Σ.Ε.Μ.Φ.Ε. - ΕΡΓΑΣΙΑ 2 - ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ - 2013-2014.

Άσκηση 1

(α) Έχουμε ότι: $\alpha\beta\alpha = \beta \Rightarrow \alpha\beta = \beta\alpha^{-1} \Rightarrow \alpha\beta = \beta\alpha^{-1}\cdot\alpha^4 \Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha\beta = \beta\alpha^3$.

Έτσι, κάθε στοιχείο της D_4 έχει τη μορφή $\alpha^\kappa\cdot\beta^\lambda$, με $\kappa = 0,1,2,3$ και $\lambda = 0,1$. Άρα:

$$D_4 = \{e, \alpha, \beta, \alpha^2, \alpha^3, \alpha\beta, \alpha^2\beta, \alpha^3\beta\} \text{ και άρα } |D_4| = 8.$$

Οι ανακλάσεις είναι τα στοιχεία β, β^3.

(β) Οι υποομάδες της D_4 είναι:

- υποομάδες τάξης 2: $\langle\alpha^2\rangle, \langle\beta\rangle, \langle\alpha\beta\rangle, \langle\alpha^2\beta\rangle, \langle\alpha^3\beta\rangle$
- υποομάδες τάξης 4: $\langle\alpha\rangle, \langle\alpha^2, \beta\rangle, \langle\alpha^3, \alpha\beta\rangle, \langle\alpha\beta, \alpha^3\beta\rangle$.

(γ) Είναι $H = \langle\alpha^2, \beta\rangle = \{1, \alpha^2, \beta, \alpha^2\beta\}$ με $|H| = 4$.

Η H δεν είναι κυκλική αφού τα στοιχεία της α^2, β και $\alpha^2\beta$ είναι τάξης 2.

(δ) Έστω $\alpha^\kappa\cdot\beta^\lambda \in Z(D_4)$. Τότε: $\alpha\cdot\alpha^\kappa\cdot\beta^\lambda = \alpha^\kappa\cdot\beta^\lambda\cdot\alpha \Rightarrow$
$\Rightarrow \underline{\alpha^{\kappa+1}\cdot\beta^\lambda = \alpha^\kappa\cdot\beta^\lambda\cdot\alpha \quad (1)}$. Ακόμα: $\beta\cdot\alpha^\kappa\cdot\beta^\lambda = \alpha^\kappa\cdot\beta^\lambda\cdot\beta \Rightarrow$
$\Rightarrow \underline{\beta\cdot\alpha^\kappa\cdot\beta^\lambda = \alpha^\kappa\cdot\beta^{\lambda+1} \quad (2)}$.

Αν $\underline{\lambda = 1}$, τότε η $\underline{(1)}$ δίνει: $\underline{\alpha^{\kappa+1}\cdot\beta = \alpha^\kappa\cdot\beta\cdot\alpha}$. Όμως έχουμε ότι
$\alpha\beta\alpha = \beta \Rightarrow \beta\alpha = \alpha^{-1}\cdot\beta \Rightarrow \beta\alpha = \alpha^4\cdot\alpha^{-1}\cdot\beta \Rightarrow \underline{\beta\alpha = \alpha^3\beta}$.

Οι δύο τελευταίες σχέσεις δίνουν: $a^{k+1}\cdot\beta = a^k\cdot a^3\cdot\beta \Rightarrow$
$a = a^3 \Rightarrow a^2 = e$, άτοπο.

$\boxed{\text{Άρα}: \lambda = 0.}$

Για $\lambda = 0$ η (2) δίνει: $\beta a^k = a^k\beta \Rightarrow a^k = \beta^{-1}a^k\beta \overset{(\text{γιατί;})}{\Longrightarrow}$
$\Rightarrow a^k = (\beta^{-1}a\beta)^k \Rightarrow a^k = (a^3)^k \Rightarrow a^k = a^{3k} =$
$\Rightarrow a^{2k} = e \Rightarrow k = 2.$

Επομένως: $Z(D_4) = \langle a^2\rangle = \{e, a^2\}$.

Άσκηση 2

(α) Είναι: $C_{12} = \langle a \,/\, a^{12} = e\rangle = \{e, a, a^2, a^3, \dots, a^{11}\}$.

Η τάξη μιας πεπερασμένης ομάδας διαιρείται από την τάξη κάθε υποομάδας της. Έτσι, αν m η τάξη μιας υποομάδας της H και k ο δείκτης της υποομάδας στην C_{12}, τότε: $\boxed{12 = k\cdot m.}$ Έτσι, έχουμε τις υποομάδες:

A_1 με δείκτη 1 και τάξη 12: $A_1 = C_{12} = \langle a\rangle$.
A_2 με δείκτη 2 και τάξη 6: $A_2 = \langle a^2\rangle = \{e, a^2, a^4, a^6, a^8, a^{10}$
A_3 με δείκτη 3 και τάξη 4: $A_3 = \langle a^3\rangle = \{e, a^3, a^6, a^9\}$.
A_4 με δείκτη 4 και τάξη 3: $A_4 = \langle a^4\rangle = \{e, a^4, a^8\}$.
A_6 με δείκτη 6 και τάξη 2: $A_6 = \langle a^6\rangle = \{e, a^6\}$.
A_{12} με δείκτη 12 και τάξη 1: $A_{12} = \langle e\rangle = \{e\}$.

(β) Υπάρχουν στοιχεία της $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/4$ τάξης 4 (π.χ. $(0,1)$), ενώ τα στοιχεία της $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ είναι μέχρι τάξης 2.

Άσκηση 3

(α) Τα στοιχεία της S_3 είναι:

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \rho^3 = e,$$

$$\mu_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ και } \mu_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Η S_3 ταυτίζεται με την D_3 (συμμετρίες ισόπλευρου τριγώνου αν οι κορυφές του τριγώνου ονομαστούν 1, 2, 3, τότε η ρ παριστάνει στροφή 120° γύρω από το κέντρο του τριγώνου, η μ_1 παριστάνει ανάκλαση ως προς τη διχοτόμο της γωνίας 1, κ.ο.κ..

(β) Εύκολα δ.ό. $\forall \tau \in S_3$ με $\tau \neq e$ $\exists \sigma \in S_3 : \tau\sigma \neq \sigma\tau$.
Άρα $Z(S_3) = \{e\}$, όπου e η ταυτοτική μετάθεση.
(Το παραπάνω γενικεύεται και έχουμε ότι $Z(S_n) = \{e\}$ για $n>$ ενώ για $n=2$ είναι: $Z(S_2) = S_2$).

(γ) Είναι: $A_4 = \{(1), (23)(34), (24)(43), (12)(23), (13)(32),$
$(13)(34), (14)(43), (12)(24), (14)(42),$
$(13)(42), (12)(34), (14)(23)\} =$

$= \{(1), (234), (243), (123), (132), (134)$
$(143), (124), (142), (13)(42), (12)(34$
$(14)(23)\}$.

(δ) Υποομάδες της S_4:

$\{e\}$, $\{e,(12)\}$, $\{e,(13)\}$, $\{e,(14)\}$, $\{e,(23)\}$ κ.δ.π

$\{e, (12)(34)\}$, $\langle(1234)\rangle$, $\langle(12),(34)\rangle$ κ.δ.π.

$\{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$

$\langle(123)\rangle$, $\langle(124)\rangle$ κ.δ.π.

$\langle(123),(12)\rangle$ κ.δ.π., $\langle(123),(12)(34)\rangle$ κ.δ.π.

$\langle(1234),(13)\rangle$ κ.δ.π.

$\langle(1234)(12)\rangle$ κ.λ.π.

Άσκηση 4

Έστω G μια ομάδα με τάξη 6.

- Αν η G έχει ένα στοιχείο με τάξη 6, τότε η G είναι κυκλική (και αβελιανή). Δηλαδή: $G \simeq \mathbb{Z}_6$.

- Έστω ότι η G δεν έχει στοιχείο τάξης 6. Τότε, επειδή η τάξη κάθε στοιχείου της G διαιρεί την τάξη της ομάδας, κάθε στοιχείο της G θα είναι τάξης 2 ή 3.

Δείχνουμε ότι όλα τα στοιχεία της ομάδας <u>ΔΕΝ</u> έχουν τάξη 2:
Πράγματι, έστω ότι όλα τα στοιχεία της G έχουν τάξη 2. Τότε η G θα είναι αβελιανή. Έστω $a, \beta \in G$ με $a, \beta \neq e$ και $a \neq \beta$ και έστω ακόμα $G_1 = \{e, a\}$, $G_2 = \{e, \beta\}$ δύο υποομάδες της G. Θα έχουμε τότε: $G_1 \cdot G_2 = \{e, a, \beta, a \cdot \beta\}$.

Το $G_1 \cdot G_2$ είναι υποομάδα της G, αφού: $G_1 G_2 G_1 G_2 = G_1 G_1 G_2 G_2 = G_1 G_2$ (πεπερασμένο και κλειστό ως προς τη πράξη). Είναι $|G_1 G_2| = 4$ και $4 \nmid 6$.

Έτσι λοιπόν, υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο τάξης 3. Έστω $a \in G$ στοιχείο τάξης 3 και $H = \{e, a, a^2\}$ η κυκλική ομάδα που παράγεται από το a. Έστω $\beta \in G$ και $\beta \notin H$. Είναι $G = H \cup H\beta = \{e, a, a^2, \beta, a\beta, a^2\beta\}$. Προφάνως $\beta^2 \in G$. Είναι $\beta^2 \neq a\beta$ διότι αν ήταν $\beta^2 = a\beta$, τότε:

$\beta^2 \cdot \beta^{-1} = a\beta\beta^{-1} \Rightarrow \beta = a$, άτοπο.

Επίσης, $\beta^2 \neq a^2\beta$, διότι αν ήταν $\beta^2 = a^2\beta \Rightarrow \beta = a^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \beta \in H$, άτοπο.
Άρα: $\beta^2 = e$ ή $\beta^2 = a$ ή $\beta^2 = a^2$.

Έστω $\beta^2 = a$. Τότε το στοιχείο β είναι τάξης 3 (αφού $\beta^2 \neq e$ και $|\beta| \neq 6$). Είναι:
$$\beta^2 = a \Rightarrow \beta^2 \cdot \beta = a \cdot \beta \Rightarrow a\beta = \beta^3 = e, \text{ άτοπο.}$$

Αν $\beta^2 = a^2$, τότε: $a^2\beta = \beta^2\beta \Rightarrow a^2\beta = \beta^3 \Rightarrow a^2\beta = e \Rightarrow$
$a^3\beta = a \Rightarrow e\beta = a$ (είναι $a^3 = e$) $\Rightarrow$
$\beta = a$, άτοπο.

Άρα θα είναι $\beta^2 = e$.

Θεωρούμε το στοιχείο $\beta \cdot a$. Είναι $\beta a \neq e$, $\beta a \neq a$, $\beta a \neq a^2$, $\beta a \neq \beta$. Άρα θα είναι $\beta a = a\beta$ ή $\beta a = a^2\beta$.

Αν ήταν $\beta a = a\beta$, τότε το στοιχείο $a\beta$ θα ήταν τάξης 6 (διότι $|a\beta| = \text{ε.κ.π.}(|a|, |\beta|)$), άτοπο.

Άρα ισχύει $\beta a = a^2\beta$ και επομένως η G <u>δεν</u> είναι αβελιανή

Δηλάδη: $G = \langle a, \beta \,/\, a^3 = \beta^2 = 1 \text{ και } \beta^{-1} a \beta = a^{-1} \rangle \cong D_3$.

Διαφορετικά, από γνωστή Πρόταση έχουμε: Αν p περιττός, πρώτος αριθμός, τότε κάθε ομάδα τάξης $2p$ είναι ισόμορφη είτε με την D_p, είτε με την $\mathbb{Z}_{2p}$.

Για $p = 3$ έχουμε $G \cong \mathbb{Z}_6$ ή $G \cong D_3$.

Άσκηση 5

(α) Έστω $|G| = p$, όπου p πρώτος αριθμός. Αν $p = 1$, τότε $G = \{e\}$, οπότε η G είναι κυκλική.

Έστω $p \neq 1$ και $a \in G$. Προφανώς $H = \langle a \rangle$ είναι μια κυκλική υποομάδα της G. Πρέπει η τάξη της H να διαιρεί τη τάξη της G, δλδ $|H| / p$. Επειδή όμως $|H| \neq 1$ και p πρώτος, θα είναι $|H| = p$. Άρα $H = G = \langle a \,/\, a^p = e$, με p πρώτο $\rangle$.

(β) Έστω ότι $a^k = e \;\; \forall a \in G$. Από θεώρημα Lagrange έχουμε ότι: $k / n \Longleftrightarrow n = \lambda \cdot k$.

Άρα: $a^n = a^{k \cdot \lambda} = (a^k)^\lambda = e^\lambda = e$.