ΑΛΓΕΒΡΑ Ι - ΕΡΓΑΣΙΑ 1

ΣΕΜΦΕ, 7ο Εξάμηνο, ακ. έτος 2012-13

1. Έστω συνάρτηση $f : I\!R \to I\!R$ ένα προς ένα και επί, και τέτοια ώστε $f^{-1}(0) = 1$. Το σύνολο $I\!R$ το εφοδιάζουμε με πράξη $*$ που ορίζεται ως εξής: $a * b = f[f^{-1}(a) + f^{-1}(b) - 1]$. Δείξτε ότι $(I\!R, *)$ είναι αντιμεταθετική ομάδα.

2. i) Δείξτε ότι κάθε ομάδα με τρία στοιχεία είναι αντιμεταθετική.
ii) Δείξτε ότι κάθε ομάδα με τέσσερα στοιχεία είναι αντιμεταθετική.

3. i) Έστω $(U_n, \cdot)$ η πολλαπλασιαστική ομάδα των n-οστών ριζών της μονάδας. Δείξτε ότι $(\cup_n U_n, \cdot)$ είναι ομάδα, υποομάδα της $(U, \cdot)$, της πολλαπλασιαστικής ομάδας των μιγαδικών αριθμών μέτρου ένα.
ii) Δείξτε ότι όλα τα στοιχεία της $\cup_n U_n$ είναι πεπερασμένης τάξης ενώ η $\cup_n U_n$ είναι άπειρης τάξης.

4. Έστω G αντιμεταθετική ομάδα. Δείξτε ότι το σύνολο, T, των στοιχείων πεπερασμένης τάξης της G είναι υποομάδα της G (torsion subgroup).

5. Έστω G ομάδα και έστω $a, b \in G$. Δείξτε ότι τα στοιχεία ab και ba έχουν την ίδια τάξη. (Υπόδειξη: $ba = a^{-1}(ab)a$.)

6. i) Έστω G ομάδα. Το σύνολο $Z(G) = \{z \in G \,|\, zg = gz \,\forall\, g \in G\}$ λέγεται κέντρο της G. Δείξτε ότι το $Z(G)$ είναι υποομάδα της G.
ii) Βρείτε το κέντρο της ομάδας S_3.

7. Εστω H υποομάδα μιας (πολλαπλασιαστικής) ομάδας G. Στην G ορίζουμε τη σχέση

$$x \sim y \quad \Longleftrightarrow \quad x^{-1}y \in H.$$

i) Δείξτε ότι η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας. Σε ποιά σημεία χρησιμοποιήσατε το ότι H υποομάδα της G;
ii) Δείξτε ότι η κλάση ισοδυναμίας ενός στοιχείου $g \in G$ είναι το σύνολο $gH = \{gh \mid h \in H\}$.
iii) Δείξτε ότι για κάθε $g \in G$ υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη και επί απεικόνιση $\phi : H \longrightarrow gH$.

8. i) Έστω n θετικός ακέραιος. Δείξτε ότι οι γεννήτορες της κυκλικής ομάδας $\mathbb{Z}_n$ είναι ακριβώς όλα τα στοιχεία $\overline{k}$ όπου ο k είναι πρώτος προς τον n.
ii) Έστω στη συνέχεια $\phi(n)$ το πλήθος των θετικών ακεραίων που είναι μικρότεροι του n και πρώτοι προς τον n. Δείξτε ότι

$$\sum_{d|n} \phi(d) = n$$

για όλους τους διαιρέτες $d = d_1, \ldots, d_k$ του n. (Υπόδειξη: Θεωρήστε όλες τις υποομάδες $H_1, \ldots, H_k$ της $\mathbb{Z}_n$ και το πλήθος των γεννητόρων της καθεμιάς.)

Παράδοση: Πέμπτη 6 Δεκεμβρίου 2012.

Σ. Λαμπροπούλου