Σ.Ε.Μ.Φ.Ε. - ΕΡΓΑΣΙΑ 2 - ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

-2013-2014

Άσκηση 1

(α) Έστω ο $\mu \times \nu$ πίνακας A. Για να ορίζεται το γινόμενο $A \cdot B$, ο B θα είναι $\nu \times \kappa$ πίνακας.
Ορίζεται όμως και το γινόμενο $B \cdot A$ και επομένως θα πρέπει $\kappa = \mu$ και έτσι ο πίνακας B γίνεται $\nu \times \mu$ πίνακας.

Επομένως ο πίνακας AB είναι $\mu \times \mu$ τετραγωνικός πίνακας και ο BA $\nu \times \nu$.

Έστω τώρα $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\nu} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\mu 1} & \cdots & a_{\mu\nu} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1\mu} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{\nu 1} & \cdots & \beta_{\nu\mu} \end{bmatrix}$.

Τότε:

$$tr(A \cdot B) = (a_{11}\beta_{11} + a_{12}\beta_{21} + \dots + a_{1\nu}\beta_{\nu 1}) + \dots +$$
$$+ (a_{\mu 1}\beta_{1\mu} + a_{\mu 2}\beta_{2\mu} + \dots + a_{\mu\nu}\beta_{\nu\mu}) =$$
$$= (a_{11}\beta_{11} + a_{21}\beta_{12} + \dots + a_{\mu 1}\beta_{1\mu}) + \dots +$$
$$+ (a_{1\nu}\beta_{\nu 1} + a_{2\nu}\beta_{\nu 2} + \dots + a_{\mu\nu}\beta_{\nu\mu}) =$$
$$= tr(B \cdot A).$$

(β) Αφού $AB_{\mu\times\mu} = BA_{\nu\times\nu} \Longrightarrow \mu = \nu$ και άρα οι πίνακες AB και BA είναι τετραγωνικοί πίνακες $\nu \times \nu$.

Για ν.δ.ό. $(AB)^\kappa = A^\kappa \cdot B^\kappa = B^\kappa \cdot A^\kappa$, $\forall \kappa \in \mathbb{N}$ χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της ΕΠΑΓΩΓΗΣ.

• Για $k=1$ είναι : $(AB)^1 = AB = BA$, που ισχύει.

• Έστω ότι ισχύει για $k=n\in\mathbb{N}$ με $n>1$, δηλ. $(AB)^n = A^n B^n = B^n A^n$

• θα δ.ό. ισχύει για $k=n+1$, δηλ. $(AB)^{n+1} = A^{n+1} B^{n+1} = B^{n+1} \cdot A^{n+1}$.

Πράγματι : $(AB)^{n+1} = \underline{(AB)^n} \cdot (AB) = \underline{A^n \cdot B^n} \cdot A \cdot B =$

$$= B^n \cdot A^n \cdot A \cdot B = B^n \cdot \underline{A^{n+1} \cdot B} \overset{(\cdots)}{=}$$

$$= B^n \cdot B \cdot A^{n+1} = B^{n+1} \cdot A^{n+1} \underset{(\cdots)}{=} A^{n+1} \cdot B^{n+1}$$

(γ) Έστω ότι $\exists\ A_{\nu\times\nu}, B_{\nu\times\nu}$: $AB - BA = I_\nu$. Τότε :

$$tr(AB - BA) = tr(I_\nu) \xRightarrow[\gamma\rho.]{tr-} tr(AB) - tr(BA) = \nu \overset{(\alpha)}{\Longrightarrow}$$

$0 = \nu$, άτοπο. Άρα $\nexists\ A, B$: $AB - BA = I_\nu$.

Άσκηση 2

(α) Είναι: $(AA^T)^T = (A^T)^T \cdot A^T = A \cdot A^T$ και

$$(A^T A)^T = A^T \cdot (A^T)^T = A^T \cdot A.$$

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ:</u> $(AB)^T = B^T \cdot A^T$ και $(A^T)^T = A$.

(β) Όμοια με (α): $(AA^*)^* = (A^*)^* A^* = AA^*$ και

$$(A^* A)^* = A^* (A^*)^* = A^* A.$$

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ:</u> $(AB)^* = B^* \cdot A^*$ και $(A^*)^* = A$.

(γ) Αν ο τετραγωνικός ν×ν πίνακας γράφεται $A = B + \Gamma$, όπου B συμμετρικός και Γ αντισυμμετρικός, δηλ. $B^T = B$ και $\Gamma^T = -\Gamma$, τότε έχουμε:

$$A^T = (B+\Gamma)^T = B^T + \Gamma^T = B - \Gamma .$$

Έχουμε: $A = B + \Gamma$ (1) και $A^T = B - \Gamma$ (2). Τότε:

$$\left.\begin{array}{l}(1)+(2)\\(1)-(2)\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A + A^T = 2B \\ A - A^T = 2\Gamma \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} B = \frac{1}{2}(A + A^T) \\ \Gamma = \frac{1}{2}(A - A^T) \end{array} .$$

Έχουμε ακόμα: $B^T = \frac{1}{2}(A+A^T)^T = \frac{1}{2}(A^T + A) = B$ και

$$\Gamma^T = \frac{1}{2}(A - A^T)^T = \frac{1}{2}(A^T - A) = -\Gamma .$$

Ακόμα, $B + \Gamma = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T) = A .$

Άρα ο πίνακας A γράφεται ως άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού πίνακα. Η μοναδικότητα αποδεικνύεται με εις άτοπο απαγωγή.

(δ) Κάθε στοιχείο του Z, z_{ij} γράφεται στη μορφή:

$z_{ij} = a_{ij} + i \cdot \beta_{ij}$, με $a_{ij}, \beta_{ij} \in \mathbb{R}$ και $i^2 = -1$.

Επομένως: $Z = A + iB$, όπου $A = [a_{ij}]$ και $B = [\beta_{ij}]$.

Αφού Z ερμιτιανός, έχουμε ότι $Z^* = Z$ και αφού

$Z^* = (A + iB)^* = A^* + \bar{i} \cdot B^* = A^* - iB^*$, έπεται ότι:

$A^* - iB^* = A + iB \Longrightarrow A^* = A$ και $B^* = -B$.

Οι πίνακες όμως A και B έχουν στοιχεία πραγματικούς αριθμούς και επομένως :

$$A^* = (\bar{A})^T = A^T \text{ και } B^* = B^T.$$

Άρα: $A^T = A \Longrightarrow A$ συμμετρικός
$B^T = -B \Longrightarrow B$ αντισυμμετρικός.

(ε) Έστω A, B δύο συμμετρικοί πίνακες $\Longrightarrow A^T = A,\ B^T = B$.

($\Longrightarrow$) Έστω AB συμμετρικός πίνακας. Θα δ.δ. $AB = BA$.

AB συμμ/κός $\Longrightarrow (AB)^T = AB$. Όμως $(AB)^T = B^T A^T = B \cdot A$
Άρα: $AB = BA$.

($\Longleftarrow$) Έστω $AB = BA$. Θα δ.δ. AB συμμ/κός πίνακας.

$(AB)^T = B^T \cdot A^T = B \cdot A = AB \Longrightarrow (AB)^T = AB \Longrightarrow$
AB συμμ/κός πίνακας.

Αποδείχθηκε

Άσκηση 3

• Δείχνουμε αρχικά ότι $D^n = \begin{bmatrix} d_1^n & 0 & 0 \\ 0 & d_2^n & 0 \\ 0 & 0 & d_3^n \end{bmatrix}$ με επαγωγή...

• Για ... $n=1$ ισχύει.
• Έστω ότι ισχύει για $n=k>1$.
• Θα δ.ό. ισχύει για $n=k+1$.

Είναι: $D^{k+1} = D^k \cdot D \xlongequal[\text{βήμα}]{\text{επαγωγικό}} \begin{bmatrix} d_1^k & 0 & 0 \\ 0 & d_2^k & 0 \\ 0 & 0 & d_3^k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} d_1^{k+1} & 0 & 0 \\ 0 & d_2^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & d_3^{k+1} \end{bmatrix}$. Αποδείχθηκε!

Άρα: $f(D) = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0 I_3 =$

$= \begin{bmatrix} (a_n d_1^n + a_{n-1} d_1^{n-1} + \dots + a_1 d_1 + a_0) & 0 & 0 \\ 0 & (a_n d_2^n + \dots + a_1 d_2 + a_0) & 0 \\ 0 & 0 & (a_n d_3^n + \dots + a_1 d_3 + a_0) \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} f(d_1) & 0 & 0 \\ 0 & f(d_2) & 0 \\ 0 & 0 & f(d_3) \end{bmatrix}$.