ΦΥΛΛΑΔΙΟ 1
Γραμ. Άλγεβρα και Εφαρμογές
Σ.Ε.Μ.Φ.Ε 2010-11

1. Σε ένα Ευκλείδειο διανυσματικό χώρο V θεωρούμε τα γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα $\mathbf{u},\ \mathbf{v},\ \mathbf{w}$. Να δειχθεί ότι υπάρχουν αριθμοί $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε το διάνυσμα $\mathbf{u} + \kappa\mathbf{v} + \lambda\mathbf{w}$ να είναι ορθογώνιο προς τα $\mathbf{v},\ \mathbf{w}$.

2. Έστω V ένας πεπερασμένης διάστασης Ευκλείδειος διανυσματικός χώρος και $V_1,\ V_2$ δυο υπόχωροί του. Να αποδειχθούν οι σχέσεις:

$$\text{(i)}\quad (V_1 + V_2)^\perp = V_1^\perp \cap V_2^\perp \qquad\qquad \text{(ii)}\quad (V_1 \cap V_2)^\perp = V_1^\perp + V_2^\perp$$

3. Σε ένα Ευκλείδειο διανυσματικό χώρο V θεωρούμε τη βάση $\boldsymbol{\varepsilon} : \{\boldsymbol{\varepsilon_1} = (1,2,1),\ \boldsymbol{\varepsilon_2} = (1,1,2),\ \boldsymbol{\varepsilon_3} = (1,1,0)$, ως προς την οποία ένας γραμμικός μετασχηματισμός $T : V \to V$ έχει πίνακα τον $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & -3 \end{bmatrix}$. Αν οι συνιστώσες των στοιχείων της βάσης $\boldsymbol{\varepsilon}$ είναι ως προς μια ορθοκανονική βάση $\mathbf{u} = \{\mathbf{u_1},\ \mathbf{u_2},\ \mathbf{u_3}\}$ του V, να βρεθεί ο πίνακας του T^* ως προς τη βάση $\boldsymbol{\varepsilon}$.

4. Έστω V ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $T : V \to V$ ένας γραμμικός μετασχηματισμός.

(i) Αν M είναι ένας υπόχωρος του V τέτοιος ώστε $T(M) \subseteq M$ να δειχθεί ότι είναι και $T^*(M^\perp) \subseteq M^\perp$.

(ii) Αν $V = \mathbb{R}^3$ και ο γραμμικός μετασχηματισμός $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ έχει πίνακα ως προς μια ορθοκανονική βάση τον $A = \begin{bmatrix} 4 & -23 & 17 \\ 11 & -43 & 30 \\ 15 & -54 & 37 \end{bmatrix}$, να βρεθεί ένα επίπεδο (π) τέτοιο ώστε $T(\pi) \subseteq (\pi)$.

5. Έστω V ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $T, S : V \to V$ γραμμικοί μετασχηματισμοί. Αν συμβολίζουμε με $\mathcal{N}(T)$ τον πυρήνα του T και με $\mathcal{R}(T)$ το σύνολο τιμών του T, να δείξετε τις παρακάτω σχέσεις:

(i) $(T^*)^* = T$ **(ii)** $(TS)^* = S^*T^*$ **(iii)** $\mathcal{N}(T^*T) = \mathcal{N}(T)$

(iv) $\mathcal{R}(T^*)^\perp = \mathcal{N}(T)$ **(v)** $\mathcal{R}(T^*) = \mathcal{N}(T)^\perp$.

Παράδοση μέχρι 3–5–2011 Σ. Καρανάσιος