Διαμερίσεις Ακεραίων σε

Διεθνείς Μαθηματικές Ολυμπιάδες

Ε. Βλάμου, Π. Βλάμος, Α. Οικονόμου, Ε. Ράππος, Π. Ψαρράκος

Περίληψη

Στόχος της εργασίας είναι η πρωτότυπη και συνοπτική παρουσίαση τόσο της απαιτούμενης θεωρίας, όσο και νέων πρωτότυπων προβλημάτων που αφορούν στις διαμερίσεις ακεραίων, ένα θέμα συνδυασμού πολλών μαθηματικών ενοτήτων, με συχνή εμφάνιση στις Διεθνείς Μαθηματικές Ολυμπιάδες. Εκτός από τη μελέτη και ανάπτυξη της μαθηματικής δομής του συγκεκριμένου θέματος παρουσιάζεται μία νέα μέθοδος αντιμετώπισης μέσω της κατασκευής αντιπροσωπευτικών μοντέλων, ενώ η επίλυση αντίστοιχων προβλημάτων που έχουν προταθεί σε ΔΜΟ, οδηγεί σε μία κριτική της διαδικασίας ανάδειξης μαθηματικών ταλέντων σε συνάρτηση με την επιλογή των προβλημάτων.

Εισαγωγή

Τα προβλήματα διαμερίσεων ακεραίων αποτελούν συνήθη θέματα Διεθνών Μαθηματικών Ολυμπιάδων (ΔΜΟ) και θεωρούνται ως προβλήματα ελάχιστων απαιτούμενων θεωρητικά γνώσεων, που αντιμετωπίζονται με στοιχειώδεις γνώσεις και ως εκ τούτου αναδεικνύουν τα γνήσια μαθηματικά ταλέντα. Από την άλλη είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα η μαθηματική τους δομή και η σύνδεσή τους με πολλούς άλλους κλάδους των μαθηματικών. Ας δούμε για παράδειγμα το 6ο Πρόβλημα της ΔΜΟ του 1997 και την προτεινόμενη λύση του :

Πρόβλημα 6

Εστω n γνήσια θετικός ακέραιος. Συμβολίζουμε με $f(n)$ το πλήθος των τρόπων που μπορεί να παρασταθεί ο n ως άθροισμα δυνάμεων του 2 με ακέραιους εκθέτες οι οποίοι είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι του μηδενός.

Παραστάσεις που διαφέρουν μόνο ως προς την διάταξη των προσθετέων, θεωρούνται ως ταυτόσημες. Παραδείγματος χάριν ισχύει $f(4)=4$, διότι ο αριθμός 4 μπορεί να παρασταθεί με τους ακόλουθους τέσσερεις τρόπους :

4 ή $2+2$ ή $2+1+1$ ή $1+1+1+1$.

Να αποδείξετε, ότι για κάθε ακέραιο $n \geq 3$, ισχύει

$$2^{\frac{n^2}{4}} < f(2^n) < 2^{\frac{n^2}{2}} .$$

Απόδειξη

Αν $n=2k+1$ είναι ένας περιττός αριθμός μεγαλύτερος του 1 , τότε κάθε αναπαράσταση του n στη δοσμένη μορφή θα έχει προσθετέο το "1" . Σβήνοντας το "1" θα έχουμε μία αναπαράσταση του αριθμού 2k και αντιστρόφως. Εχουμε λοιπόν την ακόλουθη αναγωγική σχέση :

$$f(2k+1) = f(2k) \qquad (1)$$

Επιπλέον, αν $n=2k$ είναι ένας άρτιος ακέραιος, τότε κάθε αναπαράσταση του n στη δοσμένη μορφή θα έχει δύο τύπους : είτε θα περιέχει προσθετέους ίσους με 1 ή όχι. Στην πρώτη περίπτωση σβήνοντας ένα "1" έχουμε μία αναπαράσταση του $2k-1$ όπως προηγουμένως. Επομένως, έχουμε μία 1 - 1 σχέση των αναπαραστάσεων 1ου τύπου του 2k και όλων των αναπαραστάσεων του $2k-1$. Στην περίπτωση του 2ου τύπου αναπαραστάσεων (χωρίς προσθετέους ίσους με "1"), μπορούμε να διαιρέσουμε όλους τους προσθετέους με 2 και να επιτύχουμε μία αναπαράσταση του k, και η αντιστοίχιση αυτή είναι 1 - 1 . Εχουμε λοιπόν την ακόλουθη αναγωγική σχέση :

$$f(2k) = f(2k-1) + f(k) \qquad (2)$$

Οι σχέσεις (1) και (2) ισχύουν για κάθε ακέραιο $k \geq 1$. Προφανώς, $f(1)=1$.

Ας θέσουμε $f(0)=1$, ώστε η σχέση (1) να ισχύει και για $k=0$. Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι η συνάρτηση f είναι αύξουσα.

Αντικαθιστώντας στη (2) το $f(2k-1)$ με $f(2k-2)$ - λόγω της (1) - καταλήγουμε στην εξίσωση :

$$f(2k)-f(2k-2)=f(k) \quad , \text{ για } k=1,2,3,\ldots$$

Προσθέτοντας τις σχέσεις αυτές για $k=1, 2, \ldots, n$, έχουμε την ακόλουθη εξίσωση :

$$f(2n)=f(0)+f(1)+\ldots+f(n), \text{ για } n=1,2,3,\ldots \tag{3}$$

Θα υπολογίσουμε κατόπιν τα ζητούμενα φράγματα της ακολουθίας $f(2^n)$, για $n=1, 2, \ldots$

Ο υπολογισμός του πάνω φράγματος είναι εύκολος, καθώς οι προσθετέοι στη σχέση (3) είναι όλοι μικρότεροι από τον τελευταίο. Επιπλέον, αφού $2=f(2)\leq f(n)$, για $n \geq 2$, έχουμε ότι

$$f(2n)=2+\left(f(2)+\ldots+f(n)\right)\leq 2+(n-1)f(n)$$

$$\leq f(n)+(n-1)f(n)=nf(n) \quad , \text{ για } n=2,3,4,\ldots$$

Συνεπώς,

$$f(2^n)\leq 2^{n-1}\cdot f(2^{n-1})\leq 2^{n-1}\cdot 2^{n-2}\cdot f(2^{n-2})\leq 2^{n-1}\cdot 2^{n-2}\cdot 2^{n-3}\cdot f(2^{n-3})$$

$$\leq \ldots \leq 2^{(n-1)+(n-2)+\ldots+1}\cdot f(2)=2^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot 2.$$

Αφού $2^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot 2<2^{\frac{n^2}{2}}$, για $n\geq 3$, έχουμε αποδείξει το άνω φράγμα.

Για το κάτω φράγμα θα αποδείξουμε πρώτα ότι

$$f(b+1)-f(b)\geq f(\alpha+1)-f(\alpha) \tag{4}$$

όπου $b\geq \alpha>0$ ακέραιοι είτε και οι δύο άρτιοι, είτε και οι δύο περιττοί.

Πράγματι, αν οι α και b είναι και οι δύο άρτιοι, τότε λόγω της (1) θα έχουμε μηδενικά και από τα δύο μέλη της (4), ενώ αν είναι και οι δύο περιττοί, τότε λόγω της (2) θα έχουμε $f(b+1)-f(b)=f\left(\frac{b+1}{2}\right)$, $f(\alpha+1)-f(\alpha)=f\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)$ και η ανισότητα (4) ισχύει αφού η f είναι αύξουσα.

Ας θεωρήσουμε τους ακεραίους $r\geq k\geq 1$, όπου r άρτιος. Με διαδοχικές αντικαταστάσεις στην (4) των αριθμών $\alpha=r-j$, $b=r+j$ για $j=0, \ldots, k-1$ και προσθέτοντας τις ανισότητες που προκύπτουν, καταλήγουμε στην

$$f(r+k)-f(r)\geq f(r+1)-f(r-k+1) .$$

Αφού ο r είναι άρτιος, θα έχουμε ότι $f(r+1)=f(r)$, επομένως

$$f(r+k)+f(r-k+1)\geq 2f(r) \quad , \text{ για } k=1,\ldots,r$$

Προσθέτοντας τις ανισότητες για $k=1, \ldots, r$ έχουμε ότι

$$f(1)+f(2)+\ldots+f(2r)\geq 2r\,f(r) .$$

Λόγω της (3) το άθροισμα του δεξιού μέλους της ανισότητας ισούται με $f(4r)-1$, οπότε

$$f(4r)\geq 2r\,f(r)+1>2r\,f(r) \quad , \text{ για κάθε ακέραιο } r\geq 2.$$

Θέτοντας $r=2^{m-2}$ έχουμε ότι

$$f(2^m)>2^{m-1}\cdot f(2^{m-2}) \tag{5}$$

Για να εξασφαλίσουμε ότι ο $r=2^{m-2}$ είναι άρτιος θα πρέπει $m>2$, ωστόσο η (5) ισχύει και για $m=2$.

Ας θεωρήσουμε κατόπιν έναν ακέραιο n μεγαλύτερο του 1. Εστω s θετικός ακέραιος τέτοιος ώστε $2s \le n$ και ας εφαρμόσουμε την ανισότητα (5) για $m=n$, $n-1, \ldots, n-2s+2$, οπότε παίρνουμε

$$f(2^n) > 2^{n-1} \cdot f(2^{n-2}) > 2^{n-1} \cdot 2^{n-3} \cdot f(2^{n-4}) > 2^{n-1} \cdot 2^{n-3} \cdot 2^{n-5} \cdot f(2^{n-6})$$
$$> \ldots > 2^{(n-1)+(n-3)+\ldots+(n-2s+1)} \cdot f(2^{n-2s}) = 2^{s(n-s)} \cdot f(2^{n-2s}).$$

Αν τώρα ο n είναι άρτιος, θέτουμε $s=\frac{n}{2}$, ενώ αν είναι περιττός $s=\frac{n-1}{2}$.

Προκύπτουν τότε οι ανισότητες :

$$f(2^n) > 2^{\frac{n^2}{4}} \cdot f(2^0) = 2^{\frac{n^2}{4}} \text{ , αν ο } n \text{ είναι άρτιος}$$

$$f(2^n) > 2^{\frac{(n^2-1)}{4}} \cdot f(2^1) = 2^{\frac{(n^2-1)}{4}} \cdot 2 > 2^{\frac{n^2}{4}} \text{ , αν ο } n \text{ είναι περιττός.}$$

Εχουμε λοιπόν υπολογίσει το ζητούμενο κάτω φράγμα για κάθε ακέραιο $n \ge 2$ (το οποίο επίσης ισχύει και για $n=1$). •

Το πρόβλημα είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρον και δύσκολο για μαθητές οι οποίοι θα το αντιμετωπίσουν με τις στοιχειώδεις γνώσεις Διαμερίσεων που απαιτούνται σύμφωνα με τις προδιαγραφές των Μαθηματικών Ολυμπιάδων. Ωστόσο είναι ενδιαφέρον να αναλύσουμε την ευκολία του συγκεκριμένου προβλήματος μέσα από την κατάλληλη προετοιμασία την οποία ακολουθούν οι κορυφαίες ολυμπιακές ομάδες και συνεπώς στη λογική πρότασης "γνωστών - άγνωστων" θεμάτων με "στοιχειώδεις" λύσεις. Οπως θα γίνει φανερό, το πρόβλημα είναι άμεση εφαρμογή των μοντέλων που ακολουθούν.

1. Το πρόβλημα των γραμματοσήμων

Ας θεωρήσουμε το ακόλουθο πρόβλημα :

" Θέλουμε να στείλουμε ταχυδρομικώς ένα πακέτο, με κόστος αποστολής 1800 δραχμές. Εχουμε στη διάθεσή μας γραμματόσημα των 400, 600 και 1000 δραχμών. Κατά πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε γραμματόσημα για το πακέτο, αν θεωρούμε διακεκριμένες δύο επιλογές που διαφέρουν ως προς τη σειρά επιλογής των γραμματοσήμων ;"

Λύση

Ας συμβολίσουμε με $f(N)$ το πλήθος των τρόπων που μπορούμε να επιλέξουμε τα γραμματόσημα των 400, 600 και 1000 δραχμών, ώστε η συνολική αξία τους να είναι N εκατοντάδες δραχμές. Τότε ισχύει η ακόλουθη συναρτησιακή σχέση :

$$f(N) = f(N-4) + f(N-6) + f(N-10) \qquad (1)$$

Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι έχουμε μία μέθοδο επιλογής γραμματοσήμων αξίας N και ότι το τελευταίο γραμματόσημο κοστίζει 400 δρχ. Τότε τα υπόλοιπα γραμματόσημα θα κοστίζουν $(N-4)$ εκ. δρχ. Αντιστρόφως, αν ένα γραμματόσημο 400 δρχ. προστεθεί σε οποιονδήποτε συνδυασμό γραμματοσήμων αξίας $(N-4)$ εκ. δρχ. , τότε έχουμε γραμματόσημα αξίας N εκ. δρχ. Επομένως, το πλήθος των επιλογών όπου το τελευταίο γραμματόσημο είναι 400 δρχ. είναι $f(N-4)$ και ανάλογα αν το τελευταίο γραμματόσημο είναι 600 ή 1000 δρχ. έχουμε πλήθος επιλογών $f(N-6)$ ή $f(N-10)$ αντίστοιχα. Από την προσθετική αρχή καταλήγουμε στη σχέση (1), η οποία ανάγει το πρόβλημα της επιλογής γραμματοσήμων αξίας N εκ. δρχ. σε επιλογή γραμματοσήμων μικρότερης αξίας. Για μικρές τιμές του N το πρόβλημα λύνεται άμεσα :

$f(0)=1$, $f(1)=f(2)=f(3)=0$, $f(4)=1$, $f(5)=0$, $f(6)=1$, $f(7)=0$, $f(8)=1$, $f(9)=0$.

Η ισότητα $f(0)=1$ εκφράζει ότι 0 εκ. δρχ. πληρώνονται μόνο με έναν τρόπο : να μη βάλουμε καθόλου γραμματόσημα. Αθροίσματα αξίας 100, 200, 300, 500, 700 και 900 δρχ. δεν γίνονται από τα δοσμένης αξίας γραμματόσημα. Από τις προηγούμενες τιμές της $f(N)$ εύκολα βρίσκουμε ότι :

$$f(10)=f(6)+f(4)+f(0)=3,$$
$$f(11)=f(7)+f(5)+f(1)=0$$
$$f(12)=f(8)+f(6)+f(2)=2$$
$$\vdots$$
$$f(18)=8$$

Επομένως μπορούμε να επιλέξουμε γραμματόσημα αξίας 1800 δρχ κατά 8 τρόπους:

(1000,400,400), (400,1000,400), (400,400,1000), (600,400,400,400), (400,600,400,400), (400,400,600,400), (400,400,400,600), (600,600,600).

• Γενίκευση του προβλήματος

Το προηγούμενο πρόβλημα αποτελεί ειδική περίπτωση του ακόλουθου προβλήματος :

" Εχουμε γραμματόσημα αξίας n_1, n_2, . . . , n_k δρχ. αντίστοιχα, με $n_i \neq n_j$ για $i \neq j$ (το πλήθος των γραμματοσήμων θεωρείται απεριόριστο). Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε γραμματόσημα αξίας N δραχμών αν δύο επιλογές θεωρούνται διακεκριμένες όταν διαφέρουν ως προς τη σειρά επιλογής των γραμματοσήμων ;"

Λύση

Με βάση τα προηγούμενα ισχύει η ακόλουθη συναρτησιακή σχέση :

$$f(N)=f(N-n_1)+f(N-n_2)+\ldots+f(N-n_k) \qquad (2\alpha)$$
$$f(N)=0,\ \text{αν}\ N<0 \qquad (2\beta)$$
$$f(0)=1 \qquad (2\gamma)$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2α) μπορούμε να υπολογίσουμε το $f(N)$, υπολογίζοντας διαδοχικά τις τιμές $f(1), f(2),\ldots, f(N-1)$.

• **Ειδική Περίπτωση :** $n_i=i,\ i=1,2,\ldots,k$

Ας συμβολίσουμε με $\Phi(k,N)$ το πλήθος των δυνατών διαμερίσεων του N στους ακεραίους 1, 2, ... , k. Λόγω των σχέσεων (2) έχουμε ότι :

$$\Phi(k,N)=\Phi(k,N-1)+\Phi(k,N-2)+\ldots+\Phi(k,N-k), \qquad (3\alpha)$$
$$\Phi(k,N)=0,\ \text{αν}\ N<0 \qquad (3\beta)$$
$$\Phi(k,0)=1, \qquad (3\gamma)$$
$$\Phi(k,N)=\Phi(N,N),\ \text{αν}\ k>N \qquad (3\delta)$$

Ο υπολογισμός του $\Phi(k,N)$ απλοποιείται αν παρατηρήσουμε ότι :

$$\Phi(k,N-1)=\Phi(k,N-2)+\ldots+\Phi(k,N-k)+\Phi(k,N-k-1)$$

οπότε τελικά έχουμε ότι :

$$\Phi(k,N)=2\Phi(k,N-1)-\Phi(k,N-k-1), \qquad (4)$$

όπου σε όλες τις σχέσεις υποθέτουμε ότι $k\geq 1$.

Ο αριθμός $\Phi(N,N)$ συμβολίζει το πλήθος των διαμερίσεων του N σε θετικούς ακέραιους (συμπεριλαμβανομένης και της διαμέρισης $N = N$).

Από τη σχέση (4) προκύπτει :

$$\Phi(N,N) = 2\Phi(N,N-1) - \Phi(N,-1) \Leftrightarrow \Phi(N,N) = 2\Phi(N-1,N-1),$$

από όπου χρησιμοποιώντας ότι $\Phi(1,1) = 1$ προκύπτει ότι $\Phi(N,N) = 2^{N-1}$.

Αποδείξαμε λοιπόν χρησιμοποιώντας τη γενίκευση του προβλήματος των γραμματοσήμων ότι ένας φυσικός αριθμός N διαμερίζεται σε άλλους φυσικούς αριθμούς κατά 2^{N-1} τρόπους, όταν η διάταξη των όρων κάθε διαμέρισης λαμβάνεται υπόψη.

Παρατήρηση. Το παραπάνω μπορεί να αποδειχθεί με πολλούς τρόπους : π.χ. το πλήθος των διαμερίσεων του N σε ακριβώς S το πλήθος θετικούς ακέραιους είναι $\binom{N-1}{S-1}$, οπότε

$$\Phi(N,N) = \binom{N-1}{0} + \binom{N-1}{1} + \binom{N-2}{2} + \ldots + \binom{N-1}{N-1} = (1+1)^{N-1} = 2^{N-1},$$

από το διώνυμο του Newton.

Παράδειγμα. Το 4 διαμερίζεται κατά 8 τρόπους :

$4 = 4$	$4 = 2+1+1$
$4 = 3+1$	$4 = 1+2+1$
$4 = 1+3$	$4 = 1+1+2$
$4 = 2+2$	$4 = 1+1+1+1$

Εφαρμογή (Συνδυαστικά Προβλήματα της Θεωρίας Πληροφοριών)

Η θεωρία πληροφοριών ασχολείται με προβλήματα όμοια με αυτά που μόλις επιλύσαμε. Ας υποθέσουμε ότι ένα μήνυμα μεταδόθηκε με κάποιου είδους σήματα. Ο χρόνος μετάδοσης του πρώτου σήματος είναι t_1, του δεύτερου t_2, . . . , του k - οστού σήματος t_k. Πόσα διαφορετικά μηνύματα μπορούν να μεταδοθούν με τα σήματα αυτά σε χρόνο T ; Τα μηνύματα θεωρούνται μέγιστα με την έννοια ότι δε μπορεί να προστεθεί ούτε ένα επιπλέον μήνυμα στον επιτρεπτό χρόνο μετάδοσης.

Ας θεωρήσουμε το πλήθος των μηνυμάτων που μεταδίδονται σε χρόνο T με $f(T)$.

Οπως στο πρόβλημα με τα γραμματόσημα έχουμε ότι :

$$f(T) = f(T - t_1) + \ldots + f(T - t_k) \qquad (5\alpha)$$

$$f(T) = 0 \text{, αν } T<0 \qquad (5\beta)$$

$$f(0) = 1 \qquad (5\gamma)$$

2. Το πρόβλημα της Εισαγωγής στο Πανεπιστήμιο

Ας θεωρήσουμε το ακόλουθο πρόβλημα :

" Η εισαγωγή στο Πανεπιστήμιο προϋποθέτει την εξέταση σε 4 μαθήματα, με άριστα το 5 σε κάθε μάθημα. Για να περάσει ένα μάθημα ένας εξεταζόμενος πρέπει να πάρει το βαθμό 3. Κατά πόσους τρόπους μπορεί να περάσει τις εξετάσεις και να εισαχθεί στη Σχολή που θέλει αν ο βαθμός που απαιτείται είναι 17/20 ;"

Λύση

Το πρόβλημα αυτό είναι παρόμοιο με αυτό των γραμματοσήμων. Οι βαθμοί με τους οποίους περνάει κάποιος το μάθημα είναι 3, 4, 5 και πρέπει να τους χρησιμοποιήσουμε για να έχουμε άθροισμα 17. Ας θέσουμε $F(k,N)$ το πλήθος των τρόπων που μπορούμε να έχουμε συνολική βαθμολογία N σε k εξετάσεις. Τότε ισχύει η ακόλουθη σχέση :

$$F(k,N)=F(k-1,N-3)+F(k-1,N-4)+F(k-1,N-5) \qquad (6)$$

η οποία αποδεικνύεται παρόμοια με τη σχέση (1). Με βάση τη σχέση αυτή έχουμε ότι :

$$\begin{aligned} F(4,17) &= F(3,14)+F(3,13)+F(3,12) = \\ &= F(2,11)+2F(2,10)+3F(2,9)+2F(2,8)+F(2,7) = \\ &= 2+3F(2,9)+2F(2,8)+F(2,7), \end{aligned}$$

αφού δεν μπορούμε να μαζέψουμε 11 βαθμούς από 2 μαθήματα, ενώ ο μοναδικός τρόπος για να έχουμε 10 βαθμούς από δύο εξετάσεις είναι να πάρουμε Αριστα (5) και στις δύο. Συνεχίζοντας τους υπολογισμούς έχουμε :

$$F(4,17)=2+3F(1,6)+5F(1,5)+6F(1,4)+3F(1,3)+F(1,2).$$

Ομως $F(1,6)=F(1,2)=0$ (δεν υπάρχει βαθμός 6, ενώ με 2 δεν περνάμε το μάθημα) και $F(1,5)=F(1,4)=F(1,3)=1$. Τελικά έχουμε ότι $F(4,17)=16$.

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι $F(4,18)=10$, $F(4,19)=4$ και $F(4,20)=1$, οπότε έχουμε $16+10+4+1=31$ δυνατούς τρόπους για να περάσει ο εξεταζόμενος στη Σχολή της αρεσκείας του.

Υπάρχει και άλλος τρόπος για να πετύχουμε το ίδιο αποτέλεσμα. Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι 17 μονάδες μαζεύονται μόνο με δύο διαφορετικούς τρόπους :

(i) 2 πεντάρια, 1 τέσσερα και 1 τρία.

(ii) 1 πεντάρι και 3 τεσσάρια.

Οι μεταθέσεις των βαθμών αυτών στα τέσσερα διαφορετικά μαθήματα είναι :

$$P(2,1,1)+P(1,3)=\frac{4!}{2!\cdot 1!\cdot 1!}+\frac{4!}{3!\cdot 1!}=16$$

και όμοια βρίσκουμε τους αντίστοιχους τρόπους για 18, 19 και 20 μονάδες.

• Γενίκευση του προβλήματος

Γενικότερα, έστω $F(m,N)$ το πλήθος των διαμερίσεων του N σε m μέρη, καθένα από τα οποία ισούται με έναν από τους αριθμούς $n_1,n_2,\ldots,n_k$. Τότε για το $F(m,N)$ ισχύει η ακόλουθη συναρτησιακή σχέση :

$$F(m,N)=F(m-1,N-n_1)+\ldots+F(m-1,N-n_k). \qquad (7)$$

Ειδικότερα για $n_i=i$, $i=1,2,\ldots,k$ έχουμε διαμερίσεις του N σε m υποαθροίσματα, καθένα από τα οποία ισούται με έναν από τους αριθμούς 1, 2, . . . , k. Συμβολίζουμε με $F(m,N,k)$ τις διαμερίσεις αυτές.

Τότε ισχύουν οι ακόλουθες ισότητες :

$$F(m,N,k)=F(m-1,N-1,k)+F(m-1,N-2,k)+\ldots+F(m-1,N-k,k) \qquad (8)$$

$$F(m,N,k)=F(m,N-1,k)+F(m-1,N-1,k)+\ldots+F(m-1,N-k-1,k). \qquad (9)$$

3. Το πρόβλημα των κουπονιών

Ας θεωρήσουμε κατόπιν ένα διαφορετικό πρόβλημα :

"Μία εφημερίδα προσφέρει κουπόνια διαφορετικής αξίας : 1, 2, 3, 5, 10, 15, 20 και 50 μονάδων το καθένα. Αν έχουμε μόνο ένα κουπόνι κάθε είδους από τα παραπάνω, πώς μπορούμε να τα χρησιμοποιήσουμε για να τα ανταλλάξουμε με ένα δώρο αξίας 73 μονάδων ;

Λύση

Στο πρόβλημα αυτό η σειρά των κουπονιών δεν έχει σημασία, αυτό που είναι σημαντικό είναι η αξία τους. Ας συμβολίσουμε με $F(n_1,n_2,\ldots,n_m;N)$ το πλήθος των τρόπων που μπορούμε να συγκεντρώσουμε N μονάδες με κουπόνια αξίας $n_1,n_2,\ldots,n_m$ μονάδων το καθένα, χρησιμοποιώντας το πολύ ένα από αυτά.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις ανάλογα με το αν χρησιμοποιείται ένα κουπόνι αξίας n_m ή όχι. Αν ναι, τότε έχουμε να μαζέψουμε άλλες $N-n_m$ μονάδες, χρησιμοποιώντας κουπόνια αξίας $n_1,n_2,\ldots,n_{m-1}$ μονάδων. Αυτό γίνεται με $F(n_1,n_2,\ldots,n_{m-1};N-n_m)$ τρόπους.

Αν δεν χρησιμοποιήσουμε το κουπόνι των n_m μονάδων τότε οι N μονάδες πρέπει να συγκεντρωθούν από τα υπόλοιπα κουπόνια αξίας $n_1,n_2,\ldots,n_{m-1}$ μονάδων κατά $F(n_1,n_2,\ldots,n_{m-1};N)$ τρόπους. Εχουμε λοιπόν τη σχέση :

$$F(n_1,n_2,\ldots,n_m;N)=F(n_1,n_2,\ldots,n_{m-1};N-n_m)+F(n_1,n_2,\ldots,n_{m-1};N). \qquad (10)$$

Η σχέση αυτή ανάγει το πρόβλημα σε επιλογή ανάμεσα σε $(m-1)$ κουπόνια αντί για m. Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία αυτή καταλήγουμε στην επιλογή από ένα μόνο κουπόνι.

Τα προβλήματα αυτά έχουν μοναδική λύση.

Στη διαδικασία των υπολογισμών, πολλοί όροι μηδενίζονται.

Αν π.χ. $n_1+n_2+\ldots+n_m<N$ τότε $F(n_1,n_2,\ldots,n_m;N)=0$, ενώ αν $n_m>N$, τότε η σχέση (10) αντικαθίσταται από την :

$$F(n_1,n_2,\ldots,n_m;N)=F(n_1,n_2,\ldots,n_{m-1};N).$$

Ας εφαρμόσουμε την προηγούμενη μέθοδο για να λύσουμε το συγκεκριμένο πρόβλημα :

$$F(1,2,3,5,10,15,20,50;73)=F(1,2,3,5,10,15,20;23)+F(1,2,3,5,10,15,20;73)=$$

$$=F(1,2,3,5,10,15,20;23) \quad (\text{αφού } 1+2+3+5+10+15+20<73)$$

$$=F(1,2,3,5,10,15;3)+F(1,2,3,5,10,15;23)$$

Ομως έχουμε ότι :

$$F(1,2,3,5,10,15;3)=F(1,2,3;3)=F(1,2;0)+F(1,2;3)=1+F(1;3)+F(1;1)=2.$$

Ο δεύτερος προσθετέος υπολογίζεται ως εξής :

$$F(1,2,3,5,10,15;23)=F(1,2,3,5,10;8)+F(1,2,3,5,10;23)=F(1,2,3,5,10;8),$$

αφού $1+2+3+5+10<23$.

Ομως : $F(1,2,3,5;8)=F(1,2,3;3)=2$.

Τελικά η αναταλλαγή γίνεται κατά 4 τρόπους :

$$(50,20,3),\ (50,20,2,1),\ (50,15,5,3)\ \&\ (50,15,5,2,1).$$

Αν αντί για τα συγκεκριμένα κουπόνια χρησιμοποιήσουμε κουπόνια αξίας π.χ. 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100 μονάδων, τότε επειδή :

$1+2<5$, $1+2+5<10$, $1+2+5+10<20$, $1+2+5+10+20<50$, $1+2+5+10+20+50<100$

έχουμε ότι η συγκέντρωση οποιουδήποτε συνόλου μονάδων (εφόσον είναι δυνατή) χρησιμοποιώντας κάθε ένα από τα κουπόνια μία φορά, γίνεται με μοναδικό τρόπο.

Εφαρμογή

Ας θεωρήσουμε το ακόλουθο πρόβλημα :

" Ενα μαγαζί πουλάει διαφορετικών ειδών τσιχλόφουσκες : 3 είδη με 2 δρχ. τη μία και 2 είδη με 3 δρχ. τη μία. Με πόσους τρόπους μπορεί να αγοράσει κάποιος τσιχλόφουσκες αξίας 8 δρχ. , όταν παίρνει το πολύ μία από κάθε είδος ;"

Λύση

$$F(2,2,2,3,3;8)=F(2,2,2,3;5)+F(2,2,2,3;8)=F(2,2,2;2)+2F(2,2,2;5)+F(2,2,2;8)=$$
$$=F(2,2,2;2)=F(2,2;0)+F(2,2;2)=1+F(2;0)+F(2;2)=3.$$

- Ας δούμε όμως τι γίνεται όταν τα κουπόνια της ίδιας αξίας δεν θεωρούνται διακεκριμένα :

"Έχουμε δέκα κουπόνια των 2 μονάδων και πέντε κουπόνια 3 μονάδων. Με πόσους τρόπους μπορούμε να συγκεντρώσουμε 22 μονάδες, αν δεν θεωρούμε διακεκριμένα κουπόνια της ίδιας αξίας ;"

Λύση

Συμβολίζουμε το πλήθος των λύσεων του προβλήματος με $\Phi(10-2,5-3;22)$.

Διαμερίζουμε σε κλάσεις τις διάφορες περιπτώσεις λύσεων ανάλογα με το πόσα κουπόνια αξίας 3 μονάδων χρησιμοποιούνται. Εχουμε λοιπόν ότι :

$$\Phi(10-2,5-3;22)=\Phi(10-2;22)+\Phi(10-2;19)+\Phi(10-2;16)+$$
$$+\Phi(10-2;13)+\Phi(10-2;10)+\Phi(10-2;7).$$

Προφανώς $\Phi(10-2;22)=0$, όπως και $\Phi(10-2;19)=\Phi(10-2;13)=\Phi(10-2;7)=0$.

Επομένως :

$$\Phi(10-2,5-3;22)=\Phi(10-2;16)+\Phi(10-2;10)=2$$

δηλαδή έχουμε δύο τρόπους πληρωμής : $22=8\cdot2+2\cdot3=5\cdot2+4\cdot3$

- **Γενίκευση του προβλήματος - Το πρόβλημα των πληρωμών**

Εχουμε να κάνουμε μία πληρωμή N δρχ. χρησιμοποιώντας νομίσματα αξίας $n_1,n_2,\ldots,n_k$ δρχ.

(i) Αν επιτρέπεται να έχουμε απεριόριστο αριθμό νομισμάτων της ίδιας αξίας, έχουμε ότι :

$$\Phi(n_1,n_2,\ldots,n_{k-1},n_k;N)=\Phi(n_1,n_2,\ldots,n_{k-1};N)+\ldots+\Phi(n_1,n_2,\ldots,n_{k-1},n_k;N-n_k).$$

(ii) Αν δεν επιτρέπεται να έχουμε περισσότερα από ένα νομίσματα διαφορετικής αξίας, τότε :

$$F(n_1,n_2,\ldots,n_{k-1},n_k;N)=F(n_1,n_2,\ldots,n_{k-1};N)+F(n_1,n_2,\ldots,n_{k-1};N-n_k).$$

4. Διαμερίσεις ακεραίων

Ας θεωρήσουμε μία ειδική περίπτωση του προηγούμενου προβλήματος με τα ρέστα, στο οποίο επιτρέπεται να έχουμε νομίσματα αξίας 1 έως n δραχμών. Με άλλα λόγια, ας θεωρήσουμε το πρόβλημα :

" Με πόσους τρόπους είναι δυνατόν να διαμερίσουμε έναν αριθμό N σε προσθετέους, εκ των οποίων ο καθένας να ισούται με 1, 2, . . . , n (δε λαμβάνεται υπόψη η διάταξη των προσθετέων) ;"

Λύση. Ας συμβολίσουμε με $\prod_n^N$ το πλήθος των διαμερίσεων και $\prod_n^0=1$. Τότε έχουμε τη σχέση :

$$\prod_n^N=\prod_{n-1}^N+\prod_n^{N-n} \tag{11}$$

η οποία προκύπτει εύκολα αν θεωρήσουμε το n να είναι ή όχι προσθετέος της διαμέρισης.

Αν θεωρήσουμε ότι όλοι οι προσθετέοι είναι διακεκριμένοι προκύπτει ότι :

$$\Phi_n^N = \Phi_{n-1}^N = \Phi_{n-1}^{N-n} \qquad (12)$$

όπου Φ_n^N συμβολίζει το πλήθος των διαμερίσεων και $\Phi_n^0 = 1$. Εύκολα προκύπτει ότι $\Phi_1^1 = 1$ και $\Phi_1^N = 0$, αν $N>1$ και χρησιμοποιώντας τη σχέση (12), υπολογίζουμε το Φ_n^N από τις προηγούμενες διαμερίσεις.

Για την περίπτωση του $\prod_n^N$ είναι καλύτερα αντί για τον τύπο (11) να χρησιμοποιούμε τη σχέση :

$$\prod\nolimits_n^N = \prod\nolimits_{n-1}^N + \prod\nolimits_{n-1}^{N-n} + \prod\nolimits_{n-1}^{N-2n} + \ldots \qquad (13)$$

που προκύπτει με διαδοχικές αντικαταστάσεις. Ισχύει ότι $\prod_1^N = 1$ (κάθε ακέραιος γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως άθροισμα μονάδων). Κατόπιν υπολογίζουμε τα $\prod_2^N$, $\prod_3^N$ κ.ο.κ. Παρατηρούμε ότι το πλήθος των δυνατών διαμερίσεων του N σε προσθετέους είναι $\prod_N^N$ ή $\Phi(N,N)$.

5. Η συνάρτηση διαμέρισης

Ορισμός 1

Η συνάρτηση διαμέρισης $p(n)$ ορίζεται ως το πλήθος των τρόπων με τους οποίους ένας θετικός ακέραιος n γράφεται ως άθροισμα θετικών ακεραίων. Δύο διαμερίσεις δεν θεωρούνται διαφορετικές αν διαφέρουν ως προς τη διάταξη των προσθετέων. Θέτουμε $p(0) = 1$.

π.χ. $p(5) = 7$, $p(1) = 1$, $p(2) = 2$, $p(3) = 3$, $p(4) = 5$.

Ορισμός 2

$p_m(n) =$ πλήθος διαμερίσεων του n σε προσθετέους $\leq m$,

$p^0(n) =$ πλήθος διαμερίσεων του n σε περιττούς προσθετέους,

$p^d(n) =$ πλήθος διαμερίσεων του n σε διακεκριμένους προσθετέους,

$q^e(n) =$ πλήθος διαμερίσεων του n σε άρτιο πλήθος διακεκριμένων προσθετέων

$q^0(0) =$ πλήθος διαμερίσεων του n σε περιττό πλήθος διακεκριμένων προσθετέων.

Θέτουμε $p_m(0) = p^0(0) = p^d(0) = q^e(0) = 1, q^0(0) = 0$.

Π.χ. έχουμε ότι : $p_2(5) = 5$, $p^0(5) = 3$, $p^d(5) = 3$, $q^e(5) = 2$, $q^0(5) = 1$.

Θεώρημα I

(α) $p_m(n) = p(n)$, αν $n \leq m$,

(β) $p_m(n) \leq p(n)$, για κάθε $n \geq 0$,

(γ) $p_m(n) = p_{m-1}(n) + p_m(n-m)$, αν $n \geq m > 1$,

(δ) $p^d(n) = q^e(n) + q^0(n)$,

(ε) $q^0(n) =$ πλήθος συμμετρικών διαμερίσεων (βλ. τέλος).

Θεώρημα II

Για $n \geq 1$ έχουμε $p^d(n) = p^0(n)$.

6. Γραφήματα του Young

Μία διαμέριση του n μπορεί να αναπαρασταθεί γεωμετρικά. Αν $n=\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_r$ είναι μία διαμέριση, μπορούμε να διατάξουμε τους προσθετέους α_i έτσι ώστε :

$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq ... \geq \alpha_r$.

Τότε το γράφημα της διαμέρισης αυτής είναι τη μορφής :

● ● ● ● ● α_1 τελείες
● ● ● ● α_2 τελείες
:
● ● ● α_r τελείες

π.χ.

● ● ● ● ● ●
● ● ● ● ●
● ● ● ● ●
● ●
●

$19=6+5+5+2+1$ (ή $6\cdot5^2\cdot2\cdot1$)

Διαβάζοντας το γράφημα κάθετα αντί για οριζόντια, έχουμε γενικά μία διαφορετική διαμέριση, π.χ. $19=5+4+3+3+3+1$ (ή $5\cdot4\cdot3^3\cdot1$).
Με αυτόν τον τρόπο από μία διαμέριση $n=\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_r$ που αποτελείται από r προσθετέους με μεγαλύτερο το α_1, προκύπτει μία διαμέριση του n σε α_1 προσθετέους με μεγαλύτερο προσθετέο το r. Αφού αυτή η αντιστοίχιση είναι αντιστρέψιμη έχουμε το ακόλουθο θεώρημα :

Θεώρημα Ι
Το πλήθος των διαμερίσεων του n σε m προσθετέους είναι ίσο με το πλήθος των διαμερίσεων του n με μεγαλύτερο προσθετέο το m. Το πλήθος των διαμερίσεων του n το πολύ σε m προσθετέους είναι $p_m(n)$.

Θεώρημα ΙΙ
Αν $n \geq 0$, τότε

$$q^e(n)-q^0(n)=\begin{cases}(-1)^j, \text{ αν } n=\dfrac{3j^2\pm j}{2}, \text{ για κάποιο } j=0,1,2,... \\ 0 \quad , \text{ διαφορετικά}\end{cases}$$

Ορισμός
Μία διαμέριση λέγεται **συμμετρική** αν το γράφημά της παριστάνει την ίδια διαμέριση αν διαβαστεί οριζόντια ή κάθετα.
Π.χ.

● ● ● ● ●
● ● ● ●
● ●
● ●
●

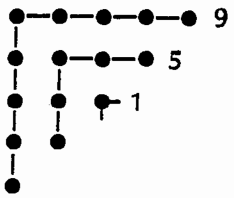
(Οι συμμετρικές διαμερίσεις είναι συμμετρικές ως προς τη διαγώνιο)

Θεώρημα III

Το πλήθος των συμμετρικών διαμερίσεων είναι ίσο με το πλήθος των διαμερίσεων σε άνισα περιττά μέρη.

Απόδειξη

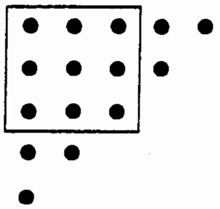
Υπάρχει μία 1–1 σχέση ανάμεσα στις συμμετρικές διαμερίσεις και στις διαμερίσεις σε άνισα περιττά μέρη όπως φαίνεται παρακάτω :



$$(5,4,3,2,1)\overset{(1-1)}{\Leftrightarrow}(9,5,1)$$

- **Γεννήτρια Συνάρτηση Συμμετρικών Διαμερίσεων**

Παρατηρούμε ότι κάθε συμμετρική διαμέριση αποτελείται από ένα μέγιστο $k \times k$ "τετράγωνο" και δύο φορές μία διαμέριση του $\frac{1}{2}(n-k^2)$ σε k το πολύ μέρη. Η $\frac{1}{(1-z^2)(1-z^4)\ldots(1-z^{2m})}$ είναι η γεννήτρια συνάρτηση των διαμερίσεων του n σε άρτια μέρη μεγέθους $\leq 2m$ (που είναι η ίδια με αυτή των διαμερίσεων του $\frac{1}{2}n$ σε μέρη μεγέθους $\leq m$).



Ετσι η $\frac{z^{m^2}}{(1-z^2)(1-z^4)\ldots(1-z^{2m})}$ είναι η γ.σ. των διαμερίσεων του $\frac{1}{2}(n-m^2)$ σε $\leq m$ μέρη. Αρα η γ.σ. των συμμετρικών διαμερίσεων είναι

$$1+\frac{z}{1-z^2}+\frac{z^4}{(1-z^2)(1-z^4)}+\ldots=1+\sum_{k\geq 1}\frac{z^{k^2}}{(1-z^2)(1-z^4)\ldots(1-z^{2k})}.$$

7. Δυναμοσειρές και η Ταυτότητα του Euler

Πολλά αποτελέσματα που αφορούν στη συνάρτηση διαμέρισης, σχετίζονται με αναλυτικές συναρτήσεις. Θα παρουσιάσουμε κατόπιν μερικά αποτελέσματα ανεξάρτητα από τη χρήση πολλής Ανάλυσης.

Οι δυναμοσειρές που θα χρησιμοποιήσουμε είναι της μορφής

$$\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\alpha_3 x^3+\ldots$$

όπου $\alpha_0=1$ τις περισσότερες φορές. Δύο δυναμοσειρές $\sum \alpha_j x^j$ και $\sum \beta_j x^j$ θα είναι ίσες αν $\alpha_j=\beta_j$, για κάθε δείκτη j.

Ως γινόμενο δύο δυναμοσειρών έχουμε το εξής :

$$\alpha_0\beta_0+(\alpha_0\beta_1+\alpha_1\beta_0)x+(\alpha_0\beta_2+\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_0)x^2+\ldots+\left(\sum_{j=0}^{n}\alpha_j\beta_{n-j}\right)x^n+\ldots$$

Χρησιμοποιώντας τους δύο ανωτέρω ορισμούς για την ισότητα και το γινόμενο δύο δυναμοσειρών, προκύπτει ότι το σύνολο όλων των δυναμοσειρών σχηματίζει μία αβελιανή ομάδα με μονάδα το $1+0x+0x^2+\ldots$ και αντίστροφη μίας δυναμοσειράς $\sum\alpha_jx^j$ τη δυναμοσειρά $\sum\beta_jx^j$ (αν υπάρχει) τέτοια ώστε να ισχύει ότι :

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_jx^j\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}\beta_jx^j\right)=1.$$

Οι συντελεστές $\beta_0,\beta_1,\ldots$ προσδιορίζονται από τις σχέσεις :

$$\alpha_0\beta_0=1,\ \alpha_0\beta_1-\alpha_1\beta_0=0,\ \alpha_0\beta_2+\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_0=0,\ldots,\sum_{i=0}^{n}\alpha_j\beta_{n-j}=0.$$

Αφού $\alpha_0\neq 0$, η αντίστροφη δυναμοσειράς υπάρχει.

Π.χ. η αντίστροφη της $1-x$ είναι η $1+x+x^2+x^3+\ldots$.

Κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις μπορούμε να πολ/σουμε ένα άπειρο πλήθος δυναμοσειρών.

Π.χ. ισχύει ότι :

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\ldots=\prod_{n=1}^{\infty}(1+x^n)$$

και ο λόγος που το γινόμενο αυτό είναι καλά ορισμένο είναι ότι οι συντελεστές του x^m για κάθε θετικό ακέραιο m εξαρτώνται από πεπερασμένο πλήθος παραγόντων, δηλαδή

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^m)=\prod_{n=1}^{m}(1+x^n).$$

Γενικότερα, έστω $P_1,P_2,P_3,\ldots$ μία άπειρη ακολουθία δυναμοσειρών με σταθερό όρο 1. Τότε το άπειρο γινόμενο $P_1\cdot P_2\cdot P_3\cdot\ldots$ είναι καλά ορισμένο αν για κάθε θετικό ακέραιο k η δύναμη x^k εμφανίζεται σε πεπερασμένο πλήθος από δυναμοσειρές. Αν η συνθήκη αυτή ισχύει είναι προφανές ότι ο όρος x^m στο γινόμενο προσδιορίζεται από ένα πεπερασμένο γινόμενο $P_1\cdot P_2\cdot P_3\cdot\ldots\cdot P_r$, όπου το r επιλέγεται έτσι ώστε καμμία από τις δυναμοσειρές $P_{r+1},P_{+r2},P_{r+3},\ldots$ δεν περιέχει όρο τάξης m ή μικρότερης, εκτός από το σταθερό όρο 1.

Η συνάρτηση $(1-x^n)^{-1}$ έχει επέκταση $\sum_{j=0}^{\infty}x^{jn}$. Για $n=1,2,\ldots,m$, πολλαπλασιάζοντας προκύπτει ότι :

$$\prod_{n=1}^{m}(1-x^n)^{-1}=(1+x^{1\cdot1}+x^{2\cdot1}+\ldots)(1+x^{1\cdot2}+x^{2\cdot2}+\ldots)(1+x^{1\cdot3}+x^{2\cdot3}+\ldots)\ldots(1+x^{1\cdot m}+x^{2\cdot m}+\ldots)=$$

$$=\sum_{j_1=0}^{\infty}\sum_{j_2=0}^{\infty}\ldots\sum_{j_m=0}^{\infty}x^{j_1\cdot1+j_2\cdot2+\ldots+j_m\cdot m}=\sum_{j=0}^{\infty}c_jx^j$$

όπου c_j είναι το πλήθος των λύσεων της $j_1\cdot1+j_2\cdot2+\ldots+j_m\cdot m=j$ για τους μη αρνητικούς ακέραιους $j_1,j_2,\ldots,j_m$. Επομένως ισχύει ότι $c_j=p_m(j)$ και έχουμε ότι :

$$\sum_{n=0}^{\infty}p_m(n)x^n=\prod_{n=1}^{m}(1-x^n)^{-1}.$$

Με όμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι :

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-x^n\right)^{-1}.$$

Η συνάρτηση $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-x^n\right)^{-1}$ καλείται γεννήτρια συνάρτηση της $p(n)$, ενώ η γεννήτρια συνάρτηση της $p_m(n)$ είναι η $\prod_{n=1}^{m}\left(1-x^n\right)^{-1}$. Ανάλογα βρίσκουμε τη γεννήτρια συνάρτηση της $p^0(n)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^0(n)x^n = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-x^{2n-1}\right)^{-1}$$

καθώς και της $p^d(n)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^d(n)x^n = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+x^n\right).$$

Το θεώρημα (6.I) είναι ισοδύναμο με το ότι :

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+x^n\right) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-x^{2n-1}\right)^{-1}.$$

Ο τύπος αυτός αποδεικνύεται και άμεσα κάνοντας πράξεις.

Το θεώρημα (6.II) είναι ισοδύναμο με :

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-x^n\right) = 1+\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\left(x^{\left(\frac{3j^2+j}{2}\right)}+x^{\left(\frac{3j^2-j}{2}\right)}\right)$$

το οποίο είναι γνωστό ως **Τύπος του Euler.**

Θεώρημα I. Ταυτότητα του Euler

Για κάθε θετικό ακέραιο n, ισχύει ότι :

$$p(n) = p(n-1)+p(n-2)-p(n-5)-p(n-7)+p(n-12)+p(n-15)-\ldots =$$

$$= \sum_j (-1)^{j+1} p\left(n-\frac{1}{2}(3j^2+j)\right)+\sum_j (-1)^{j+1} p\left(n-\frac{1}{2}(3j^2-j)\right)$$

Θεώρημα II

Εστω $0 \le x < 1$ και $\varphi_m(x) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-x^n\right)$. Τότε ισχύει ότι : $\sum_{n=0}^{\infty} p_m(n)x^n = \frac{1}{\varphi_m(x)}$.

Θεώρημα III

Εστω $0 \le x < 1$ και το όριο $\lim_{m\to\infty} \varphi_m(x)$ υπάρχει και είναι διάφορο του 0. Αν $\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi(x)$ τότε $\varphi(x) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-x^n\right)$.

Θεώρημα IV

Αν $0 \le x < 1$, τότε $\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \left(\varphi(x)\right)^{-1}$.

Θεώρημα V. Τύπος του Euler

Αν $0 \le x < 1$, τότε ισχύει ότι : $\varphi(x) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \left(x^{\left(\frac{3j^2+j}{2}\right)} + x^{\left(\frac{3j^2-j}{2}\right)} \right)$.

Το επόμενο θεώρημα μας δίνει για τη συνάρτηση $\sigma(n)$, που εκφράζει το άθροισμα των διαιρετών του n, μία ταυτότητα ανάλογη με αυτή που ισχύει για το p(n) στο θεώρημα (7.I).

Θεώρημα VI

Για $n \ge 1$ έχουμε ότι

$$\sigma(n) - \sigma(n-1) - \sigma(n-2) + \sigma(n-5) + \sigma(n-7) - \sigma(n-12) - \sigma(n-15) + \ldots =$$

$$= \begin{cases} (-1)^{j+1} n, \text{ αν } n = \dfrac{3j^2 \pm j}{2} \\ 0 \quad\quad , \text{ διαφορετικά} \end{cases}$$

Θεώρημα VII

Αν $0 \le x < 1$, τότε ισχύει ότι : $\varphi^3(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j (2j+1) x^{\frac{j^2+j}{2}}$.

Θεώρημα VIII

Αν p =πρώτος και $0 \le x < 1$ τότε : $\dfrac{\varphi(x^p)}{\varphi^p(x)} = 1 + p \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j x^j$, όπου $\alpha_j \in Z$.

Θεώρημα IX

Αν $0 \le x < 1$ τότε $x\varphi^4(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m x^m$, όπου $\beta_m \in Z$ με $\beta_m \equiv 0 \pmod{5}$ αν $m \equiv 0 \pmod{5}$.

Θεώρημα X

$$p(5m+4) \equiv 0(\bmod 5)$$

$$p(7n+5) \equiv 0(\bmod 7)$$

$$p(5^k n + r) \equiv 0(\bmod 5^k), \text{ αν } 24r \equiv 1(\bmod 5^k),\ k = 2,3,4,\ldots$$

$$p(7^k + r) \equiv 0(\bmod 7^k), \text{ αν } 24r \equiv 1(\bmod 7^k),\ k = 1,2\ \ [\text{όχι αν } k \ge 3]$$

8. Εφαρμογές σε Προβλήματα Ολυμπιάδων

Τα ακόλουθα προβλήματα αποτελούν μία συλλογή προετοιμασίας θεμάτων για ολυμπιακές ομάδες, τα οποία αποτελούνται από τρεις κατηγορίες :

α) Θέματα που έχουν ήδη επιλεχθεί σε Διεθνείς Μαθηματικούς Διαγωνισμούς

β) Θέματα που έχουν κατασκευασθεί τροποποιώντας γνωστά θέματα

γ) Θέματα πρωτότυπα επιπέδου ολυμπιάδων

και τα οποία έχουν συγκεκριμένη θεματική σειρά, καθώς και διαβάθμιση δυσκολίας.

Θέματα

(1) Ας θεωρήσουμε n φυσικούς $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$. *Εστω* β_k *το πλήθος των ακεραίων του συνόλου* $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu$, *που ικανοποιεί την ανισότητα* $\alpha_i \geq k$. *Να αποδείξετε ότι :* $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=\beta_1+\beta_2+\ldots+\ldots$

(2) Εστω A το σύνολο των φυσικών αριθμών που διαιρούνται από τους 1, 2, . . . , 9 και $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ *k φυσικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε :* $0 \leq \alpha_i < 10$ *(i=1, 2, . . . , 10) με την ακόλουθη ιδιότητα :* $2A=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k$.
Να αποδείξετε ότι υπάρχουν αριθμοί α_i *ανάμεσα στους* $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ *των οποίων το άθροισμα ισούται με A.*

(3) Ας θεωρήσουμε $mp+1$ $(m \geq 2)$ *βάρη, τέτοια ώστε καθένα ζυγίζει ένα ακέραιο βάρος γραμμαρίων. Γνωρίζουμε ότι καθένα από τα mp βάρη από τα δοσμένα χωρίζεται σε m ισοβαρή μέρη. Να αποδείξετε ότι όλα τα αρχικά βάρη ζυγίζουν το ίδιο.*

(4) Να αποδείξετε ότι το πλήθος των διαμερίσεων 2n μη διακεκριμένων αντικειμένων σε τρία μέρη, έτσι ώστε το άθροισμα των πληθαρίθμων οποιωνδήποτε δύο από αυτά να είναι μεγαλύτερα από το τρίτο, ισούται με το πλήθος των διαμερίσεων $2n-3$ *αντικειμένων κατά τον ίδιο τρόπο.*

(5) Να αποδείξετε ότι το πλήθος των διαμερίσεων ανάμεσα σε δύο άτομα 2n αντικειμένων (A) είδους, 2n αντικειμένων (B) είδους και 2n αντικειμένων (Γ) είδους, έτσι ώστε κάθε άτομο να λάβει τελικά 3n αντικείμενα ισούται με $3n^2+3n+1$.

(6) Να αποδείξετε ότι αν στην προηγούμενη άσκηση προσθέσουμε και 2n αντικείμενα (Δ) είδους τότε οι διαμερίσεις είναι το πλήθος : $\frac{1}{3}(2n+1)\left(8n^2+8n+3\right)$.

(7) Να αποδείξετε ότι αν έχουμε m είδη αντικειμένων και 2n αντικείμενα κάθε είδους, τότε το πλήθος των διαμερίσεών του σε δύο ίσα μέρη δίνεται από τον τύπο :

$$\binom{mn+m-1}{m-1}-\binom{m}{1}\binom{mn+m-2n-2}{m-1}+\binom{m}{2}\binom{mn+m-4n-3}{m-1}-\ldots\pm\binom{m}{x}\binom{mn+m-1-x(2n+1)}{m-1}$$

(8) (α) Να αποδείξετε ότι οι διαμερίσεις του αριθμού $M=12n+5$ *σε 4 μέρη, ώστε κάθε προσθετέος να είναι* $\leq 6n+2$, *είναι :* $\frac{1}{2}(n+1)\left(12n^2+9n+2\right)$.

(β) Αν εισάγουμε την προϋπόθεση κάθε προσθετέος να είναι διαφορετικός τότε το πλήθος των διαμερίσεων είναι : $\frac{n}{2}\left(12n^2+3n-1\right)$.

(9) Κατά πόσους τρόπους ένας φυσικός αριθμός n παριστάνεται ως άθροισμα τριών φυσικών; (η διάταξη των προσθετέων μας δίνει διαφορετική διαμέριση).

(10) Με πόσους τρόπους μπορούμε να ζυγίσουμε έναν άνθρωπο 78 κιλών χρησιμοποιώντας 8 ζύγια : 1, 1, 2, 5, 10, 10, 20 και 50 κιλών;
Η χρήση δύο διαφορετικών ζυγιών (ακόμα και αν είναι του ίδιου βάρους) σχηματίζει διαφορετικό ζύγισμα.

(11) Συμβολίζουμε με $p'(n)$ το πλήθος των διαμερίσεων $n = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_r$, σε r προσθετέους $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq .. \geq \alpha_r = 1$, ώστε δύο διαδοχικά α_i διαφέρουν το πολύ κατά 1. Διαβάστε κάθετα τα γραφήματα τέτοιων διαμερίσεων για να αποδείξετε ότι $p'(n) = p^d(n)$.

(12) Εστω n τελείες σε μία γραμμή που διαχωρίζονται από $j-1$ κάθετες γραμμές. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση : $x_1 + x_2 + ... + x_j = n$ έχει $\binom{n-1}{j-1}$ λύσεις στο $\mathbb{N}^*$, όπου δύο λύσεις θεωρούνται διαφορετικές αν $x_k \neq x_{k'}$ για τουλάχιστον δύο k, k'.

(13) Θεωρώντας $j = 1, 2, 3, ...$ στο προηγούμενο πρόβλημα, να αποδείξετε ότι το πλήθος των τρόπων που το n γράφεται ως άθροισμα διαφορετικών ακεραίων είναι 2^{n-1}, ενώ λαμβάνεται υπόψη η διάταξη των προσθετέων.

(14) Να υπολογίσετε τις τιμές του $p(n)$ και $\sigma(n)$ από $n = 1$ έως $n = 20$.

(15) Να αποδείξετε ότι : $(1 + x_1)(1 + x_1x_2)(1 + x_1x_2x_3)... = 1 + \sum x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_k^{\alpha_k}$, όπου

$\alpha_i - \alpha_{i+1} = 0$ ή 1 και $\alpha_k = 1$.

9. Συμπεράσματα

Η επιλογή θεμάτων με διαμερίσεις στις Διεθνείς Μαθηματικές Ολυμπιάδες αποτέλεσε και αποτελεί ένα από τα εγκυρότερα θέματα επιλογής και ανάδειξης των μαθηματικών ταλέντων, δίνοντας ιδιαίτερα ελκυστικά θέματα, καθώς και τη δυνατότητα συνδυασμού τους με ζητήματα διαφορετικής υφής, όπως η Θεωρία Αριθμών, η Γεωμετρία, η Θεωρία Γραφημάτων κ.α.

Ωστόσο, με αφορμή τα θέματα αυτά προκύπτει έντονα ο προβληματισμός της έννοιας των στοιχειωδών μαθηματικών που απαιτούνται για την αντιμετώπιση τους. Τα τελευταία χρόνια είναι έντονη η παρουσία μαθηματικών ολυμπιακών ομάδων άριστα καταρτισμένων σε θεωρία, με την οποία ουσιαστικά επιλύουν τα "δύσκολα" προβλήματα, στερώντας έτσι τη δυνατότητα ίσων ευκαιριών ανάδειξης γνήσιων μαθηματικών ταλέντων.

Υπολογίζεται ότι οι ισχυρές χώρες στη ΔΜΟ, έχουν καλύψει θεωρητικά στην προετοιμασία τους τουλάχιστον τα μισά από τα τελικά προτεινόμενα προβλήματα των διαγωνισμών, ενώ προτείνουν θέματα (ανάλογα του Πρβλ. 6) με στοιχειώδεις λύσεις τα οποία ταυτόχρονα επιλύονται με γνωστά μαθηματικά μοντέλα.

Είναι λοιπόν αναγκαίος ο διαχωρισμός των στόχων της προετοιμασίας κάθε ολυμπιακής ομάδας από τα προβλήματα που προτείνονται και επιλέγονται στις ΔΜΟ. Η πρωτοτυπία των προβλημάτων αυτών οφείλει να ξεπερνά κάθε γνωστό θεωρητικό υπόβαθρο, η πρόταση προβλημάτων από τους θεματοδότες πρέπει να γίνεται με βασική αρχή την ανάδειξη των γνήσιων μαθηματικών ταλέντων, ενώ η τελική επιλογή των θεμάτων πρέπει να ξεπερνά τα δεδομένα της προετοιμασίας της μαθηματικής ολυμπιακής ομάδας κάθε χώρας.

10. Βιβλιογραφία

[1]Βλάμος Π.Μ., Πρόταση Θεμάτων σε Διεθνείς Μαθηματικές Ολυμπιάδες, *Μαθηματική Επιθεώρηση, Τεύχος 49,*

[2]Dyson F.J., Some guesses in the theory of partitions, *Eureka 8, 10-15.*

[3]Erdos P. & Graham R.L., Old and New problems and Results in Combinatorial Number Theory, *Univ. de Geneves, 1980.*

[4]Euler L., De partitione numeromum, *Opera Omnia, vol.10.*

[5]Graham R.L., Covering the positive integers by disjoint sets, *Journal of Combinatorial Theory, A, 15 (1973), 354-358.*

[6]Niven I., Formal Power Series, *American Mathematical Monthly 76 (1969), 871-889.*

[7]Niven I. & Zuckerman H.S., An Introduction to the Theory of Numbers, *Wiley (1985).*

[8]Weisner L., Abstract Theory of inversion of finite series, *Transactions of the American Mathematical Society.*