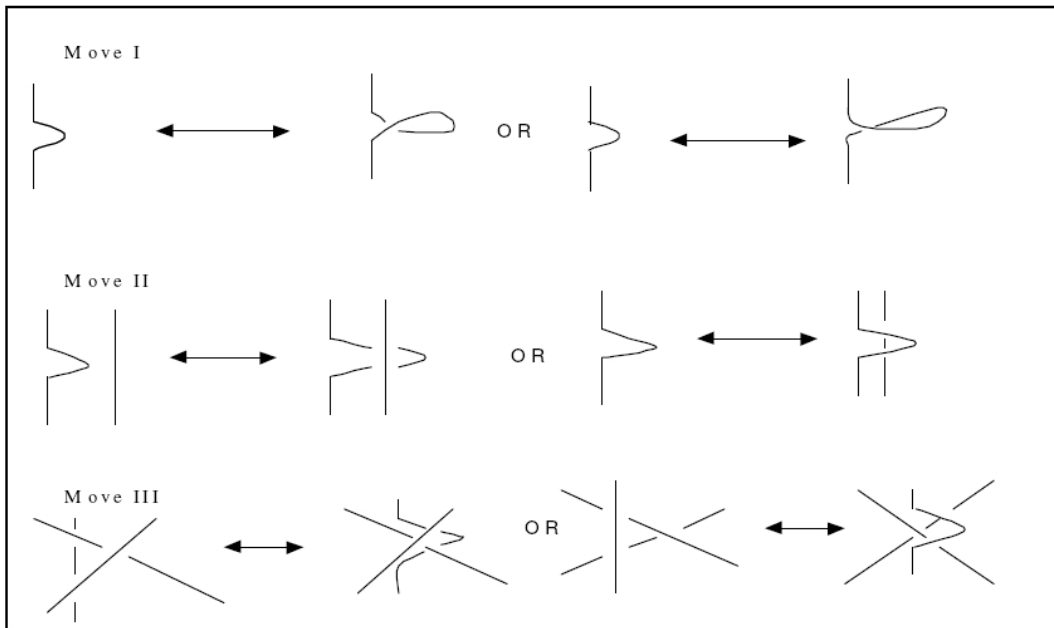
Δύο κόμβοι K_1, K_2 θα θεωρούνται ίδιοι, αν μπορεί να προκύψει ο ένας από τον άλλο με συνεχή παραμόρφωση στο χώρο. Τέτοιοι κόμβοι καλούνται *ισοτοπικοί*.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.4 Δύο κόμβοι K_1, K_2 θα ονομάζονται *ισοτοπικοί*, αν υπάρχει ομοιομορφισμός ζευγών $h: (S^3, K_1) \rightarrow (S^3, K_2)$. Συμβολικά γράφουμε $K_1 \sim K_2$.

Η έννοια της ισοτοπίας είναι σημαντική, καθώς είναι η σχέση ισοδυναμίας που χρειαζόμαστε στους κόμβους, εφ' όσον δύο κόμβοι είναι πάντοτε ομοιομορφικοί, ενώ όχι αναγκαστικά ισοτοπικοί. Μία ισοτοπία κόμβων παράγεται από τριγωνικές κινήσεις- Δ στο χώρο. Το 1927 ο Kurt Reidemeister (1893-1971) απέδειξε ότι δύο διαφορετικά

διαγράμματα του ίδιου κόμβου μπορούν να συσχετισθούν με μία σειρά από κινήσεις, γνωστές ως κινήσεις Reidemeister, μαζί με ισοτοπία επιπέδου (βλέπε Σχήμα 1.4) δείχνοντας ότι κάθε δυνατή κίνηση-Δ παράγεται από τέτοιες κινήσεις. Την ίδια περίοδο και δουλεύοντας ανεξάρτητα από τον Reidemeister, οι J.W. Alexander και G. B. Briggs κατέληξαν στο ίδιο συμπέρασμα.

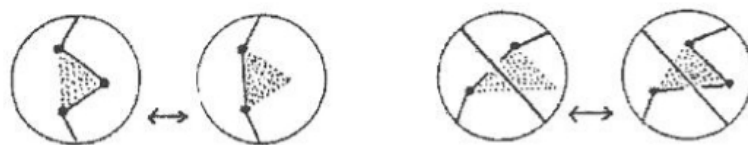
ΘΕΩΡΗΜΑ 1.5 (Reidemeister; 1927) Δύο κόμβοι K_1, K_2 είναι ισοτοπικοί αν και μόνο αν οποιαδήποτε δύο διαγράμμάτα τους $D(K_1), D(K_2)$ διαφέρουν κατά πεπερασμένο πλήθος κινήσεων Reidemeister και ισοτοπιών επιπέδου.



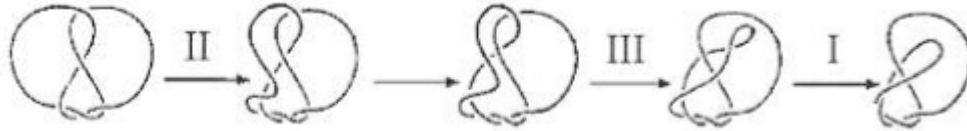
Σχήμα 1.3 Οι κινήσεις Reidemeister

Αν και οι παραπάνω κινήσεις αλλάζουν την προβολή του κόμβου, δεν αλλάζουν τον κόμβο που αντιπροσωπεύεται από την προβολή. Κάθε μία από τις τρεις αυτές κινήσεις αντιστοιχεί σε ισοτοπία στο χώρο.

Παρακάτω παρουσιάζονται οι κινήσεις ισοτοπίας επιπέδου.



Σχήμα 1.4 Κινήσεις ισοτοπίας επιπέδου



Σχήμα 1.5 Ισοτοπικοί κόμβοι

Ένα σημαντικό αποτέλεσμα της τοπολογίας, που οφείλεται στον Alexander (1930) είναι ότι κάθε ομοιομορφισμός $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ή $h: S^3 \rightarrow S^3$ είναι ισοτοπικός είτε με την ταυτοτική απεικόνιση είτε με την κατοπτρική απεικόνιση, αλλά όχι και με τις δύο. Αν ο h είναι ισοτοπικός με την ταυτοτική απεικόνιση, τότε λέμε ότι ο h διατηρεί τον προσανατολισμό του χώρου (*orientation preserving*), ενώ αν ο h είναι ισοτοπικός με την κατοπτρική απεικόνιση, τότε λέμε ότι ο h αντιστρέφει τον προσανατολισμό του χώρου (*orientation reversing*).

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.6 Δύο κόμβοι K_1, K_2 θα καλούνται ισοτοπικοί όταν υπάρχει ομοιομορφισμός $h: (S^3, K_1) \rightarrow (S^3, K_2)$, ο οποίος διατηρεί τον προσανατολισμό του χώρου.

Για να ξεχωρίσουμε διαγράμματα κόμβων μεταξύ τους χρειάζεται να ορίσουμε την έννοια της αναλλοίωτης κόμβων.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.7 Μία συνάρτηση $I: \{\text{κόμβοι/γραφήματα}\} \rightarrow L$, όπου το σύνολο L μπορεί να αποτελείται από σύμβολα, αριθμούς, πολυώνυμα κλπ, λέγεται *αναλλοίωτη κόμβων* αν ισχύει: $K_1 \sim K_2 \Rightarrow I(K_1) = I(K_2)$.

Κάθε αναλλοίωτη είναι καλά ορισμένη σε κλάσεις ισοτοπίας και για να αποδείξουμε ότι μία συνάρτηση αποτελεί αναλλοίωτη αρκεί να δείξουμε ότι η τιμή της δεν επηρεάζεται όταν εφαρμόσουμε σε ένα διάγραμμα τις εκάστοτε κινήσεις ισοτοπίας¹.

Ξεχωρίζουμε τις διασταυρώσεις σε ένα διάγραμμα κόμβου ή κρίκου σε θετικές και αρνητικές όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.6 και ορίζουμε τον αριθμό συνέλιξης σε ένα προσανατολισμένο διάγραμμα κρίκου:

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.8 Έστω K_1, K_2 δύο προσανατολισμένες συνιστώσες ενός κρίκου L . Ορίζουμε τον *αριθμό συνέλιξης* Lk (*linking number*) των K_1, K_2 , συμβολικά $Lk(K_1, K_2)$, να ισούται με το ημίθροισμα των $+1$ και -1 για κάθε θετική ή αρνητική διασταύρωση αντίστοιχα μεταξύ των K_1 και K_2 .

¹ Η ταξινόμηση των κόμβων αποτελεί το σημαντικότερο ανοικτό πρόβλημα της Θεωρίας Κόμβων και η έννοια της αναλλοίωτης ισοτοπίας μας βοηθά καθώς αν K_1, K_2 δύο κόμβοι και $I(K_1) \neq I(K_2)$, τότε οι κόμβοι αυτοί δεν είναι ισοτοπικοί. Το αντίστροφο όμως δεν ισχύει.



Σχήμα 1.6 Είδη διασταυρώσεων

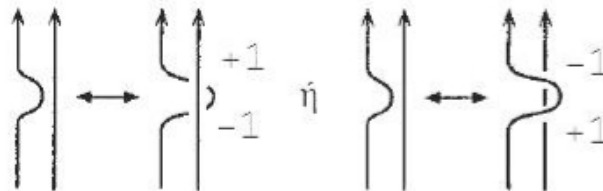
ΠΡΟΤΑΣΗ 1.9 Ο αριθμός συνέλιξης αποτελεί αναλλοίωτη ισοτοπίας κρίκων.

Απόδειξη

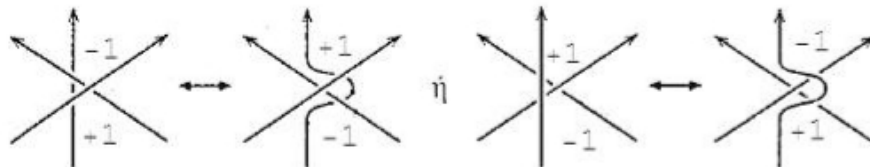
Με κινήσεις Reidemeister σε ένα προσανατολισμένο διάγραμμα κρίκου L έχουμε:

RI. Η κίνηση Reidemeister I δημιουργεί ή εξαλείφει μία διασταύρωση μεταξύ μιας συνιστώσας του κρίκου και του εαυτού της. Άρα η τιμή του αριθμού συνέλιξης δεν αλλάζει.

RII.



RIII.



□

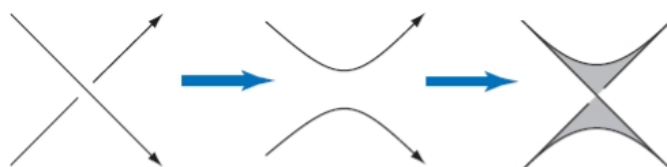
2. Επιφάνειες Seifert

Ένας κόμβος μπορεί να προκύψει από το κλείσιμο μιας *κοτσίδας* (closure of a braid), από *τυχαίους περιπάτους* (random walks) και ως σύνορο μίας *2-πολλαπλότητας* (επιφάνεια). Οι Frankl και Pontrjagin (1930) απέδειξαν ότι για κάθε κόμβο υπάρχει συνεκτική και προσανατολισμένη επιφάνεια με τον κόμβο να αποτελεί το σύνορό της. Ο Γερμανός μαθηματικός Herbert Seifert (1934) απέδειξε το παραπάνω αποτέλεσμα βρίσκοντας παράλληλα έναν αλγόριθμο για την κατασκευή των επιφανειών αυτών.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.1 (Frankl, Pontrjagin; 1930) Κάθε κόμβος αποτελεί σύνορο μίας συμπαγούς και προσανατολισμένης επιφάνειας εμφυτευμένη στην S^3 .

Απόδειξη (Herbert Seifert; 1934)

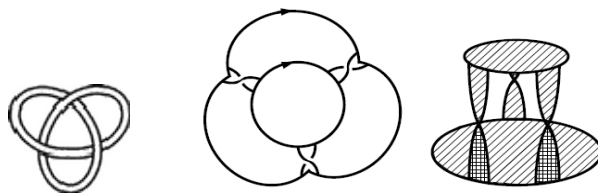
Θεωρούμε έναν προσανατολισμένο διάγραμμα κόμβου K . Ξεκινώντας από ένα οποιοδήποτε σημείο του K και ακολουθώντας τον προσανατολισμό του διαγράμμου την διασταύρωση ενώνοντας τα μοναδικά, κάθε φορά τόξα που συμφωνούν στον προσανατολισμό, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.1.



Σχήμα 2.1 Ο αλγόριθμος Seifert

Όταν η παραπάνω διαδικασία έχει ολοκληρωθεί για κάθε διασταύρωση, το διάγραμμα του κόμβου K θα αποτελείται από απλές κλειστές καμπύλες στο επίπεδο χωρίς αυτοτομές, δηλαδή χωρίς διασταυρώσεις. Αυτές οι κλειστές καμπύλες καλούνται *κύκλοι Seifert*. Τοποθετούμε μία λωρίδα με μισή-στροφή στη θέση του διαγράμματος που υπήρχαν διασταυρώσεις και έχουμε κατασκευάσει έτσι μία επιφάνεια V με $\partial V = K$.

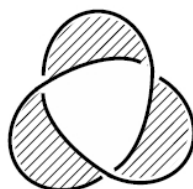
Αν μία λωρίδα συνδέει δύο δίσκους που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο (δύο δίσκοι που δεν περιέχεται ο ένας στον άλλο), τότε θα πρέπει να χρωματίσουμε διαφορετικά τις πάνω επιφάνειές τους. Κάθε άλλη λωρίδα θα συνδέει δύο δίσκους οι οποίοι θα βρίσκονται σε διαφορετικό επίπεδο. Οι δίσκοι αυτοί θα έχουν το ίδιο χρώμα στις πάνω επιφάνειές τους, έτσι ώστε όταν προστεθεί η λωρίδα, η μισή στροφή της να οδηγήσει το πάνω μέρος του δίσκου που βρίσκεται στο χαμηλότερο επίπεδο να αντιστραφεί και να ταιριάζει με τον δίσκο που βρίσκεται στο ψηλότερο επίπεδο. Επομένως η επιφάνεια είναι προσανατολισμένη. □



Σχήμα 2.2 Ο κόμβος trefoil και μία επιφάνεια Seifert

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ 2.2

1. Αξίζει να σημειωθεί ότι για έναν κόμβο μπορούμε να κατασκευάσουμε περισσότερες από μία επιφάνειες Seifert, και αυτό συμβαίνει γιατί η επιφάνεια αυτή εξαρτάται από το αρχικό διάγραμμα του κόμβου.
2. Είναι εύκολο να δείξουμε ότι κάποιοι κόμβοι αποτελούν σύνορο μη προσανατολισμένων επιφανειών όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.3.



Σχήμα 2.3 Λωρίδα Moebius για τον κόμβο trefoil

Από το Θεώρημα Rado (1925) προκύπτει ότι κάθε συμπαγής επιφάνεια μπορεί να τριγωνοποιηθεί και μάλιστα έχουμε το παρακάτω αποτέλεσμα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.3 Μία επιφάνεια είναι συμπαγής αν και μόνο αν κάθε τριγωνοποίησή της επιτυγχάνεται χρησιμοποιώντας πεπερασμένο πλήθος τριγώνων.

Απόδειξη

(\Rightarrow) Έστω F συμπαγής επιφάνεια και έστω ότι υπάρχει τριγωνοποίησή της T_i με άπειρο πλήθος τριγώνων. Αφού F τριγωνοποιήσιμη έπεται ότι πεπερασμένο πλήθος τριγώνων θα μοιράζονται την ίδια κορυφή (από ορισμό τριγωνοποίησης). Αφού υπάρχουν άπειρα στο πλήθος τρίγωνα, θα υπάρχουν και άπειρα σημεία τα οποία μπορούν αν θεωρηθούν ως μία ακολουθία $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$. Επειδή η επιφάνεια F είναι συμπαγής, η ακολουθία αυτή θα συγκλίνει σε ένα $u \in F$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1. Αν $u \in \text{Int}(T_i)$, τότε $\exists U_u$ ανοικτή περιοχή του u τέτοια ώστε $U_u \subseteq T_i$, για κάποιο i , άτοπο αφού u είναι το σημείο σύγκλισης της ακολουθίας των κορυφών των τριγώνων.
2. Αν u είναι κορυφή κάποιου τριγώνου, τότε θα αποτελεί κορυφή και των πεπερασμένα στο πλήθος τριγώνων T_1, \dots, T_n και έχει περιοχή που αποτελείται από μέρη αυτών των τριγώνων χωρίς να περιέχεται άλλη κορυφή. Άτοπο.

3. Αν u ανήκει σε κάποια πλευρά, τότε η u έχει περιοχή που ανήκει σε δύο τρίγωνα χωρίς να περιέχει άλλες κορυφές. Άτοπο.

Επομένως υπάρχει πεπερασμένο πλήθος κορυφών (άρα και τριγώνων) στην επιφάνεια F .

(\Leftarrow) Αν F επιφάνεια που τριγωνοποιείται από πεπερασμένο πλήθος τριγώνων, θα δείξουμε ότι είναι συμπαγής. Έστω $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ ακολουθία σημείων στην F . Υποθέσαμε ότι υπάρχει πεπερασμένο πλήθος τριγώνων στην επιφάνεια, και αφού υπάρχουν άπειρα στο πλήθος σημεία στην ακολουθία, κάποιο τρίγωνο T θα περιέχει άπειρο πλήθος σημείων. Έστω $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ υπακολουθία σημείων στο T . Ένα τρίγωνο είναι ομοιομορφικό με ένα κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του \mathbb{R}^2 Θεώρημα
 \Rightarrow
Heine-Borel T συμπαγές. Επομένως, η υπακολουθία $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ θα συγκλίνει σε ένα σημείο $x \in T \subseteq F$ και άρα και η ακολουθία $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ θα συγκλίνει στην $F \Rightarrow F$ συμπαγής. □

Η χαρακτηριστική Euler χ αποτελεί την πιο απλή αναλλοίωτη επιφανειών. Αν F μία επιφάνεια, τότε $\chi(F) = u - e + f$, όπου u δηλώνει το πλήθος των κορυφών της τριγωνοποίησης της επιφάνειας, e το πλήθος των ακμών και f το πλήθος των περιοχών (δηλαδή των τριγώνων). Είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι η χαρακτηριστική Euler δεν εξαρτάται από την εκάστοτε τριγωνοποίηση της επιφάνειας και επομένως αποτελεί αναλλοίωτη επιφανειών.

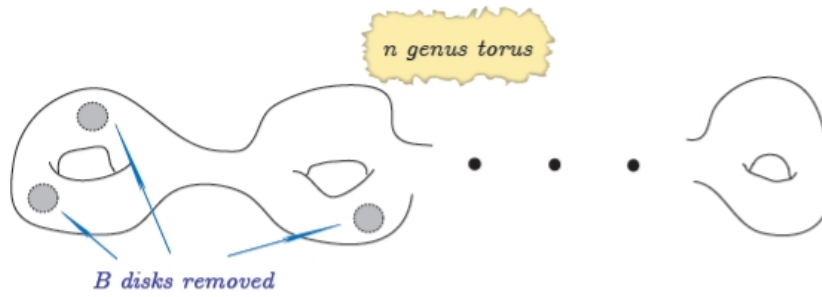
Επόμενος στόχος μας είναι να ορίσουμε το γένος ενός κόμβου. Για μία προσανατολίσιμη επιφάνεια F χωρίς σύνορο, το γένος της ορίζεται ως ο αριθμός των οπών στην επιφάνεια και σχετίζεται με την χαρακτηριστική Euler μέσω της σχέσης: $g(F) = \frac{2 - \chi(F)}{2}$.² Οι επιφάνειες Seifert όμως, είναι επιφάνειες με σύνορο και επομένως χρειάζεται να ορίσουμε το γένος διαφορετικά.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.4 Το γένος μίας προσανατολισμένης επιφάνειας με σύνορο είναι το γένος της αντίστοιχης επιφάνειας χωρίς σύνορο, η οποία προκύπτει καλύπτοντας κάθε συνιστώσα του συνόρου με έναν δίσκο.

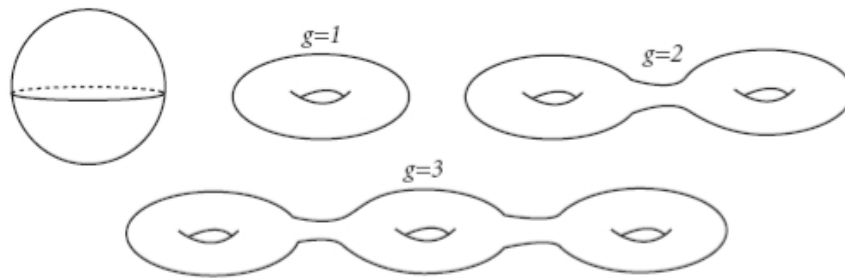
Από το Θεώρημα ταξινόμησης επιφανειών³ γνωρίζουμε ότι αν μία προσανατολισμένη επιφάνεια με B στο πλήθος συνιστώσες στο σύνορό της έχει γένος n , τότε αυτή είναι ομοιομορφική με το συνδυαστικό άθροισμα n τόρων, από τον οποίο έχουν αφαιρεθεί B στο πλήθος δίσκοι (βλέπε Σχήμα 2.4).

² Όταν η επιφάνεια είναι μη προσανατολίσιμη ισχύει η σχέση: $g(F) = 2 - \chi(F)$.

³ Δύο επιφάνειες είναι ομοιομορφικές αν και μόνο αν έχουν το ίδιο γένος (ή ισοδύναμα την ίδια χαρακτηριστική Euler), είναι και οι δύο προσανατολίσιμες ή μη προσανατολίσιμες και έχουν το ίδιο πλήθος συνωριακών συνιστωσών.



Σχήμα 2.4 Τόρος γένους n χωρίς B στο πλήθος δίσκους



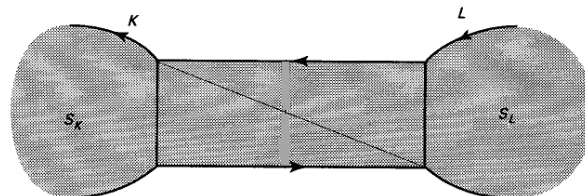
Σχήμα 2.5 Κάθε κλειστή προσανατολισμένη επιφάνεια είναι ομοιομορφική με μία σφαίρα ή με το συνδεδετικό άθροισμα n τόρων

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.5 Ορίζουμε ως γένος ενός κόμβου να είναι το ελάχιστο γένος από όλες τις επιφάνειες Seifert του κόμβου αυτού.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.6 Έστω κόμβος K και ένα διάγραμμά του με d διασταυρώσεις και s κύκλους Seifert. Τότε το γένος του κόμβου K δίνεται από τη σχέση $g = \frac{1+d-s}{2}$.

Απόδειξη

Ένας δίσκος έχει χαρακτηριστική Euler ίση με $+1$. Προσθέτοντας ένα ορθογώνιο ανάμεσα σε δύο δίσκους, ο αριθμός των κορυφών μένει αναλλοίωτος, ο αριθμός των πλευρών αυξάνεται κατά 3 και ο αριθμός των τριγώνων αυξάνεται κατά 2.



Σχήμα 2.6 $x(\text{δίσκου}) = 1$, $x(\text{ορθογωνίου}) = -1$

Αρχικά έχουμε s κύκλους Seifert, οι οποίοι συνεισφέρουν $+1$ στη χαρακτηριστική Euler και στη συνέχεια προσθέτουμε d ορθογώνια (όσες δηλαδή είναι οι

διασταυρώσεις του διαγράμματος), ελαττώνοντας τη χαρακτηριστική Euler κατά 1. Επομένως, $x(F) = s - d$, και επειδή η επιφάνεια F είναι προσανατολίσιμη έπεται ότι $g(F) = \frac{d - s + 1}{2}$.

□

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.7 (*Moriah; 1987*) Υπάρχουν κόμβοι, για τους οποίους ο αλγόριθμος Seifert δεν παράγει ποτέ επιφάνεια με το ελάχιστο δυνατό γένος, ανεξαρτήτως του διαγράμματος του κόμβου.

Το Θεώρημα 2.7 δεν ισχύει όμως για εναλλασσόμενους (*alternating*) κόμβους, δηλαδή για κόμβους των οποίων οι διασταυρώσεις εναλλάσσονται πάνω και κάτω καθώς κανείς κινείται πάνω στον κόμβο με μια συγκεκριμένη φορά.

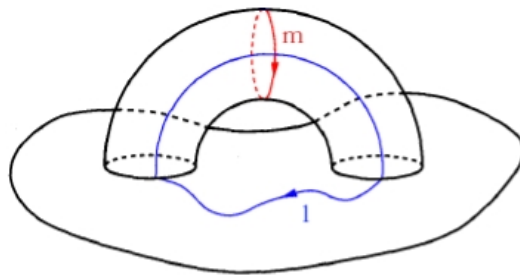
ΘΕΩΡΗΜΑ 2.8 (*Gabai; 1986*) Ο αλγόριθμος Seifert όταν εφαρμοστεί σε εναλλασσόμενο κόμβο παράγει πάντοτε επιφάνεια με το ελάχιστο δυνατό γένος.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ 2.9

1. Από την Πρόταση 2.6 και το Θεώρημα 2.7 έπεται ότι $g(F) \leq \frac{d - s + 1}{2}$.
2. Είναι πολύ δύσκολο ακόμα και σήμερα να υπολογιστεί το γένος ενός κόμβου. Ένας θεωρητικός αλγόριθμος αναπτύχθηκε από τον W. Haken το 1961, αλλά την περίοδο εκείνη δεν υπήρχαν τα μέσα για να ελεγχθεί και να εφαρμοστεί.
3. Γνωρίζουμε ότι αν $g(K) = 0$, τότε ο κόμβος K είναι ο τετριμμένος.
4. Αν K ένας μη τετριμμένος κόμβος και $\exists F : \partial F = K : g(\#) = 1$, τότε $g(K) = 1$.
5. Θα δούμε στη συνέχεια ότι $g(K) = \frac{1}{2}$ (βαθμός πολωνύμου Alexander), για εναλλασσόμενους κόμβους.
6. Τέλος, αν K μη εναλλασσόμενος κόμβος, τότε ισχύει η σχέση $g(K) \geq \frac{1}{2}$ (βαθμός πολωνύμου Alexander).

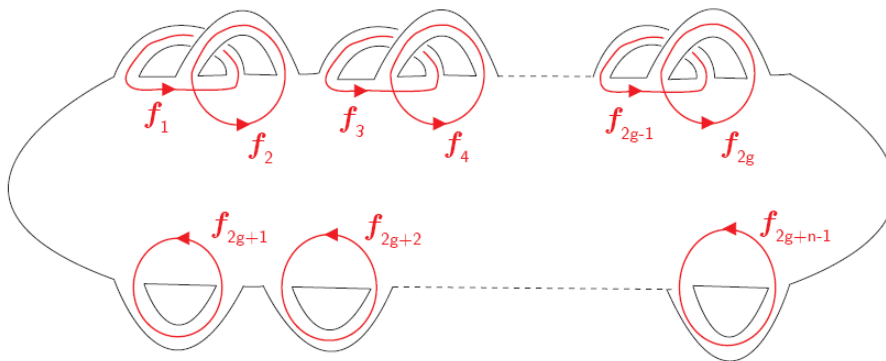
3. Πίνακες Seifert και το Πολυώνυμο Alexander

Έστω F μία επιφάνεια Seifert για ένα κόμβο K και έστω $f_i \in F$ απλές προσανατολισμένες καμπύλες στην επιφάνεια F . Ορίζουμε τις καμπύλες f_i^+ να είναι καμπύλες παράλληλες στις $f_i \ \forall i$ και οι οποίες βρίσκονται πάνω από την επιφάνεια F (*positive push off of f_i*). Αν η επιφάνεια F αποτελείται από ένα δίσκο, στον οποίο έχουμε επισυνάψει χερούλια και έχει γένος g , τότε προκύπτει μία οικογένεια αποτελούμενη από $2g$ κλειστές καμπύλες f_1, f_2, \dots, f_{2g} (κάθε χερούλι συνεισφέρει από δύο κλειστές καμπύλες, τις οποίες θεωρούμε σαν τον μεσημβρινό και τον παράλληλο του χερουλιού, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.1).



Σχήμα 3.1 Ο μεσημβρινός και ο παράλληλος ενός χερουλιού

Αυτοί οι βρόχοι αποτελούν τη βάση της ομάδας πρώτης ομολογίας H_1F ⁴. Αν θεωρούσαμε κρίκο με n συνιστώσες, τότε η παραπάνω οικογένεια βρόχων θα αποτελείται από $2g + n - 1$ βρόχους, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 3.2.



Σχήμα 3.2 Μία βάση της H_1F

⁴ Η πρώτη ομάδα ομολογίας H_1F είναι ελεύθερη αβελιανή ομάδα βαθμού $2g + n - 1$ με βάση τα f_i , όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.2.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.1 Ο πίνακας Seifert ενός κόμβου K είναι ο $2g \times 2g$ πίνακας με (i, j) -στοιχείο το $u_{i,j} = lk(f_i, f_j^+)$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3.2 Ο πίνακας Seifert ενός κόμβου δεν αποτελεί αναλλοίωτη κόμβων, καθώς δύο επιφάνειες Seifert ισοτοπικών κόμβων είναι δυνατό να έχουν διαφορετικό γένος (Παρατήρηση 2.2.1).

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.3 Έστω V ένας πίνακας Seifert ενός κόμβου K και V^T ο ανάστροφός του. Τότε το πολυώνυμο Alexander ορίζεται ως $\Delta_K(t) = \det(V - tV^T)$. Για ένα κρίκο L με n συνιστώσες και γένος g το πολυώνυμο Alexander ορίζεται ως $\Delta_L(t) = \det\left(t^{1/2}V - t^{-1/2}V^T\right) = t^{\frac{2g+n-1}{2}} \det(V - tV^T)$.

Για να αποδείξουμε ότι το πολυώνυμο Alexander αποτελεί αναλλοίωτη κόμβων αρκεί να δείξουμε ότι είναι ανεξάρτητο από την επιλογή της επιφάνειας Seifert F που χρησιμοποιήσαμε για να το ορίσουμε, αλλά και από την βάση της H_1F που χρησιμοποιήσαμε για να ορίσουμε τον πίνακα Seifert.

Θα εξετάσουμε αρχικά τη σχέση που έχουν οι επιφάνειες Seifert ισοτοπικών κόμβων.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.4 Δύο επιφάνειες καλούνται *S-ισοδύναμες* αν η μία προκύπτει από την άλλη είτε προσθέτοντας, είτε αφαιρώντας πεπερασμένο πλήθος χερουλιών με χειρουργική⁵ και ισοτοπία.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.5 Αν F_1, F_2 είναι δύο επιφάνειες των οποίων οι συνοριακές συνιστώσες αποτελούν ισοτοπικούς κρίκους, τότε οι επιφάνειες F_1 και F_2 είναι S-ισοδύναμες.

Απόδειξη

Για μία απλή απόδειξη χρησιμοποιώντας κινήσεις Reidemeister κοίτα [4] σελίδες 115-118.

□

ΠΟΡΙΣΜΑ 3.6 Δύο επιφάνειες Seifert ενός κόμβου είναι S-ισοδύναμες.

Θα εξετάσουμε τώρα τη σχέση που μοιράζονται δύο πίνακες Seifert δύο S-ισοδύναμων επιφανειών.

ΛΗΜΜΑ 3.7 Έστω V ένας πίνακας Seifert μιας συνεκτικής επιφάνειας F και έστω \hat{F} η επιφάνεια που προκύπτει από την F προσθέτοντας ένα χερούλι (σωλήνα). Τότε

⁵ Τα εσωτερικά δύο κλειστών δίσκων στο εσωτερικό μιας επιφάνειας F αποκόπτονται και ένα χερούλι $S^1 \times B^1$ επισυνάπτεται στην ίδια μεριά της επιφάνειας. Συμβολικά, αντικαθιστούμε τα $S^0 \times B^2$ με το $S^1 \times B^1$.

υπάρχει μία βάση της $H_1\hat{F}$, η οποία περιέχει τα στοιχεία της βάσης της H_1F , τέτοια ώστε ο πίνακας Seifert της \hat{F} να είναι της μορφής:

$$\hat{V} = \begin{pmatrix} & & * & 0 \\ & V & \vdots & \vdots \\ & & * & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ or } \hat{V} = \begin{pmatrix} & & 0 & 0 \\ & V & \vdots & \vdots \\ & & 0 & 0 \\ * & \dots & * & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

,όπου οι αστερίσκοι δηλώνουν άγνωστους ακεραίους.

Απόδειξη

Έστω ότι προσθέτουμε ένα χερούλι, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.1, όπου τη καμπύλη m θα τη καλούμε μεσημβρινό και τη καμπύλη l παράλληλο του χερουλιού.

Έστω $\{a_1, \dots, a_n\}$ μία βάση της H_1F . Προφανώς θα ισχύει ότι $lk(a_i, m^+) = lk(m, a_i^+) = 0$, $\forall i$ και $lk(m, m^+) = lk(m, l^+) = 0$. Από το Σχήμα 3.1 προκύπτει άμεσα ότι $lk(l, m^+) = +1$ και επιλέγουμε l τέτοιο ώστε $lk(l, l^+) = 0$, αφού αν $lk(l, l^+) = \lambda$, μπορούμε να αντικαταστήσουμε το l με $l - \lambda m$ και θα έχουμε:

$$lk((l - \lambda m), (l - \lambda m)^+) = lk(l, l^+) - \lambda lk(m, l^+) - \lambda lk(l, m^+) + \lambda^2 lk(m, m^+) = lk(l, l^+) - \lambda = 0$$

Επειδή το προστιθέμενο χερούλι μπορεί να είναι σε μορφή κόμβου, δεν έχουμε καμία άλλη πληροφορία για τα $lk(l, a_i^+)$ και $lk(a_i, l^+)$. Έστω $lk(l, a_i^+) = \lambda_i$. Ο πίνακας Seifert της επιφάνειας \hat{F} θα είναι της μορφής:

	a_i^+	...	a_n^+	l^+	m^+
a_1				*	0
\vdots		V		\vdots	\vdots
a_n				*	0
l	λ_1	...	λ_n	0	1
m	0	...	0	0	0

Αντικαθιστούμε κάθε γεννήτορα a_i με $b_i = a_i - \lambda_i m$ και έχουμε:

$$\begin{aligned} lk(l, b_i^+) &= lk(l, (a_i - \lambda_i m)^+) = \lambda_i - \lambda_i lk(l, m^+) = 0 \\ lk(b_i, m^+) &= 0 = lk(m, b_i^+) \\ lk(b_i, l^+) &= lk(a_i, l^+) \\ lk(b_i, b_i^+) &= lk(a_i - \lambda_i m, (a_i - \lambda_i m)^+) \\ &= lk(a_i, a_i^+) - \lambda_i lk(m, a_i^+) - \lambda_i lk(a_i, m^+) + \lambda_i^2 lk(m, m^+) \\ &= lk(a_i, a_i^+) \end{aligned}$$

Ένας άλλος τρόπος σκέψης είναι να γλιστρήσουμε την καμπύλη m κατά μήκος του χερουλιού έτσι ώστε να κείται στην επιφάνεια F . Όμως η κλειστή καμπύλη m αποτελεί σύνολο δίσκου στην επιφάνεια και επομένως είναι τετριμμένη στην ομάδα H_1F . Άρα $a_i \sim b_i$ (ομολογικά). \square

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.8 Ο πίνακας \hat{V} καλείται *απλή μεγέθυνση (elementary enlargement)* του πίνακα V αν είναι της μορφής του Λήμματος 3.7. Ο πίνακας V καλείται *απλή συστολή (elementary reduction)* του πίνακα \hat{V} .

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.9 Δύο πίνακες M_1, M_2 θα καλούνται *S-ισοδύναμοι* αν ο ένας προκύπτει από τον άλλο μετά από πεπερασμένο πλήθος φορών απλής μεγέθυνσης και συστολής και της απεικόνισης $L_1: M_1 \rightarrow PM_1P^T$, όπου P ένας αντιστρέψιμος πίνακας με ακέραια στοιχεία, έτσι ώστε $\det P = \pm 1$ (η οποία αντιστοιχεί σε αλλαγή βάσης της H_1F).

Από τα παραπάνω έπεται άμεσα το ζητούμενο:

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.10 Αν δύο επιφάνειες είναι S-ισοδύναμες, τότε και οι αντίστοιχοι πίνακες Seifert τους θα είναι S-ισοδύναμοι.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.11 Το πολυώνυμο Alexander είναι καλά ορισμένη αναλλοίωτη ιστοπίας κόμβων.

Απόδειξη

Έστω οι ιστοπικοί κόμβοι K_1, K_2 ($K_1 \sim K_2$). Από Πρόταση 3.6 έπεται ότι οι αντίστοιχες επιφάνειες Seifert F_1, F_2 των κόμβων αυτών θα είναι S-ισοδύναμες $\left(F_1 \stackrel{s}{\sim} F_2 \right)$, και από το Θεώρημα 3.10 έπεται ότι και οι αντίστοιχοι πίνακες Seifert τους V_1, V_2 θα είναι S-ισοδύναμοι $\left(V_1 \stackrel{s}{\sim} V_2 \right)$.

Έστω $V_2 = P^T V_1 P$, για κάποιον αντιστρέψιμο πίνακα P με $\det P = \pm 1$. Τότε:

$$\begin{aligned} \Delta(K_2) \det(PV_1P^T - tP^TV_1^TP) &= \det(P^T(V_1 - tV_1^T)P) = \\ &= [\det(P^T)] [\det(V_1 - tV_1^T)] [\det(P)] \det(V_1 - tV_1^T) = \Delta(K_1). \end{aligned}$$

Έστω τώρα $V_2 = \hat{V}_1$, τέτοιος ώστε $V_2 = \begin{pmatrix} V_1 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, για κάποιο διάνυσμα ξ . Τότε:

$$\Delta(K_2) = \det(V_2 - tV_2^T) = \begin{vmatrix} V_1 - tV_1^T & \xi & 0 \\ -t\xi^T & 0 & 1 \\ 0 & -t & 0 \end{vmatrix} = -\det \begin{pmatrix} V_1 - tV_1^T & \xi \\ 0 & -t \end{pmatrix} = t \det(V_1 - tV_1^T) = t \Delta(K_1)$$

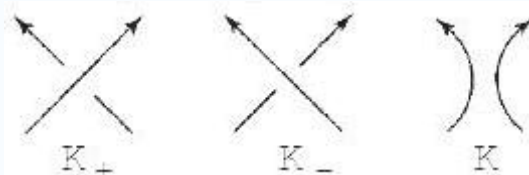
\square

4. Ιδιότητες Πολυώνυμου Alexander, Υπογραφή και Ορίζουσα Κόμβων

Για 58 χρόνια το πολυώνυμο μιας μεταβλητής *Alexander*, $\Delta_K(t)$ ήταν η μόνη γνωστή πολυωνυμική αναλλοίωτη.

Το πολυώνυμο Alexander σχετίζεται με το πολυώνυμο Conway, συμβολικά $\nabla_K(z)$, το οποίο μπορεί να υπολογιστεί απευθείας από το διάγραμμα ενός κόμβου με τη χρήση δύο αξιωμάτων:

1. Αν K είναι ο τετριμμένος κόμβος, τότε $\nabla_K(z) = 1$.
2. Έστω τρεις κόμβοι K_+, K_-, K οι οποίοι ταυτίζονται εκτός μιας περιοχής στην οποία έχουν την μορφή του Σχήματος 4.1. Τότε τα πολυώνυμά τους συνδέονται με τη σχέση skein: $\nabla_{K_+} - \nabla_{K_-} = z\nabla_K$.



Σχήμα 4.1 Οι κόμβοι K_+, K_-, K

Η αντικατάσταση μιας διασταύρωσης με δύο τόξα τα οποία δεν διασταυρώνονται καλείται *εξομάλυνση (smoothing)*.

Για το πολυώνυμο Conway αποδεικνύονται τα παρακάτω, τα οποία παραθέτουμε χωρίς απόδειξη.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.1.

1. Αν L διαχωρίσιμος κρίκος με n συνιστώσες, τότε $\nabla_L = 0$.
2. Κάθε κόμβος έχει μία «αποσύνθεση», σύμφωνα με τη σχέση skein, σε τετριμμένους κόμβους και κρίκους, και άρα το πολυώνυμο Conway μπορεί να υπολογιστεί επαγωγικά από τα αξιώματα.
3. Ισχύει ότι $\nabla_{\overline{K_1 \# K_2}} = \nabla_{K_1} \cdot \nabla_{K_2}$.
4. Ισχύει ότι $\nabla_{\overline{K'}} = \nabla_K$, όπου K' ο αντίστροφος του K .
5. Ισχύει ότι, $\nabla_{K^*}(\overline{z}) = \nabla_K(-z)$, όπου K^* η κατοπτρική εικόνα του K .
6. Έστω L κρίκος με n συνιστώσες. Τότε $\nabla_L(-z) = (-1)^{n+1} \nabla_L(z)$.

Τα πολυώνυμα Conway και Alexander συνδέονται με τη σχέση $\Delta_K(t) = \nabla_K\left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)$, και γι' αυτό το λόγο το πολυώνυμο Conway συχνά καλείται πολυώνυμο Alexander – Conway.

Μέσω του πολυωνύμου Alexander μπορούμε να ορίσουμε και άλλες αναλλοίωτες, όπως την υπογραφή και την ορίζουσα κόμβων.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.2 Η υπογραφή ενός κόμβου K , $\sigma(K)$, είναι ο άρτιος, ακέραιος αριθμός που ορίζεται από τα παρακάτω αξιώματα.

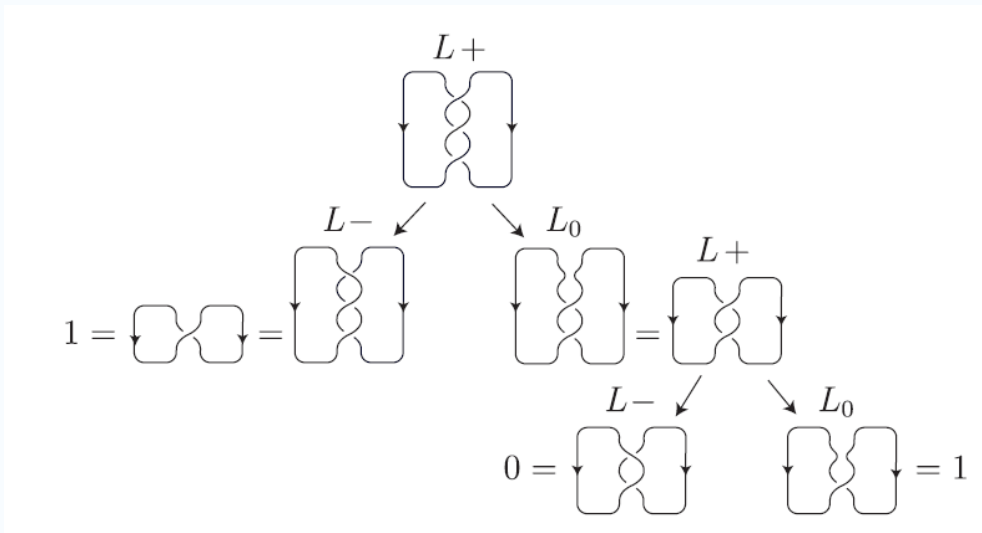
1. Αν K είναι ο τετριμμένος κόμβος, τότε $\sigma(K) = 0$.
2. Αν D_+, D_-, D_0 skein διαγράμματα του κόμβου όπως ορίστηκαν παραπάνω, τότε:

$$\sigma(D_-) - 2 \leq \sigma(D_+) \leq \sigma(D_-)$$

Επειδή $\sigma(K)$ άρτιος έπεται ότι είτε $\sigma(D_+) = \sigma(D_-)$, είτε $\sigma(D_+) = \sigma(D_-) - 2$.

3. Αν $\Delta_K(t)$ είναι το πολυώνυμο Alexander του κόμβου K , τότε $sign(\Delta_K(-1)) = (-1)^{\sigma(K)/2}$.

Θα υπολογίσουμε, για παράδειγμα την υπογραφή του δεξιόστροφου trefoil. Υπολογίζουμε το πολυώνυμο Conway (βλέπε Σχήμα 4.2):



Σχήμα 4.2 Spanning Tree του κόμβου trefoil

$\nabla_{\overline{K}}(z) = 1 \cdot \nabla_o(z) + z \cdot \nabla_{oo}(z) + z^2 \cdot \nabla_o(z) \xrightarrow{\nabla_o(z)=1} \nabla_{\overline{K}}(z) = 1 + z^2$. Και από τη σχέση

$\Delta_K(t) = \nabla_K \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right)$ έπεται ότι το πολυώνυμο Alexander του δεξιόστροφου trefoil

είναι $\Delta_K(t) = 1 + \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right)^2 = t^{-1} - 1 + t$. Έτσι, $\Delta_K(-1) = -3$ και επομένως

$sign(\Delta_K(-1)) = -1$. Από το 2 του Ορισμού 4.2 έπεται ότι:

$$\text{είτε } \sigma(L_+) = \sigma(L_-) \stackrel{L_- \sim \text{unknot}}{=} 0, \text{ είτε } \sigma(L_+) = \sigma(L_-) - 2 = -2.$$

Και επειδή $sign(\Delta_K(-1)) = (-1)^{\sigma(D_+)/2} \Rightarrow -1 = (-1)^{\sigma(D_+)/2}$ έχουμε ότι $\sigma(D_+) = -2$.

Με τον ίδιο τρόπο καταλήγουμε ότι η υπογραφή του αριστερόστροφου trefoil είναι +2, και επειδή η υπογραφή κόμβων αποτελεί αναλλοίωτη έπεται ότι ο αριστερόστροφος και ο δεξιόστροφος κόμβος trefoil δεν είναι ισοτοπικοί.

Για τις υπογραφές κόμβων ισχύουν τα παρακάτω, τα οποία παραθέτουμε χωρίς απόδειξη.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.3

1. Ισχύει ότι $\sigma(K_1 \# K_2) = \sigma(K_1) + \sigma(K_2)$.
2. Ισχύει ότι $\sigma(K^*) = -\sigma(K)$, όπου K^* η κατοπτρική εικόνα του K .
3. Ισχύει ότι $\sigma(K') = \sigma(K)$, όπου K' ο αντίστροφος του K .

Η υπογραφή κόμβων μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη μελέτη της ιδιότητας της αμφιχειρίας κόμβων όπως αποδεικνύεται στη παρακάτω Πρόταση.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.4 Αν ένας κόμβος K είναι αμφίχειρας, δηλαδή ισοτοπικός με την κατοπτρική του εικόνα, τότε $\sigma(K) = 0$.

Απόδειξη

Αν K αμφίχειρας, τότε $K \sim K^*$ και άρα $\sigma(K) = \sigma(K^*)$. Από το 2 του Θεωρήματος 4.3 όμως είναι $\sigma(K^*) = -\sigma(K)$ και άρα $\sigma(K) = \sigma(K^*) = -\sigma(K)$, δηλαδή $\sigma(K) = 0$. □

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε ότι το πολυώνυμο Conway του κόμβου figure 8 είναι

$\nabla_K(z) = 1 - z^2$ και από την σχέση $\Delta_K(t) = \nabla_K\left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ έχουμε ότι το πολυώνυμο

Alexander του κόμβου figure 8 είναι: $\Delta_K(t) = 1 - \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)^2 \Rightarrow \Delta_K(t) = -t^{-1} + 3 - t$ και

άρα $\Delta_K(-1) = 5$. Επομένως $sign(\Delta_K(-1)) = 1$. Από το 3 του Ορισμού 4.2 είναι

$sign(\Delta_K(-1)) = (-1)^{\sigma(K)/2}$, δηλαδή $1 = (-1)^{\sigma(K)/2} \Rightarrow \sigma(K) = 0$, αποτέλεσμα που ήταν αναμενόμενο αφού ο κόμβος figure 8 είναι αμφίχειρας (Πρόταση 4.4).

Ορίζουμε τέλος μία ακόμα σημαντική αναλλοίωτη κόμβων:

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.5 Ορίζουμε την ορίζουσα⁶ (determinant) ενός κόμβου K ως τον αριθμό $\det(K) = \Delta_K(-1)$.

⁶ Η ορίζουσα ενός κόμβου K ορίζεται διαφορετικά ως η απόλυτη τιμή της ορίζουσας του πίνακα $V + V^T$, όπου V είναι ο πίνακας Seifert του κόμβου και V^T ο ανάστροφός του.



5. Τα Πολυώνυμα Jones και HOMFLYPT

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε τα πολυώνυμα Jones και HOMFLYPT, τα οποία αποτελούν γενίκευση του πολυωνύμου Alexander και επομένως ισχυρότερες αναλλοίωτες. Κάποια τεχνικά θεωρήματα και ορισμοί αναφέρονται περισσότερο για ιστορικούς λόγους και γι' αυτό το λόγο δίνονται χωρίς απόδειξη και περιττές λεπτομέρειες.

Το Πολυώνυμο Jones

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.1 (*Alexander; 1923*) Κάθε κόμβος μπορεί να προκύψει από το κλείσιμο μίας κοτσίδας.

Το πρώτο πρόβλημα που προκύπτει από το Θεώρημα Alexander είναι να καθορίσουμε ποιες κοτσίδες κλείνουν σε ένα συγκεκριμένο κόμβο. Για τον σκοπό αυτό ο *Andrei Markov*⁷ πρότεινε τις ακόλουθες κινήσεις:

1. $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, |i - j| \geq 2$
2. $\sigma_i \sigma_i^{-1} = 1 = \sigma_i^{-1} \sigma_i$
3. $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$
4. $\sigma_i \beta \sigma_i^{-1} = \beta = \sigma_i^{-1} \beta \sigma_i$
5. Αντικαθιστούμε το $\beta \in B_n$ με $\beta \sigma_n^{\pm 1} \in B_{n+1}$ ή αντίστροφα.

Η πρώτη σχέση αντιστοιχεί σε ισοτοπία στο επίπεδο, η δεύτερη και η τρίτη στη κίνηση Reidemeister II, η πέμπτη στη κίνηση I και η τρίτη στη κίνηση Reidemeister III. Δεν είναι εύκολο να δείξουμε ότι δύο κοτσίδες, οι οποίες κλείνουν σε ισοτοπικούς κόμβους σχετίζονται μέσω πεπερασμένου πλήθους κινήσεων Reidemeister. Αυτό επιτυγχάνεται με τις κινήσεις Markov, καθώς οι κοτσίδες είναι προσανατολισμένες και οι κινήσεις αυτές διατηρούν τον προσανατολισμό τους.

Ο επόμενος στόχος είναι να αντιστοιχήσουμε στην ομάδα των κοτσίδων μία άλλη αλγεβρική δομή, η οποία είναι πιο κατανοητή και να ορίσουμε μία ιδιότητα στη νέα αυτή δομή ώστε να μένει αναλλοίωτη κάτω από τις κινήσεις Markov. Το 1934 ο *Werner Burau* απεικόνισε τις κοτσίδες σε πίνακες, όπως παρουσιάζεται παρακάτω:

Έστω $GL(n, \mathbb{Z}[t^{\pm 1}])$ να συμβολίζει την ομάδα των αντιστρέψιμων $n \times n$ πινάκων, των οποίων τα στοιχεία είναι πολυώνυμα Laurent μεταβλητής t με ακέραιους συντελεστές. Ορίζεται απεικόνιση από την B_n στο $GL(n, \mathbb{Z}[t^{\pm 1}])$, η οποία εξ' ορισμού απεικονίζει τα σ_i στον πίνακα που προκύπτει από τον μοναδιαίο I , αντικαθιστώντας τον 2×2 υποπίνακα, του οποίου το άνω αριστερά στοιχείο βρίσκεται στη θέση (i, i) , με τον πίνακα: $\begin{pmatrix} 1-t & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Αυτή η απεικόνιση είναι ομομορφισμός και καλείται Burau

⁷ Υιός του μεγάλου μαθηματικού A. Markov, ο οποίος ανακάλυψε τις αλυσίδες Markov.

αναπαράσταση⁸ της ομάδας των κοτσίδων. Το ίχνος του πίνακα είναι αναλλοίωτο στις κινήσεις (4) και (5) και η αναλλοίωτη κρίκων που προκύπτει με αυτόν τον τρόπο είναι το πολυώνυμο Alexander.

Οι *von Neumann* άλγεβρες είναι πεπερασμένης διάστασης άλγεβρες τελεστών σε χώρους Hilbert. Κάθε άλγεβρα $A_n(t)$ είναι ευθύ άθροισμα αλγεβρών πινάκων, παραμετρικοποιημένες κατά κάποιο τρόπο από ένα $t \in \mathbb{R}$. Για κάθε πραγματική τιμή του t είναι δυνατόν να κατασκευάσουμε μία αναπαράσταση $B_n \rightarrow A_n(t)$ της ομάδας των κοτσίδων και μία απεικόνιση ίχνους, από την οποία στη συνέχεια ορίζεται μία απεικόνιση $B_n \rightarrow \mathbb{C} \left[t^{-1/2}, t^{1/2} \right]$. Το πολυώνυμο που προκύπτει με αυτόν τον τρόπο μένει αναλλοίωτο κάτω από τις κινήσεις Markov στις κοτσίδες και επομένως αποτελεί αναλλοίωτη κόμβων.

Ο V. Jones ταξίδεψε στη Νέα Υόρκη τον Μάιο του 1984, όπου μαζί με την Birman απέδειξαν ότι το πολυώνυμο αυτό ήταν διαφορετικό από αυτό του Alexander. Πράγματι, το νέο αυτό πολυώνυμο ξεχώριζε τον αριστερόστροφο από τον δεξιόστροφο κόμβο trefoil, κάτι που δεν επιτυγχάνεται μέσω του πολυωνύμου Alexander. Ο Jones αργότερα απέδειξε ότι το νέο αυτό πολυώνυμο ικανοποιούσε τη σχέση skein:

$$tV(L_+) - t^{-1}V(L_-) = \left(t^{1/2} - t^{-1/2} \right) V(L_0) \quad (*)$$

ΙΣΤΟΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ 5.2

1. Το $V(t)$ ήταν η πρώτη ισχυρή αναλλοίωτη κόμβων και χάρισε στον Jones το Fields medal.
2. 1989: Ο E. Witten χρησιμοποίησε το πολυώνυμο Jones για να κατασκευάσει μία αναλλοίωτη τρισδιάστατων πολλαπλοτήτων (*3-manifolds*) χρησιμοποιώντας *Feynman path integrals* και *gauge theory* (Fields medal). Οι N. Reshetikhen και V. Turaer έδωσαν μαθηματική απόδειξη των αναλλοίωτων Witten χρησιμοποιώντας θεωρία αναπαραστάσεων *αλγεβρών Hopf*.
3. Απειρία από *κβαντικές αναλλοιώτες* (quantum invariants, N. Reshetikhen και V. Turaer).
4. Συνάφεια με *Στατιστική Μηχανική* και τα μοντέλα *Ising* και *Potts* (λιώσιμο πάγου, Jones και Kauffman).
5. Εφαρμογές της Θεωρίας Κόμβων στη τοπολογία του DNA (1989, K. Ernst, D.W. Sumners).

ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ: Υπάρχει μη τετριμμένος κόμβος K με $V(K) = 1$;

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.3 Η σχέση (*) μαζί με την αρχική συνθήκη $V(\bigcirc) = 1$ αρκούν για να υπολογιστεί το $V(K)$, για κάθε κόμβο K .

⁸ Αυτή η αναπαράσταση της B_n ήταν η μόνη γνωστή αναπαράστασή της για περίπου 50 χρόνια.

Σημειώνουμε ότι η αλλαγή μίας διασταύρωσης μπορεί να οδηγήσει σε πιο πολύπλοκο διάγραμμα. Για την απόδειξη της Πρότασης 5.3 έχουμε το παρακάτω:

ΛΗΜΜΑ 5.4 Κάθε διάγραμμα προσανατολισμένου κόμβου γίνεται ισοτοπικό με τον τετριμμένο μετά από πεπερασμένες αλλαγές διασταυρώσεων. Αντίστοιχα, κάθε κρίκος γίνεται ισοτοπικός με τον τετριμμένο κρίκο μετά από πεπερασμένες αλλαγές διασταυρώσεων.

Απόδειξη

Στον κόμβο K επιλέγουμε αρχικό σημείο και βαδίζουμε κατά μήκος του K σύμφωνα με τον προσανατολισμό του. Κάθε φορά που συναντάμε μία διασταύρωση για πρώτη φορά, αν βρεθούμε στο κάτω τόξο της την αλλάζουμε. Αν βρεθούμε στο πάνω, την αφήνουμε ως έχει. Όταν ολοκληρωθεί η βόλτα έχουμε ένα «κατιόν» διάγραμμα (σαν ελατήριο), που είναι ισοτοπικό με τον τετριμμένο.

Σε περίπτωση κρίκου, αριθμούμε τις συνιστώσες και ακολουθούμε την παραπάνω διαδικασία, ώστε η i -συνιστώσα να βρίσκεται πάνω από την $i+1$ -συνιστώσα και καταλήγουμε στον τετριμμένο κρίκο. □

Απόδειξη Πρότασης 5.3

Έστω διάγραμμα K το οποίο με αλλαγή n -διασταυρώσεων οδηγεί στον τετριμμένο. Έστω ακόμα N το πλήθος των διασταυρώσεων του K . Με επαγωγή υποθέτουμε ότι γνωρίζουμε το $V(L)$ για κάθε L με λιγότερες από N διασταυρώσεις. Σε κάθε μία από τις n -διασταυρώσεις του Λήμματος κάνουμε αλλαγή και εξομάλυνση.

Έστω τώρα K_1, \dots, K_n τα n -διαγράμματα που προκύπτουν από την εξομάλυνση μίας διασταύρωσης. Αυτά έχουν $N-1$ διασταυρώσεις το καθένα και άρα γνωρίζουμε το $V(K_i)$, $\forall i=1,2,\dots,n$, από υπόθεση.

Ξεκινώντας από το τελικό ζευγάρι, \circ, K_n , γνωρίζουμε τα $V(\circ)=1$, $V(K_n)$ από επαγωγή. Άρα, εφαρμόζοντας σ' αυτούς την σχέση (*), θα υπολογίσουμε το πολυώνυμο Jones του κόμβου της $(n-1)$ στής αλλαγής.

Πηγαίνοντας προς τα πίσω βρίσκουμε τελικά το $V(K)$. □

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 5.5 Γενικότερα ισχύει ότι $V\left(\underbrace{\circ \dots \circ}_n\right) = \left[-\left(t^{-1/2} + t^{1/2}\right)\right]^{n-1}$.

Το Πολυώνυμο HOMFLYPT

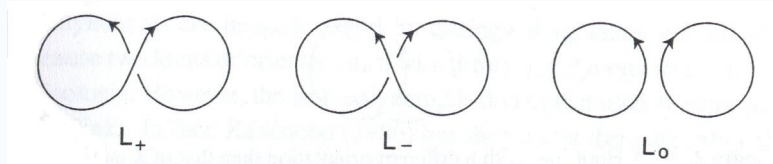
Το πολυώνυμο HOMFLYPT είναι μια πολυωνυμική αναλλοίωτη κόμβων δύο μεταβλητών m, l και γενικεύει τα πολυώνυμα Alexander και Jones.

Ορίζεται από τους κανόνες:

1. Αν K ο τετριμμένος κόμβος, τότε $P(K) = 1$.
2. $l \cdot P(L_+) + l^{-1} \cdot P(L_-) + m \cdot P(L_0) = 0$.

Παράδειγμα

Έστω L προσανατολισμένος τετριμμένος κρίκος αποτελούμενος από δύο συνιστώσες. Τότε, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 5.1, τα L_+, L_- είναι ισοτοπικά με τον τετριμμένο κόμβο και άρα θα ισχύει ότι $P(L_+) = P(L_-) = P(\text{unknot}) \stackrel{\text{1ο Αξίωμα}}{=} 1$.



Σχήμα 5.1 Ο κόμβοι L_+, L_-, L_0

Από το δεύτερο αξίωμα τώρα προκύπτει ότι:

$$l \cdot P(L_+) + l^{-1} \cdot P(L_-) + m \cdot P(L_0) = 0 \Rightarrow$$

$$l \cdot 1 + l^{-1} \cdot 1 + m \cdot P(L_0) = 0 \Rightarrow P(L_0) = -m^{-1} \cdot (l + l^{-1}) \stackrel{L_0=L}{=} P(L).$$

Αν και ο κρίκος L είναι η ένωση δύο τετριμμένων κόμβων, το πολυώνυμό του δεν ισούται με δύο.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ 5.6

1. $P(K) = P(K^*)$, όπου ο κόμβος K^* είναι ο κόμβος K με αντίθετο προσανατολισμό.

2. $P(L \cup \bigcirc) = -(l + l^{-1})m^{-1}P(L)$.

3. Έστω $L_1 \cup L_2$ ξένη ένωση. Τότε $P(L_1 \cup L_2) = -(l + l^{-1})m^{-1}P(L_1)P(L_2)$ και

$$P\left(\underbrace{\bigcirc \dots \bigcirc}_n\right) = [-(l + l^{-1})m^{-1}]^{n-1}.$$

4. $P(L_1 + L_2) = P(L_1)P(L_2)$.

6. Ομάδες Κόμβων και το Πολυώνυμο Alexander

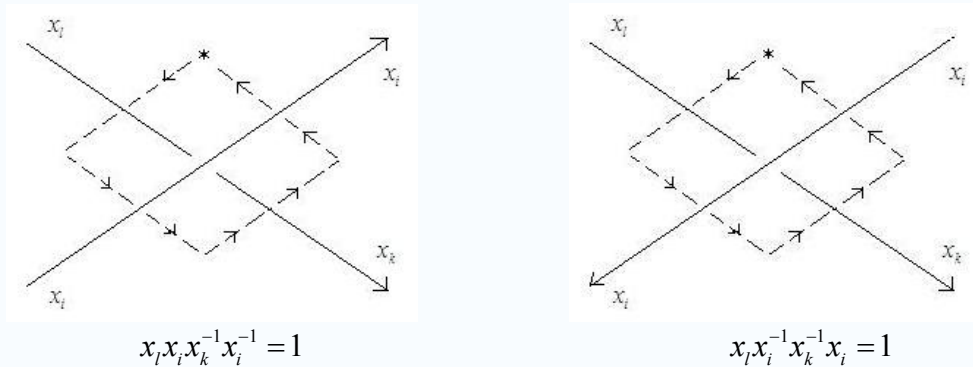
Το τοπολογικό συμπλήρωμα ενός κόμβου αποτελεί αναλλοίωτη κόμβων καθώς $K_1 \stackrel{\text{ισοτ.}}{\sim} K_2 \Rightarrow S^3 \setminus K_1 \stackrel{\text{ομοιομ.}}{\sim} S^3 \setminus K_2$. Από το Alexander's Duality Theorem έχουμε ότι $\tilde{H}_*(S^3 \setminus K) \cong \tilde{H}^*(S^1)$, για κάθε κόμβο K και επομένως οι ομάδες ομολογίας του τοπολογικού συμπληρώματος ενός κόμβου δεν αποτελούν αναλλοίωτες κόμβων. Αντίθετα όμως, οι ομάδες ομοτοπίας είναι του τοπολογικού συμπληρώματος ενός κόμβου αποτελούν χρήσιμες αναλλοίωτες κόμβων. Παρακάτω παρουσιάζονται οι μέθοδοι Wirtinger και Dehn για την εύρεση της παράστασης της ομάδας $\pi_1(S^3 \setminus K)$ μέσω ενός διαγράμματος του κόμβου.

Παράσταση Wirtinger

Έστω ένα προσανατολισμένο διάγραμμα ενός κόμβου K . Ονομάζουμε κάθε τόξο του κόμβου x_1, x_2, \dots, x_n , τα οποία αποτελούν τους γεννήτορες της ομάδας του κόμβου.

Η ομάδα του κόμβου θα έχει παράσταση της μορφής $G(K) = (x_1, x_2, \dots, x_n : r_1, r_2, \dots, r_m)$, όπου n είναι το πλήθος των τόξων του κόμβου και m το πλήθος των διασταυρώσεών του. Οι σχέσεις r_i , $i = 1, \dots, m$ προκύπτουν με τον ακόλουθο τρόπο:

Ξεκινώντας από ένα σημείο του $S^3 \setminus K$ ή του $\mathbb{R}^3 \setminus K$ κοντά σε μία διασταύρωση του κόμβου και με φορά αντίθετη από αυτή του ρολογιού, γράφουμε τον γεννήτορα x_j υψωμένο στη δύναμη $+1$ αν το τόξο έχει προσανατολισμό με φορά προς τη διασταύρωση, και -1 διαφορετικά. Οι σχέσεις λοιπόν θα είναι της μορφής:



Σχήμα 6.1 Οι σχέσεις r_i , $i = 1, \dots, m$

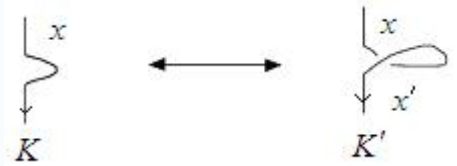
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 6.1 Αν επιλέγαμε να ξεκινήσουμε από διαφορετικό σημείο θα καταλήγαμε σε ισοδύναμη σχέση.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6.2 Η ομάδα $G(K) = (x_1, x_2, \dots, x_n : r_1, r_2, \dots, r_m)$ αποτελεί αναλλοίωτη ισοτοπίας.

Απόδειξη

Θα αποδείξουμε το ζητούμενο εξετάζοντας τις κινήσεις Reidemeister:

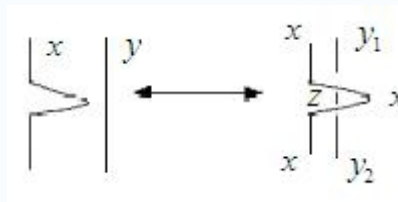
RI: Έστω ένα προσανατολισμένο διάγραμμα ενός κόμβου K και K' ο κόμβος που προκύπτει από τον K μετά από μία κίνηση RI.



Σχήμα 6.2 Η κίνηση RI

Η παράσταση της ομάδας του K' θα έχει επιπλέον ένα γεννήτορα από εκείνη του K . Στο νέο διάγραμμα του K' έχουμε μία νέα σχέση (μία νέα διασταύρωση): $xx^{-1}(x')^{-1} = 1 \Rightarrow x = x'$. Επομένως η κίνηση RI αφήνει αναλλοίωτη την ομάδα $G(K) = (x_1, x_2, \dots, x_n : r_1, r_2, \dots, r_m)$.

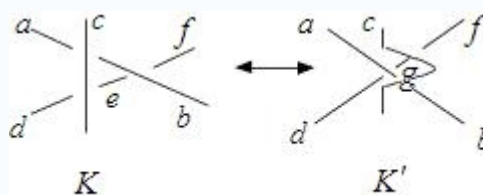
RII: Στο διάγραμμα του K' έχουμε δύο νέες διασταυρώσεις, από τις οποίες προκύπτουν οι σχέσεις: $z^{-1}x^{-1}y_1x = 1$ και $y_2^{-1}xzx^{-1} = 1$.



Σχήμα 6.3 Η κίνηση RII

Από την πρώτη σχέση έχουμε: $z^{-1}x^{-1}y_1x = 1 \Rightarrow z = x^{-1}y_1x$ και αντικαθιστώντας στη δεύτερη σχέση: $y_2^{-1}xx^{-1}y_1xx^{-1} = 1 \Rightarrow y_2 = y_1$. Επομένως και η κίνηση RII αφήνει αναλλοίωτη την ομάδα.

RIII: Από το διάγραμμα του κόμβου K προκύπτουν οι σχέσεις: $a^{-1}cbc^{-1} = 1$, $e^{-1}b^{-1}db = 1$ και $f^{-1}cec^{-1} = 1$ ενώ από το διάγραμμα του κόμβου K' οι σχέσεις: $a^{-1}cbc^{-1} = 1$, $g^{-1}cdc^{-1} = 1$ και $g^{-1}a^{-1}ga = 1$.



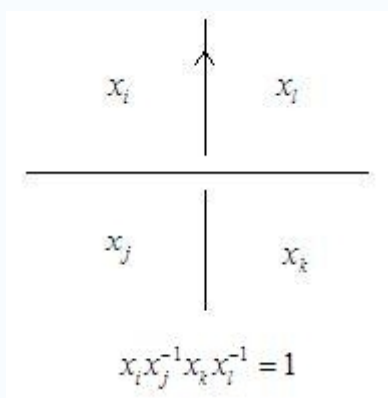
Σχήμα 6.4 Η κίνηση RIII

Απλοποιώντας την παράσταση της ομάδας $G(K)$ “εξουδετερώνοντας” το στοιχείο e έχουμε: $a^{-1}cbc^{-1} = 1$ και $f^{-1}a^{-1}cdc^{-1}a = 1$. Προκύπτει άμεσα πλέον ότι $a^{-1}c = cb^{-1}$ και άρα οι ομάδες $G(K), G(K')$ είναι ισομορφικές.

□

Παράσταση Dehn

Έστω ένα προσανατολισμένο διάγραμμα ενός κόμβου K . Ονομάζουμε τις περιοχές του διαγράμματος όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.5 και αυτές θα αποτελούν τους γεννήτορες της ομάδας του κόμβου. Οι σχέσεις $r_i, i = 1, \dots, m$ προκύπτουν με τον ακόλουθο τρόπο:



Σχήμα 6.6 Οι σχέσεις $r_i, i = 1, \dots, m$

Προσθέτουμε και μία σχέση της μορφής $x_u = 1$ για οποιοδήποτε $u = 1, 2, \dots, m$, απαλείφοντας έτσι το x_u και απλοποιώντας την παράσταση της ομάδας του κόμβου.

Ανάλυση Fox

Έστω w_1, w_2 λέξεις με γράμματα (αλφάβητο) $x_1^{\pm 1}, \dots, x_i^{\pm 1}, x_j^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}$. Ορίζουμε την παράγωγο Fox των λέξεων w_1, w_2 μέσω των ακόλουθων κανόνων:

1. $\frac{\partial}{\partial x_i}(x_i) = 1,$
2. $\frac{\partial}{\partial x_i}(x_j) = 0,$ για $i \neq j,$
3. $\frac{\partial}{\partial x_i}(1) = 0,$
4. $\frac{\partial}{\partial x_i}(x_i^{-1}) = -x_i^{-1},$
5. $\frac{\partial}{\partial x_i}(w_1 \cdot w_2) = \frac{\partial}{\partial x_i}(w_1) + w_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}(w_2).$

Έχοντας μία παράσταση της ομάδας ενός κόμβου έχουμε n λέξεις (σχέσεις της ομάδας) και n μεταβλητές. Χρησιμοποιώντας τη παράγωγο Fox υπολογίζουμε τη

παράγωγο κάθε λέξης ως προς κάθε μεταβλητή και αναπαριστούμε τα αποτελέσματα αυτών σε ένα $n \times n$ πίνακα, τον *Ιακωβιανό* πίνακα της παράστασης της ομάδας:

$$J = \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial w_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial w_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial w_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial w_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}. \text{ Διαγράφοντας μία οποιαδήποτε γραμμή και μία}$$

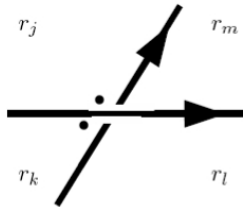
οποιαδήποτε στήλη και αντικαθιστώντας κάθε μεταβλητή με t , προκύπτει ένας $(n-1) \times (n-1)$ πίνακας μεταβλητής t , του οποίου η ορίζουσα είναι το πολώνυμο Alexander (κανονικοποιημένο).

7. Συνδυαστικές Μέθοδοι

Αρχικός Ορισμός (1928)

Έστω D ένα προσανατολισμένο διάγραμμα ενός κόμβου K και έστω u το πλήθος των διασταυρώσεων του D , c_1, c_2, \dots, c_u . Από Θεώρημα Euler έπεται ότι τα τόξα του διαγράμματος D χωρίζουν το επίπεδο σε $u+2$ περιοχές, έστω r_0, r_1, \dots, r_{u+1} . Επισημαίνουμε μία διασταύρωση με τον εξής τρόπο:

Σε κάθε διασταύρωση c_i , $i=1, \dots, u$, τοποθετούμε δύο τελείες στα αριστερά του κάτω τόξου της διασταύρωσης. Έστω οι τέσσερις περιοχές γύρω από την c_i διασταύρωση να είναι οι r_j, r_k, r_l, r_m , όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.1.



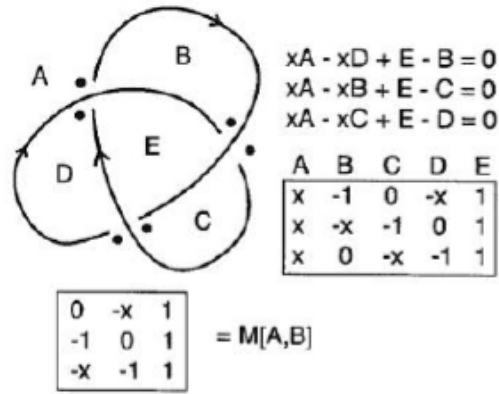
Σχήμα 7.1

Ορίζουμε τώρα σε κάθε διασταύρωση c_i τη γραμμική εξίσωση:

$$c_i(r) = tr_j - tr_k + r_l - r_m = 0$$

Ορίζοντας μία τέτοια εξίσωση για κάθε διασταύρωση του διαγράμματος D , προκύπτει ένα σύστημα u -εξισώσεων με $u+2$ μεταβλητές, το οποίο μπορεί να παρασταθεί σε μορφή πίνακα $M_{u \times u+2}$, όπου κάθε στοιχείο του πίνακα είναι είτε $\pm t$, είτε ± 1 , είτε μηδέν. Κάθε γραμμή του πίνακα αντιστοιχεί σε μία διασταύρωση του διαγράμματος και κάθε στήλη σε μία περιοχή του. Ο Alexander απέδειξε ότι διαγράφοντας δύο οποιεσδήποτε στήλες του πίνακα, οι οποίες αντιστοιχούν σε γειτονικές περιοχές του διαγράμματος, προκύπτει ένας τετραγωνικός πίνακας του οποίου η ορίζουσα αποτελεί αναλλοίωτη κόμβων, το πολυώνυμο Alexander $\Delta_K(t)$.

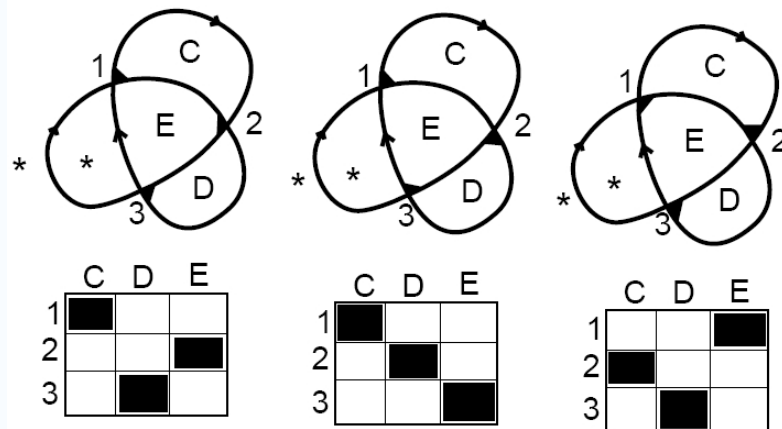
Για να γίνει πιο κατανοητή αυτή η μέθοδος υπολογισμού του πολυωνύμου Alexander παραθέτουμε ένα παράδειγμα υπολογισμού του για τον κόμβο trefoil. Στο Σχήμα 7.2 απεικονίζεται ο κόμβος trefoil, οι περιοχές του κόμβου και οι πίνακες που προκύπτουν από την παραπάνω μέθοδο. Καταλήγουμε έτσι στο αποτέλεσμα: $\Delta(\text{trefoil}) = t^2 - t + 1$, όπου ο συμβολισμός $A \overset{\cdot}{=} B$ σημαίνει ότι $A = \pm t^n B$, για κάποιο $t \in \mathbb{Z}$.



Σχήμα 7.2 Υπολογισμός του πολωνύμου Alexander

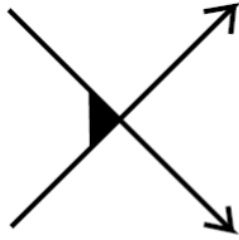
Ορισμός Kauffman

Δίνουμε τώρα περιληπτικά τον ορισμό του πολωνύμου Alexander ως άθροισμα καταστάσεων του κόμβου (*state summation*), όπου με κατάσταση κόμβου εννοούμε ένα επίπεδο γράφημα (αγνοούμε τις διασταυρώσεις), στο οποίο κάθε περιοχή έχει σημειωθεί με μία τελεία σε μία γειτονική της διασταύρωση. Σημειώνουμε ότι και σε αυτή τη μέθοδο κατασκευής του πολωνύμου Alexander «διαγράφουμε» δύο γειτονικές περιοχές. Στο Σχήμα 7.3 παρουσιάζονται οι καταστάσεις του κόμβου trefoil.



Σχήμα 7.3 Καταστάσεις του κόμβου trefoil

Ορίζουμε την έννοια της μαύρης τρύπας (*black hole*), όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.4.

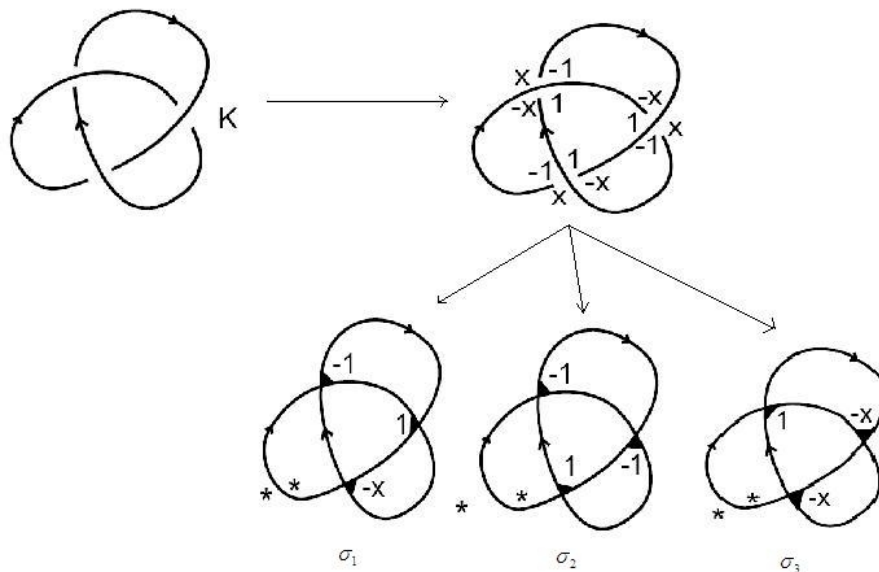


Σχήμα 7.4 Μαύρη τρύπα

Αν συμβολίσουμε με σ τις καταστάσεις ενός κόμβου και με $\langle K/\sigma \rangle = \Pi(\pm 1, \pm x)$, το γινόμενο δηλαδή των ± 1 και $\pm x$ τα οποία αντιστοιχούν στις τελείες των περιοχών, τότε το πολυώνυμο Alexander δίνεται από τον τύπο:

$$\Delta_K(x) = \sum_{\sigma \in \text{states}} (-1)^{\#(\text{black holes in } \sigma)} \langle K/\sigma \rangle.$$

Υπολογίζουμε και πάλι το πολυώνυμο Alexander του κόμβου trefoil:



Σχήμα 7.5 Υπολογισμός του πολυωνύμου Alexander

Από το Σχήμα 7.5 προκύπτει ότι:

$$\langle K / \sigma_1 \rangle = (-x)(+1)(-1) = x \text{ και υπάρχει μία μαύρη τρύπα στην κατάσταση } \sigma_1,$$

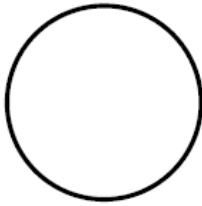
$$\langle K / \sigma_2 \rangle = (-1)(-1)(+1) = 1 \text{ και υπάρχουν δύο μαύρες τρύπες στην } \sigma_2,$$

$$\langle K / \sigma_3 \rangle = (-x)(-x)(+1) = x^2 \text{ και υπάρχουν δύο μαύρες τρύπες στην } \sigma_3.$$

Επομένως: $\Delta_K(x) = \sum_{\sigma \in \text{states}} (-1)^{\#(\text{black holes in } \sigma)} \langle K / \sigma \rangle = 1 - x + x^2$, όπως είδαμε και στο Σχήμα 7.2.

8. Παράρτημα

A. Κόμβοι με λιγότερες από 7 διασταυρώσεις και τα πολυώνυμα Alexander



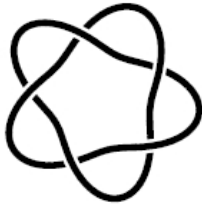
0_1
1



3_1
 $1 - t + t^2$



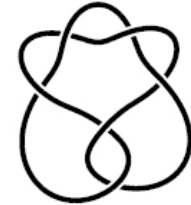
4_1
 $1 - 3t + t^2$



5_1
 $1 - t + t^2 - t^3 + t^4$



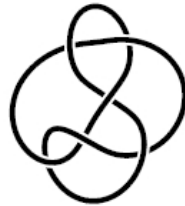
5_2
 $2 - 3t + 2t^2$



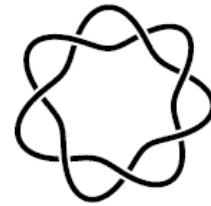
6_1
 $2 - 5t + 2t^2$



6_2
 $1 - 3t + 3t^2 - 3t^3 + t^4$



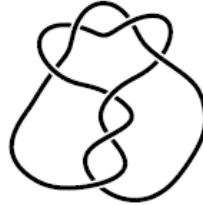
6_3
 $1 - 3t + 5t^2 - 3t^3 + t^4$



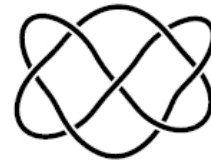
7_1
 $1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - t^5 + t^6$



7_2
 $3 - 5t + 3t^2$



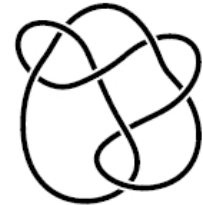
7_3
 $2 - 3t + 3t^2 - 3t^3 + 2t^4$



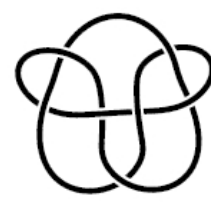
7_4
 $4 - 7t + 4t^3$



7_5
 $2 - 4t + 5t^2 - 4t^3 + 2t^4$



7_6
 $1 - 5t + 7t^2 - 5t^3 + t^4$



7_7
 $1 - 5t + 9t^2 - 5t^3 + t^4$

B. Πίνακας με τα πολυώνυμα Alexander κόμβων

3₁: 1 [-1] 1
4₁: -1 [3] -1
5₁: 1 -1 [1] -1 1
5₂: 2 [-3] 2
6₁: -2 [5] -2
6₂: -1 3 [-3] 3 -1
6₃: 1 -3 [5] -3 1
7₁: 1 -1 1 [-1] 1 -1 1
7₂: 3 [-5] 3
7₃: 2 -3 [3] -3 2
7₄: 4 [-7] 4
7₅: 2 -4 [5] -4 2
7₆: -1 5 [-7] 5 -1
7₇: 1 -5 [9] -5 1
8₁: -3 [7] -3
8₂: -1 3 -3 [3] -3 3 -1
8₃: -4 [9] -4
8₄: -2 5 [-5] 5 -2
8₅: -1 3 -4 [5] -4 3 -1
8₆: -2 6 [-7] 6 -2
8₇: 1 -3 5 [-5] 5 -3 1
8₈: 2 -6 [9] -6 2
8₉: -1 3 -5 [7] -5 3 -1
8₁₀: 1 -3 6 [-7] 6 -3 1
8₁₁: -2 7 [-9] 7 -2
8₁₂: 1 -7 [13] -7 1
8₁₃: 2 -7 [11] -7 2
8₁₄: -2 8 [-11] 8 -2
8₁₅: 3 -8 [11] -8 3
8₁₆: 1 -4 8 [-9] 8 -4 1
8₁₇: -1 4 -8 [11] -8 4 -1
8₁₈: -1 5 -10 [13] -10 5 -1
8₁₉: 1 -1 0 [1] 0 -1 1
8₂₀: 1 -2 [3] -2 1
8₂₁: -1 4 [-5] 4 -1
9₁: 1 -1 1 -1 [1] -1 1 -1 1
9₂: 4 [-7] 4
9₃: 2 -3 3 [-3] 3 -3 2
9₄: 3 -5 [5] -5 3
9₅: 6 [-11] 6
9₆: 2 -4 5 [-5] 5 -4 2
9₇: 3 -7 [9] -7 3
9₈: -2 8 [-11] 8 -2
9₉: 2 -4 6 [-7] 6 -4 2
9₁₀: 4 -8 [9] -8 4
9₁₁: -1 5 -7 [7] -7 5 -1
9₁₂: -2 9 [-13] 9 -2
9₁₃: 4 -9 [11] -9 4

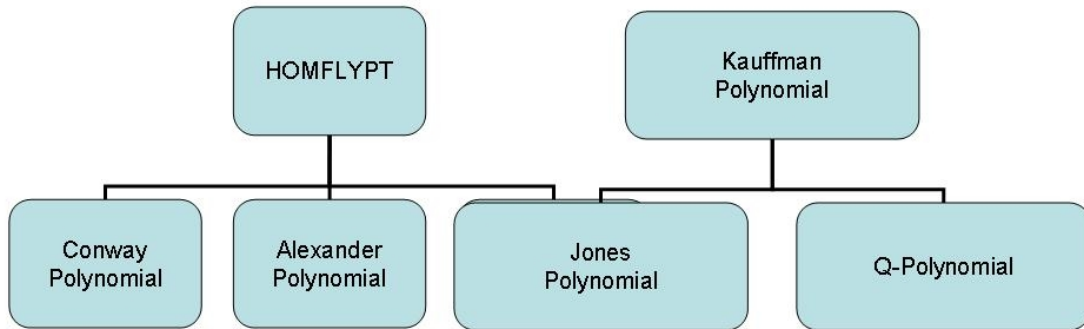
$9_{14}: 2 -9 [15] -9 2$
 $9_{15}: -2 10 [-15] 10 -2$
 $9_{16}: 2 -5 8 [-9] 8 -5 2$
 $9_{17}: 1 -5 9 [-9] 9 -5 1$
 $9_{18}: 4 -10 [13] -10 4$
 $9_{19}: 2 -10 [17] -10 2$
 $9_{20}: -1 5 -9 [11] -9 5 -1$
 $9_{21}: -2 11 [-17] 11 -2$
 $9_{22}: 1 -5 10 [-11] 10 -5 1$
 $9_{23}: 4 -11 [15] -11 4$
 $9_{24}: -1 5 -10 [13] -10 5 -1$
 $9_{25}: -3 12 [-17] 12 -3$
 $9_{26}: 1 -5 11 [-13] 11 -5 1$
 $9_{27}: -1 5 -11 [15] -11 5 -1$
 $9_{28}: 1 -5 12 [-15] 12 -5 1$
 $9_{29}: 1 -5 12 [-15] 12 -5 1$
 $9_{30}: -1 5 -12 [17] -12 5 -1$
 $9_{31}: 1 -5 13 [-17] 13 -5 1$
 $9_{32}: 1 -6 14 [-17] 14 -6 1$
 $9_{33}: -1 6 -14 [19] -14 6 -1$
 $9_{34}: -1 6 -16 [23] -16 6 -1$
 $9_{35}: 7 [-13] 7$
 $9_{36}: -1 5 -8 [9] -8 5 -1$
 $9_{37}: 2 -11 [19] -11 2$
 $9_{38}: 5 -14 [19] -14 5$
 $9_{39}: -3 14 [-21] 14 -3$
 $9_{40}: 1 -7 18 [-23] 18 -7 1$
 $9_{41}: 3 -12 [19] -12 3$
 $9_{42}: -1 2 [-1] 2 -1$
 $9_{43}: -1 3 -2 [1] -2 3 -1$
 $9_{44}: 1 -4 [7] -4 1$
 $9_{45}: -1 6 [-9] 6 -1$
 $9_{46}: -2 [5] -2$
 $9_{47}: 1 -4 6 [-5] 6 -4 1$
 $9_{48}: -1 7 [-11] 7 -1$
 $9_{49}: 3 -6 [7] -6 3$
 $10_1: -4 [9] -4$
 $10_2: -1 3 -3 3 [-3] 3 -3 3 -1$
 $10_3: -6 [13] -6$
 $10_4: -3 7 [-7] 7 -3$
 $10_5: 1 -3 5 -5 [5] -5 5 -3 1$
 $10_6: -2 6 -7 [7] -7 6 -2$
 $10_7: -3 11 [-15] 11 -3$
 $10_8: -2 5 -5 [5] -5 5 -2$
 $10_9: -1 3 -5 7 [-7] 7 -5 3 -1$
 $10_{10}: 3 -11 [17] -11 3$
 $10_{11}: -4 11 [-13] 11 -4$
 $10_{12}: 2 -6 10 [-11] 10 -6 2$
 $10_{13}: 2 -13 [23] -13 2$
 $10_{14}: -2 8 -12 [13] -12 8 -2$
 $10_{15}: 2 -6 9 [-9] 9 -6 2$

10_{16} : -4 12 [-15] 12 -4
 10_{17} : 1 -3 5 -7 [9] -7 5 -3 1
 10_{18} : -4 14 [-19] 14 -4
 10_{19} : 2 -7 11 [-11] 11 -7 2
 10_{20} : -3 9 [-11] 9 -3
 10_{21} : -2 7 -9 [9] -9 7 -2
 10_{22} : -2 6 -10 [13] -10 6 -2
 10_{23} : 2 -7 13 [-15] 13 -7 2
 10_{24} : -4 14 [-19] 14 -4
 10_{25} : -2 8 -14 [17] -14 8 -2
 10_{26} : -2 7 -13 [17] -13 7 -2
 10_{27} : 2 -8 16 [-19] 16 -8 2
 10_{28} : 4 -13 [19] -13 4
 10_{29} : 1 -7 15 [-17] 15 -7 1
 10_{30} : -4 17 [-25] 17 -4
 10_{31} : 4 -14 [21] -14 4
 10_{32} : -2 8 -15 [19] -15 8 -2
 10_{33} : 4 -16 [25] -16 4
 10_{34} : 3 -9 [13] -9 3
 10_{35} : 2 -12 [21] -12 2
 10_{36} : -3 13 [-19] 13 -3
 10_{37} : 4 -13 [19] -13 4
 10_{38} : -4 15 [-21] 15 -4
 10_{39} : -2 8 -13 [15] -13 8 -2
 10_{40} : 2 -8 17 [-21] 17 -8 2
 10_{41} : 1 -7 17 [-21] 17 -7 1
 10_{42} : -1 7 -19 [27] -19 7 -1
 10_{43} : -1 7 -17 [23] -17 7 -1
 10_{44} : 1 -7 19 [-25] 19 -7 1
 10_{45} : -1 7 -21 [31] -21 7 -1
 10_{46} : -1 3 -4 5 [-5] 5 -4 3 -1
 10_{47} : 1 -3 6 -7 [7] -7 6 -3 1
 10_{48} : 1 -3 6 -9 [11] -9 6 -3 1
 10_{49} : 3 -8 12 [-13] 12 -8 3
 10_{50} : -2 7 -11 [13] -11 7 -2
 10_{51} : 2 -7 15 [-19] 15 -7 2
 10_{52} : 2 -7 13 [-15] 13 -7 2
 10_{53} : 6 -18 [25] -18 6
 10_{54} : 2 -6 10 [-11] 10 -6 2
 10_{55} : 5 -15 [21] -15 5
 10_{56} : -2 8 -14 [17] -14 8 -2
 10_{57} : 2 -8 18 [-23] 18 -8 2
 10_{58} : 3 -16 [27] -16 3
 10_{59} : 1 -7 18 [-23] 18 -7 1
 10_{60} : -1 7 -20 [29] -20 7 -1
 10_{61} : -2 5 -6 [7] -6 5 -2
 10_{62} : 1 -3 6 -8 [9] -8 6 -3 1
 10_{63} : 5 -14 [19] -14 5
 10_{64} : -1 3 -6 10 [-11] 10 -6 3 -1
 10_{65} : 2 -7 14 [-17] 14 -7 2

10₆₆: 3 -9 16 [-19] 16 -9 3
 10₆₇: -4 16 [-23] 16 -4
 10₆₈: 4 -14 [21] -14 4
 10₆₉: 1 -7 21 [-29] 21 -7 1
 10₇₀: 1 -7 16 [-19] 16 -7 1
 10₇₁: -1 7 -18 [25] -18 7 -1
 10₇₂: -2 9 -16 [19] -16 9 -2
 10₇₃: 1 -7 20 [-27] 20 -7 1
 10₇₄: -4 16 [-23] 16 -4
 10₇₅: -1 7 -19 [27] -19 7 -1
 10₇₆: -2 7 -12 [15] -12 7 -2
 10₇₇: 2 -7 14 [-17] 14 -7 2
 10₇₈: -1 7 -16 [21] -16 7 -1
 10₇₉: 1 -3 7 -12 [15] -12 7 -3 1
 10₈₀: 3 -9 15 [-17] 15 -9 3
 10₈₁: -1 8 -20 [27] -20 8 -1
 10₈₂: -1 4 -8 12 [-13] 12 -8 4 -1
 10₈₃: 2 -9 19 [-23] 19 -9 2
 10₈₄: 2 -9 20 [-25] 20 -9 2
 10₈₅: 1 -4 8 -10 [11] -10 8 -4 1
 10₈₆: -2 9 -19 [25] -19 9 -2
 10₈₇: -2 9 -18 [23] -18 9 -2
 10₈₈: -1 8 -24 [35] -24 8 -1
 10₈₉: 1 -8 24 [-33] 24 -8 1
 10₉₀: -2 8 -17 [23] -17 8 -2
 10₉₁: 1 -4 9 -14 [17] -14 9 -4 1
 10₉₂: -2 10 -20 [25] -20 10 -2
 10₉₃: 2 -8 15 [-17] 15 -8 2
 10₉₄: -1 4 -9 14 [-15] 14 -9 4 -1
 10₉₅: 2 -9 21 [-27] 21 -9 2
 10₉₆: -1 7 -22 [33] -22 7 -1
 10₉₇: -5 22 [-33] 22 -5
 10₉₈: -2 9 -18 [23] -18 9 -2
 10₉₉: 1 -4 10 -16 [19] -16 10 -4 1
 10₁₀₀: 1 -4 9 -12 [13] -12 9 -4 1
 10₁₀₁: 7 -21 [29] -21 7
 10₁₀₂: -2 8 -16 [21] -16 8 -2
 10₁₀₃: 2 -8 17 [-21] 17 -8 2
 10₁₀₄: 1 -4 9 -15 [19] -15 9 -4 1
 10₁₀₅: 1 -8 22 [-29] 22 -8 1
 10₁₀₆: -1 4 -9 15 [-17] 15 -9 4 -1
 10₁₀₇: -1 8 -22 [31] -22 8 -1
 10₁₀₈: 2 -8 14 [-15] 14 -8 2
 10₁₀₉: 1 -4 10 -17 [21] -17 10 -4 1
 10₁₁₀: 1 -8 20 [-25] 20 -8 1
 10₁₁₁: -2 9 -17 [21] -17 9 -2
 10₁₁₂: -1 5 -11 17 [-19] 17 -11 5 -1
 10₁₁₃: 2 -11 26 [-33] 26 -11 2
 10₁₁₄: -2 10 -21 [27] -21 10 -2
 10₁₁₅: -1 9 -26 [37] -26 9 -1

10_{116} : -1 5 -12 19 [-21] 19 -12 5 -1
 10_{117} : 2 -10 24 [-31] 24 -10 2
 10_{118} : 1 -5 12 -19 [23] -19 12 -5 1
 10_{119} : -2 10 -23 [31] -23 10 -2
 10_{120} : 8 -26 [37] -26 8
 10_{121} : 2 -11 27 [-35] 27 -11 2
 10_{122} : -2 11 -24 [31] -24 11 -2
 10_{123} : 1 -6 15 -24 [29] -24 15 -6 1
 10_{124} : 1 -1 0 1 [-1] 1 0 -1 1
 10_{125} : 1 -2 2 [-1] 2 -2 1
 10_{126} : 1 -2 4 [-5] 4 -2 1
 10_{127} : -1 4 -6 [7] -6 4 -1
 10_{128} : 2 -3 1 [1] 1 -3 2
 10_{129} : 2 -6 [9] -6 2
 10_{130} : 2 -4 [5] -4 2
 10_{131} : -2 8 [-11] 8 -2
 10_{132} : 1 -1 [1] -1 1
 10_{133} : -1 5 [-7] 5 -1
 10_{134} : 2 -4 4 [-3] 4 -4 2
 10_{135} : 3 -9 [13] -9 3
 10_{136} : -1 4 [-5] 4 -1
 10_{137} : 1 -6 [11] -6 1
 10_{138} : 1 -5 8 [-7] 8 -5 1
 10_{139} : 1 -1 0 2 [-3] 2 0 -1 1
 10_{140} : 1 -2 [3] -2 1
 10_{141} : -1 3 -4 [5] -4 3 -1
 10_{142} : 2 -3 2 [-1] 2 -3 2
 10_{143} : 1 -3 6 [-7] 6 -3 1
 10_{144} : -3 10 [-13] 10 -3
 10_{145} : 1 1 [-3] 1 1
 10_{146} : 2 -8 [13] -8 2
 10_{147} : -2 7 [-9] 7 -2
 10_{148} : 1 -3 7 [-9] 7 -3 1
 10_{149} : -1 5 -9 [11] -9 5 -1
 10_{150} : -1 4 -6 [7] -6 4 -1
 10_{151} : 1 -4 10 [-13] 10 -4 1
 10_{152} : 1 -1 -1 4 [-5] 4 -1 -1 1
 10_{153} : 1 -1 -1 [3] -1 -1 1
 10_{154} : 1 0 -4 [7] -4 0 1
 10_{155} : -1 3 -5 [7] -5 3 -1
 10_{156} : 1 -4 8 [-9] 8 -4 1
 10_{157} : -1 6 -11 [13] -11 6 -1
 10_{158} : -1 4 -10 [15] -10 4 -1
 10_{159} : 1 -4 9 [-11] 9 -4 1
 10_{160} : -1 4 -4 [3] -4 4 -1
 10_{161} : 1 0 -2 [3] -2 0 1
 10_{162} : -3 9 [-11] 9 -3
 10_{163} : 1 -5 12 [-15] 12 -5 1
 10_{164} : 3 -11 [17] -11 3
 10_{165} : -2 10 [-15] 10 -2

Γ. Πολυωνυμικές Αναλλοίωτες



Βιβλιογραφία

(Ενδεικτική)

1. Adams C.C., *The Knot Book*, Freeman, New York, 1994.
2. Alexander J. W., *Topological invariants of knots and links*, Trans. Am. Math. Soc. **30**, 275-306, 1928.
3. Burde G., Zieschang H., *Knots*, W. de Gruyter, Berlin, 1986.
4. Conway J., *An Enumeration of Knots and Links and Some of their related properties*, Proc. Conf. Oxford, 1967.
5. Cromwel P., *Knots and Links*, Cambridge University Press, 2004.
6. Dehn M., *Die beiden Kleeblattschlingen*, Math, Annalen 75, p.1-12, 1914.
7. Fox R.H., *A quick trip through knot theory*, from Topology of 3-manifolds, Prentice-Hall, 1962.
8. Freyd P., Yetter D., Hoste J., Lickorish W., Millett K., Ocneanu A., *A new polynomial invariant of knots and links*, Bull. Am. Math. Soc. **12**, 239-246, 1985.
9. Fulton W., *Algebraic Topology, A first course*, Springer-Verlag, 1995.
10. Gilbert N.D., Porter T., *Knots and Surfaces*, Oxford Uni. Press, 1994.
11. Grossley M. D., *Essential Topology*, Springer-Verlag, New York, Inc., 2007.
12. Hatcher A., *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2001.
13. Hatcher A., *Notes on Basic 3-Manifold Topology*, Available from [www.http://www.math.cornell.edu/~hatcher](http://www.math.cornell.edu/~hatcher).
14. Kauffman L. H., *Formal Knot Theory*, Dover Publications, Inc., Mineola, New York 2006.
15. Kawauchi A., *Survey on Knot Theory*, Birkhauser, 1996.
16. Kinsey C., *Topology Of Surfaces*, Springer-Verlag, 1993.
17. Lickorish W.B.R., *An Introduction to Knot Theory*, Springer-Verlang, 1997.
18. Livingston C., *Knot theory*, Cambridge University Press, 1996.
19. Murasugi K., *Knot Theory and Its Applications*, translated by B. Kurpita, Birkhauser Boston, 1996.
20. Murasugi K., *On the Alexander Polynomial of the alternating knot*, Osaka Math. J. 10, p.181-189, 1958.
21. Reidemeister K., *Knotentheorie*, Springer-Verlag Berlin, 1932.
22. Rolfsen D., *Knots and Links*, Publish & Perish Inc., Berkeley (AMS Chelsea Publishing 2003), 1976.
23. Sossinsky A., *Knots*, Harvard University Press, 1999.

