ΕΡΓΑΣΙΑ 4 - ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΆΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ - 2013-2014

Άσκηση 1

(α) Έχουμε ότι: $\operatorname{adj}(P^{-1}\cdot P) = \operatorname{adj} I = \operatorname{adj}(P\cdot P^{-1}) \overset{(\beta)}{\Rightarrow}$

$$(\operatorname{adj} P)\cdot(\operatorname{adj} P^{-1}) = I = (\operatorname{adj} P^{-1})\cdot(\operatorname{adj} P) \Rightarrow$$

$$(\operatorname{adj} P)^{-1} = \operatorname{adj}(P^{-1}).$$

(β) Είναι: $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\operatorname{adj} A$, $B^{-1} = \frac{1}{|B|}\operatorname{adj} B$ και

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{|AB|}\cdot \operatorname{adj}(AB).$$

Έχουμε λοιπόν: $\operatorname{adj}(AB) = |A\cdot B|\cdot(AB)^{-1} =$

$$= |A|\cdot|B|\cdot B^{-1}\cdot A^{-1} =$$

$$= |A|\cdot|B|\cdot\frac{1}{|B|}\cdot\operatorname{adj} B\cdot\frac{1}{|A|}\cdot\operatorname{adj} A =$$

$$= \operatorname{adj} B\cdot\operatorname{adj} A.$$

(γ) Έχουμε ότι $P^{-1} = \frac{1}{|P|}\cdot\operatorname{adj} P = \frac{\operatorname{adj} P}{1} = \operatorname{adj} P$ και

$$Q^{-1} = \frac{1}{|Q|}\cdot\operatorname{adj} Q = \frac{\operatorname{adj} Q}{1} = \operatorname{adj} Q.$$

Άρα:

$$\operatorname{adj}(Q^{-1}\cdot B\cdot P^{-1}) = (\operatorname{adj} P^{-1})\cdot(\operatorname{adj} B)\cdot(\operatorname{adj} Q^{-1}) \overset{(\alpha)}{=}$$

$$= (\operatorname{adj} P)^{-1}\cdot(\operatorname{adj} B)\cdot(\operatorname{adj} Q)^{-1} =$$

$$= (P^{-1})^{-1}\cdot\operatorname{adj} B\cdot(Q^{-1})^{-1} =$$

$$= P\cdot A\cdot Q.$$

Άσκηση 2

(α) Ισχύει ότι: $A^T = -A \Rightarrow \det(A^T) = \det(-A) \xRightarrow[\det(-A)=(-1)^n\det A]{\det(A^T)=\det(A)}$

$\Rightarrow \det(A) = (-1)^n \cdot \det(A) \xRightarrow[k\in\mathbb{Z}]{n=2k+1}$

$\Rightarrow \det(A) = -\det(A) \Rightarrow \det(A) = 0.$

(β) Ισχύει ότι: $P^2 = P \Rightarrow \det(P^2) = \det(P) \Rightarrow$

$(\det P)^2 = \det(P) \Rightarrow \det(P)\cdot(\det(P)-1) = 0 \Rightarrow$

$\det P = 1$, αφού $\det(P) \neq 0$ (P αντιστρέψιμο)

(γ) Ισχύει ότι: $B = P^{-1}\cdot A \cdot P \Rightarrow |B| = |P^{-1} A P| \Rightarrow$

$\Rightarrow |B| = |P^{-1}|\cdot|A|\cdot|P| \Rightarrow |B| = |P|^{-1}\cdot|A|\cdot|P| \Rightarrow$

$\Rightarrow |B| = |A|.$

Σχόλιο: $\operatorname{rank}(B) = \operatorname{rank}(P^{-1}\cdot(A\cdot P)) \overset{P^{-1}\ \text{αντ.}}{=} \operatorname{rank}(A\cdot P) \overset{P\ \text{αντ.}}{=}$
$= \operatorname{rank}(A).$

Άσκηση 3

(α) Έστω η κ-γραμμή του πίνακα P γρ. συνδυασμός των j, q, ..., p γραμμών του P με συντελεστές $\lambda_j, \lambda_q, \dots, \lambda_p$ αντίστοιχα. Σύμφωνα με γνωστό θεώρημα, αν αφαιρέσουμε από την κ-οστή γραμμή διαδοχικά την j-γραμμή πολ/μένη επί λ_j, στη συνέχεια την q-οστή γραμμή πολ/νη με λ_q, κ.τ.λ., και τέλος την p-οστή γραμμή πολ/νη με λ_p, η τιμή της ορίζουσας δεν μεταβάλλεται. Η κ-γραμμή όμως πλέον έχει στοιχεία από μηδενικά.

Άρα: $\det(P) = 0 \Rightarrow \nexists\, P^{-1}$.

(β) ($\Rightarrow$) Αν οι n-γραμμές του πίνακα P αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^n$ έπεται ότι τα διανύσματα είναι γρ. ανεξάρτητα $\Rightarrow \det(P) \neq 0 \Rightarrow \exists P^{-1}$.

($\Leftarrow$) Αν $\exists P^{-1} \Rightarrow \det(P) \neq 0$ και $\text{rank}(P) = n$.

Άρα οι n-γραμμές του πίνακα P αποτελούν γρ. ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^n$. Από γνωστή πρόταση, θα αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^n$.

Άσκηση 4

(α) Είναι: $A_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5$, $A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -8$,

$$A_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 17, \quad A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4,$$

$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2$

$$A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -7,$$

$$A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Άρα: $\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 2 \\ -8 & 2 & -1 \\ 17 & -7 & -2 \end{bmatrix}$ και $\det(A) = 8 - 4 - 3 - 12 = -11$.

Επομένως: $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \cdot \operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} -5/11 & 4/11 & -2/11 \\ 8/11 & -2/11 & 1/11 \\ -17/11 & 7/11 & 2/11 \end{bmatrix}$.

(β) $\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{A \quad | \quad I} \underset{r_3 \to r_3 + 2r_1}{\overset{r_2 \to r_2 - 3r_1}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{r_2 \to r_2 \cdot (-\frac{1}{2})}{\sim}$

$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 3/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 7 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{r_3 \to r_3 - 7r_2}{\overset{r_1 \to r_1 - 2r_2}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{2} & -\frac{17}{2} & \frac{7}{2} & 1 \end{array}\right] \sim$

$$\underset{r_3 \to r_3 \cdot \frac{2}{11}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{17}{11} & \frac{7}{11} & \frac{2}{11} \end{array}\right] \underset{r_2 \to r_2 + \frac{1}{2} r_3}{\overset{r_1 \to r_1 - r_3}{\sim}}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5/11 & 4/11 & -2/11 \\ 0 & 1 & 0 & 8/11 & -2/11 & 1/11 \\ 0 & 0 & 1 & -17/11 & 7/11 & 2/11 \end{array}\right]$$

$$\underbrace{\qquad}_{I} \qquad \underbrace{\qquad\qquad}_{A^{-1}}.$$

(γ) Κάνοντας τις πράξεις έχουμε ότι: $A^3 - 7A^2 + 5A + 11 I_3 = 0$

Έχουμε ότι: $A^3 - 7A^2 + 5A = -11 I_3 \Rightarrow$

$$A \cdot (A^2 - 7A + 5I_3) = -11 I_3 \Rightarrow$$

$$A \cdot \left[-\frac{1}{11} (A^2 - 7A + 5I_3) \right] = I_3 \Rightarrow$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{11} (A^2 - 7A + 5I_3).$$

$$\det(A) \cdot \det\left(-\frac{1}{11} (A^2 - 7A + 5I_3) \right) = 1 \Rightarrow$$

$$\det(A) \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}.$$

Άσκηση 5

$$(\Sigma):\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & -3 & 4 & 5 \\ 5 & 10 & -8 & 11\lambda & 12 \end{array}\right] \underset{\rho_3 \to \rho_3 - 5\rho_1}{\overset{\rho_2 \to \rho_2 - 2\rho_1}{\sim}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & (11\lambda-15) & 2 \end{array}\right] \overset{\rho_3 \to \rho_3 - 2\rho_2}{\sim}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 11(\lambda-1) & 0 \end{array}\right] : (\Sigma')$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

i) Για $\lambda = 1$: $(\Sigma') : \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ \qquad\qquad x_3 - 2x_4 = 1 \end{cases}$.

θέτουμε $x_2 = \lambda \in \mathbb{R}$, $x_4 = \mu \in \mathbb{R}$ και έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - 2x_3 = 2 - 2\lambda - 3\mu \\ \quad x_3 = 1 + 2\mu \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 - 2\lambda - 2\mu \\ x_2 = \lambda \in \mathbb{R} \\ x_3 = 1 + 2\mu \\ x_4 = \mu \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Άρα: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (4 - 2\lambda - 2\mu, \lambda, 1 + 2\mu, \mu) =$

$= (4,0,1,0) + \lambda(-2,1,0,0) + \mu(-1,0,2,1) =$

$= (4,0,1,0) + \langle (-2,1,0,0), (-1,0,2,1) \rangle$.

$(4,0,1,0)$ είναι μια λύση του (Σ) και

$\langle (-2,1,0,0), (-1,0,2,1) \rangle$ γενική λύση του αντίστοιχου ομογενούς.

ii) Για $\lambda \neq 1$: $(\Sigma'): \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 0 \end{cases}$. Θέτουμε $x_2 = \kappa \in \mathbb{R}$ και έχουμε:

$\left.\begin{array}{l} x_1 = 4 - 2\kappa \\ x_2 = \kappa \in \mathbb{R} \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 0 \end{array}\right\}$ $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (4-2\kappa, \kappa, 1, 0) =$

$= (4,0,1,0) + \kappa \cdot (-2, 1, 0, 0) =$

$= (4,0,1,0) + \langle(-2,1,0,0)\rangle$.

Άσκηση 6

Μέθοδος Grammer :

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & \lambda \\ 1 & 7 & -6 \end{vmatrix} = 12 - 21 + 3\lambda - 1 - 14\lambda + 54 = $$
$$= -11\lambda + 44 = -11(\lambda - 4)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & \lambda \\ \lambda & 7 & -6 \end{vmatrix} = 30 - 14 + 3\lambda^2 - \lambda - 35\lambda + 36 =$$
$$= 3\lambda^2 - 36\lambda + 52$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & 2 & \lambda \\ 1 & \lambda & -6 \end{vmatrix} = -24 + 3\lambda + 5\lambda + 2 - 2\lambda^2 + 90 =$$
$$= -2\lambda^2 + 8\lambda + 68$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 7 & \lambda \end{vmatrix} = -2\lambda + 105 + 6 + 5 - 28 - 9\lambda = $$
$$= -11\lambda + 88 = -11(\lambda - 8)$$

Διακρίναμε τις περιπτώσεις:

• Αν $D \neq 0 \Rightarrow \lambda \neq 4$, τότε: $x = \frac{D_x}{D}$, $y = \frac{D_y}{D}$, $z = \frac{D_z}{D}$ = μοναδική λύση.

• Αν $D = 0 \Rightarrow \lambda = 4$, τότε: $D_z = 44 \neq 0 \Rightarrow$ το σύστημα είναι αδύνατο

Μέθοδος απαλοιφής Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & -1 & \lambda & 2 \\ 1 & 7 & -6 & \lambda \end{array}\right] \xrightarrow{\Gamma_3 \leftrightarrow \Gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & -6 & \lambda \\ 3 & -1 & \lambda & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \end{array}\right] \underset{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 2\Gamma_1}{\xrightarrow{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 3\Gamma_1}}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & -6 & \lambda \\ 0 & -22 & \lambda+18 & 2-3\lambda \\ 0 & -11 & 11 & 5-2\lambda \end{array}\right] \xrightarrow{\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & -6 & \lambda \\ 0 & -11 & 11 & 5-2\lambda \\ 0 & -22 & \lambda+18 & 2-3\lambda \end{array}\right] \xrightarrow{\Gamma_2 \to -\frac{1}{11}\Gamma_2}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & -6 & \lambda \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2\lambda-5}{11} \\ 0 & -22 & \lambda+18 & 2-3\lambda \end{array}\right] \xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 + 22\Gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & -6 & \lambda \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2\lambda-5}{11} \\ 0 & 0 & \lambda-4 & \lambda-8 \end{array}\right]$$

• Για $\lambda \neq 4$: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & -6 & \lambda \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2\lambda-5}{11} \\ 0 & 0 & \lambda-4 & \lambda-8 \end{array}\right] \underset{\sim}{\xrightarrow{r_3 \to \frac{1}{\lambda-4} r_3}}$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & -6 & \lambda \\ 0 & 1 & -1 & (2\lambda-5)/11 \\ 0 & 0 & 1 & (\lambda-8)/(\lambda-4) \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+7y-6z=\lambda \\ y-z=\frac{2\lambda-5}{11} \\ z=\frac{\lambda-8}{\lambda-4} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} x+7y-6z=\lambda \\ y=\frac{2\lambda-5}{11}+\frac{\lambda-8}{\lambda-4} \\ z=\frac{\lambda-8}{\lambda-4} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=\lambda-\frac{7}{11}(2\lambda-5)-7\frac{\lambda-8}{\lambda-4}+6\cdot\frac{\lambda-8}{\lambda-4} \\ y=\frac{2\lambda-5}{11}+\frac{\lambda-8}{\lambda-4} \\ z=\frac{\lambda-8}{\lambda-4} \end{array}.$$

• Για $\lambda=4$: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3/11 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right] \Rightarrow \left\{\begin{array}{r} x+7y-6z=4 \\ y-z=3/11 \\ 0x+0y+0z=-4\neq 0 \end{array}\right.$

Αδύνατο.

Άσκηση 7

$\det(B) = \sigma\upsilon\nu^2\varphi + \eta\mu^2\varphi = 1 \neq 0 \Rightarrow \exists\, B^{-1}$.

$$\left.\begin{array}{lll} B_{11} = \sigma\upsilon\nu\varphi, & B_{12} = -\eta\mu\varphi, & B_{13} = 0, \\ B_{21} = \eta\mu\varphi, & B_{22} = \sigma\upsilon\nu\varphi, & B_{23} = 0, \\ B_{31} = 0, & B_{32} = 0, & B_{33} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|}\cdot \operatorname{adj} B \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu\varphi & \eta\mu\varphi & 0 \\ -\eta\mu\varphi & \sigma\upsilon\nu\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας B^{-1} είναι πίνακας περιστροφής κατά γωνία $-\varphi$, καθώς:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu(-\varphi) & -\eta\mu(-\varphi) & 0 \\ \eta\mu(-\varphi) & \sigma\upsilon\nu(-\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Υπενθύμιση:
$\eta\mu(-\varphi) = -\eta\mu\varphi$
$\sigma\upsilon\nu(-\varphi) = \sigma\upsilon\nu\varphi$