ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΕΡΓΑΣΙΑ 4

Άσκηση 1: **(α)** Έστω αντιστρέψιμος πίνακας P. Ν.δ.ό. $adj(P^{-1}) = (adjP)^{-1}$.
(β) Έστω A, B δύο αντιστρέψιμοι $n \times n$ πίνακες. Ν.δ.ό. $adj(AB) = adj(B)\ adj(A)$.
(γ) Έστω ακόμα οι $n \times n$ πίνακες P, Q, A, B τ.ώ. $\det(P) = \det(Q) = 1$ και $adj(B) = A$. Να δείξετε ότι $adj(Q^{-1}BP^{-1}) = PAQ$.

Άσκηση 2: **(α)** Έστω P ένας $n \times n$ αντισυμμετρικός πίνακας με n περιττό. Ν.δ.ό. $\det(P) = 0$.
(β) Έστω P αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας τέτοιος ώστε $P^2 = P$. Ν.δ.ό. $\det(P) = 1$.
(γ) Δύο $n \times n$ πίνακες A, B καλούνται *όμοιοι* αν υπάρχει αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας P ώστε $B = P^{-1}AP$. Ν.δ.ό. όμοιοι πίνακες έχουν ίσες ορίζουσες και ίδιο βαθμό.
(Υπόδειξη: Για το τελευταίο θεωρήστε δεδομένο ότι για $n \times n$ πίνακες A, B με B αντιστρέψιμο ισχύει ότι: *rank(AB)=rank(A)*.)

Άσκηση 3: **(α)** Να δείξετε ότι αν μια γραμμή ενός $n \times n$ πίνακα P είναι γραμμικός συνδυασμός των άλλων γραμμών του πίνακα, τότε ο πίνακας P δεν αντιστρέφεται.
(β) Να δείξετε ότι οι γραμμές ενός $n \times n$ πίνακα P αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^n$ αν και μόνο αν ο πίνακας P είναι αντιστρέψιμος.

Άσκηση 4: Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

(α) Υπολογίστε τον $adj(A)$ και μέσω αυτού, τον A^{-1}.

(β) Θεωρούμε τον επαυξημένο πίνακα $(A \vdots I_3)$ και εφαρμόζοντας γραμμοπράξεις τον φέρνουμε στη μορφή $(I_3 \vdots B)$. Να εφαρμόσετε τη παραπάνω διαδικασία για τον πίνακα A και να δείξετε ότι $B = A^{-1}$. Δικαιολογήστε το αποτέλεσμα αυτό.

(γ) Δείξτε ότι ο πίνακας A ικανοποιεί την εξίσωση $A^3 - 7A^2 + 5A + 11\, I_3 = 0$ και μέσω αυτής να υπολογίσετε τον αντίστροφό του (αφού πρώτα δείξετε ότι αντιστρέφεται).

Άσκηση 5: Θεωρούμε το σύστημα $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 5x_1 + 10x_2 - 8x_3 + 11\,\lambda\, x_4 = 12 \end{cases}$ (Σ). Να βρεθεί το σύνολο Λ των λύσεων του (Σ) για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ και να γραφτεί με τη μορφή $\Lambda = \{x\} + \Lambda_0$, όπου $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ είναι μια λύση του (Σ) και Λ_0 η γενική λύση του αντίστοιχου ομογενούς.

Άσκηση 6: Να λυθεί με δύο τρόπους (μέθοδος Crammer και μέθοδος απαλοιφής Gauss) το παρακάτω σύστημα για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} 2x+3y-z=5 \\ 3x-y+\lambda z=2 \\ x+7y-6z=\lambda \end{cases} \quad (\Sigma).$$

Άσκηση 7: Θεωρούμε τον πίνακα περιστροφής κατά γωνία φ:

$B=\begin{pmatrix} \sigma\upsilon\nu(\varphi) & -\eta\mu(\varphi) & 0 \\ \eta\mu(\varphi) & \sigma\upsilon\nu(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Να υπολογίσετε τον B^{-1} και να δώσετε τη φυσική του ερμηνεία.

Παράδοση: 05/03/2014 Σ. Λαμπροπούλου