ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΕΡΓΑΣΙΑ 2

Άσκηση 1: **(α)** Έστω οι πίνακες A και B. Αν ορίζονται τα γινόμενα AB και BA, να δείξετε ότι οι πίνακες AB και BA είναι τετραγωνικοί και ότι έχουν το ίδιο ίχνος.
(β) Αν επιπλέον $AB = BA$, να δείξετε ότι οι A και B είναι τετραγωνικοί $n\times n$ πίνακες και ότι $(AB)^k = A^k B^k = B^k A^k \quad \forall k \in \mathbb{N}$.
(γ) Να δείξετε ότι δεν υπάρχουν τετραγωνικοί $n\times n$ πίνακες A και B ώστε να ισχύει $AB - BA = I_n$. (Υπόδειξη: χρησιμοποιήστε το (α).)

Άσκηση 2: (α) Να δείξετε ότι για κάθε $m\times n$ πίνακα A, οι πίνακες AA^T και $A^T A$ είναι συμμετρικοί.
(β) Να δείξετε ότι για κάθε $m\times n$ πίνακα A με στοιχεία μιγαδικούς αριθμούς, οι πίνακες AA^* και A^*A είναι ερμιτιανοί.
(γ) Να δείξετε ότι κάθε τετραγωνικός πίνακας γράφεται με μοναδικό τρόπο ως άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού πίνακα.
(δ) Να δείξετε ότι κάθε ερμιτιανός $n\times n$ πίνακας Z γράφεται με τη μορφή $Z = A + iB$, όπου οι $n\times n$ πίνακες A, B έχουν στοιχεία από το $\mathbb{R}$, ο A είναι συμμετρικός, ο B αντισυμμετρικός και όπου i η φανταστική μονάδα.
(ε) Να δείξετε ότι το γινόμενο δύο συμμετρικών πινάκων είναι συμμετρικός πίνακας αν και μόνον αν οι πίνακες αντιμετατίθενται.

Άσκηση 3: Έστω διαγώνιος πίνακας $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$ και έστω το πολυώνυμο

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$. Ορίζουμε:

$f(D) = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0 I_3$. Να δειχθεί ότι:

$$f(D) = \begin{pmatrix} f(d_1) & 0 & 0 \\ 0 & f(d_2) & 0 \\ 0 & 0 & f(d_3) \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 4: **(α)** Έστω οι πίνακες $A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 3 & 6\end{pmatrix}$ και $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$ και έστω E_{ij} ο στοιχειώδης 3×3 πίνακας που προκύπτει από τον μοναδιαίο πίνακα I_3 με εναλλαγή της $i-$γραμμής με την $j-$γραμμή. Υπολογίστε τους πίνακες $E_{13}A$ και BE_{23}. Τι παρατηρείτε;

(β) Έστω E_i^c ο στοιχειώδης 3×3 πίνακας που προκύπτει από τον μοναδιαίο πίνακα I_3 με πολλαπλασιασμό της $i-$γραμμής με $c\neq 0$. Υπολογίστε τους πίνακες $E_2^c A$ και BE_1^c, όπου A, B οι πίνακες του υποερωτήματος (α). Τι παρατηρείτε;

(γ) Έστω $E_{\gamma_i,\gamma_i+c\gamma_j}$ ο στοιχειώδης 3×3 πίνακας που προκύπτει από τον μοναδιαίο πίνακα I_3 με αντικατάσταση της $i-$γραμμής με το άθροισμά της με την $j-$γραμμή πολλαπλασιασμένης επί $c\neq 0$. Υπολογίστε τους πίνακες $E_{\gamma_2,\gamma_2+3\gamma_1}A$ και $BE_{\gamma_3,\gamma_3-2\gamma_1}$, όπου A, B οι πίνακες του υποερωτήματος (α). Τι παρατηρείτε;

(δ) Διατυπώσατε γενικεύσεις των ερωτημάτων (α), (β), (γ) για πίνακες $\Gamma\in M_{m\times n}$, $\Delta\in M_{n\times k}$ και τους στοιχειώδεις $n\times n$ πίνακες E_{ij}, E_i^c και $E_{\gamma_i,\gamma_i+c\gamma_j}$.

Παράδοση: 20/01/2014 Σ. Λαμπροπούλου