Παραγοντοποίηση Πολυωνυμικών Πινάκων

Παναγιώτης Ι. Ψαρράκος

Περίληψη

Στην εργασία αυτή παρουσιάζονται αποτελέσματα πάνω στην ύπαρξη φασματικών ριζών και στην παραγοντοποίηση των πολυωνυμικών πινάκων. Αποδεικνύονται κριτήρια παραγοντοποίησης τα οποία βασίζονται στην αντιστρεψιμότητα πινάκων τύπου Vandermonde και μελετώνται αναλυτικά πολυώνυμικοί πίνακες με απλή Jordan κατασκευή.

0. Εισαγωγή

Θεωρούμε έναν πολυωνυμικό πίνακα της μορφής

$$P(\lambda) = I\lambda^m + A_{m-1}\lambda^{m-1} + \ldots + A_1\lambda + A_0, \tag{1}$$

όπου οι συντελεστές A_j $(j = 0,1,2,\ldots,m-1)$ είναι $n \times n$ μιγαδικοί πίνακες, λ είναι η μιγαδική μεταβλητή και με I συμβολίζουμε τον μοναδιαίο πίνακα τάξης n. Η φασματική ανάλυση του $P(\lambda)$ στην (1) συνδέεται άμεσα με την επίλυση της *ομογενούς* διαφορικής εξίσωσης

$$u^{(m)}(t) + A_{m-1}u^{(m-1)}(t) + \ldots + A_1u^{(1)}(t) + A_0u(t) = 0, \tag{2}$$

όπου η συνεχής διανυσματική συνάρτηση $u(t)$ λαμβάνει τιμές στον χώρο $\mathbf{C}^n$ και $u^{(j)}(t)$ $(j = 1,2,\ldots,m)$ είναι η j-τάξης συνήθης παράγωγος της $u(t)$. Αναζητώντας λύσεις της μορφής $u(t) = \varphi_0 e^{\lambda_0 t}$ $(\lambda_0 \in \mathbf{C},\ \varphi_0 \in \mathbf{C}^n)$, οδηγούμαστε αμέσως στο *ιδιοπρόβλημα* του $P(\lambda)$,

$$P(\lambda_0)\varphi_0 = \left(I\lambda_0{}^m + A_{m-1}\lambda_0{}^{m-1} + \ldots + A_1\lambda_0 + A_0\right)\varphi_0 = 0.$$

Αν το παραπάνω σύστημα έχει μια μη μηδενική λύση $\varphi_0 \in \mathbf{C}^n$, τότε το λ_0 ονομάζεται *ιδιοτιμή (eigenvalue)* του $P(\lambda)$ και το $\varphi_0 \neq 0$ είναι το αντίστοιχο *ιδιοδιάνυσμα (eigenvector)*. Το σύνολο όλων των ιδιοτιμών του $P(\lambda)$ ονομάζεται *φάσμα (spectrum)* του $P(\lambda)$ και συμβολίζεται

$$\sigma(P) = \{\lambda \in \mathbf{C} : \det P(\lambda) = 0\}.$$

Εφόσον η ορίζουσα $\det P(\lambda)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού nm, το φάσμα $\sigma(P)$ περιέχει nm το πολύ (πεπερασμένα) στοιχεία.

Η διανυσματική συνάρτηση

$$u(t) = \left(\frac{t^k}{k!}\varphi_k + \ldots + \frac{t}{1!}\varphi_1 + \varphi_0\right)e^{\lambda_0 t} \quad (\lambda_0 \in \mathbf{C},\ \varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_k \in \mathbf{C}^n),$$

είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης (2) αν και μόνο αν $\lambda_0 \in \sigma(P)$ και τα διανύσματα $\varphi_0 \neq 0, \varphi_1, \ldots, \varphi_k$ ικανοποιούν το σύστημα (βλέπε τις εργασίες [3] και [5])

$$P(\lambda_0)\varphi_0 = 0$$
$$P(\lambda_0)\varphi_1 + P^{(1)}(\lambda_0)\varphi_0 = 0$$
$$\vdots$$
$$P(\lambda_0)\varphi_k + \frac{1}{1!}P^{(1)}(\lambda_0)\varphi_{k-1} + \ldots + \frac{1}{(k-1)!}P^{(k-1)}(\lambda_0)\varphi_1 + \frac{1}{k!}P^{(k)}(\lambda_0)\varphi_0 = 0.$$

Τα $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k \in \mathbf{C}^n$ καλούνται *γενικευμένα ιδιοδιανύσματα (generalized eigenvectors, associated vectors)* που αντιστοιχούν στο *ιδιοζεύγος* λ_0, φ_0 και το σύστημα διανυσμάτων $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k\}$ ονομάζεται *αλυσίδα Jordan (Jordan chain) μήκους* $k+1$ του $P(\lambda)$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_0.

Το ιδιοπρόβλημα του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ στην (1) είναι ισοδύναμο με το ιδιοπρόβλημα του $nm \times nm$ πίνακα

$$L = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & I & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & I \\ -A_0 & -A_1 & -A_2 & \ldots & -A_{m-1} \end{bmatrix}, \qquad (3)$$

γνωστού και ως *μπλοκ-συνοδεύοντα πίνακα* του $P(\lambda)$ (βλέπε την εργασία [3]). Συγκεκριμένα, οι ιδιοτιμές του $P(\lambda)$ ταυτίζονται με τις ιδιοτιμές του L (καθώς και οι πολλαπλοτητές τους) και ένα $\varphi_0 \in \mathbf{C}^n$ είναι ιδιοδιάνυσμα του $P(\lambda)$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_0 \in \sigma(P)$ αν και μόνο αν το διάνυσμα

$$\begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \lambda_0\varphi_0 \\ \vdots \\ \lambda_0^{m-1}\varphi_0 \end{bmatrix} \in \mathbf{C}^{nm}$$

είναι ιδιοδιάνυσμα του πίνακα L που αντιστοιχεί στην ίδια ιδιοτιμή.

Ένα από τα σημαντικότερα προβλήματα στην θεωρία πολυωνυμικών πινάκων είναι η παραγοντοποίηση του $P(\lambda)$ στη μορφή

$$P(\lambda) = N(\lambda)M(\lambda), \qquad (4)$$

όπου οι $N(\lambda)$ και $M(\lambda)$ είναι $n \times n$ πολυωνυμικοί πίνακες με άθροισμα βαθμών ίσο με m. Η παραγοντοποίηση ενός πολυωνυμικού πίνακα μας διευκολίνει ιδιαίτερα στην προσπάθεια φασματικής του ανάλυσης. Ο $M(\lambda)$ ονομάζεται *(δεξιός) διαιρέτης (divisor)* του $P(\lambda)$ και εύκολα παρατηρεί κανείς ότι $\sigma(P) = \sigma(N) \cup \sigma(M)$. Επιπλέον, αν $\sigma(N) \cap \sigma(M) = \emptyset$, τότε ο $M(\lambda)$ καλείται *φασματικός διαιρέτης (spectral divisor)* του $P(\lambda)$ και οι αλυσίδες Jordan του $M(\lambda)$ ταυτίζονται με τις αλυσίδες Jordan του $P(\lambda)$ που αντιστοιχούν στις ίδιες ιδιοτιμές. Στην περίπτωση που ο $M(\lambda)$ στην (4) είναι ένας γραμμικός πολυωνυμικός πίνακας της μορφής $M(\lambda) = I\lambda - Z_0$, ο πίνακας Z_0 ικανοποιεί την ισότητα

$$P(Z_0) = Z_0^m + A_{m-1}Z_0^{m-1} + \ldots + A_1 Z_0 + A_0 = 0$$

και ονομάζεται *ρίζα (root)* της εξίσωσης $P(Z)=0$ (βλέπε τις εργασίες [3] και [5]). Ακόμη, αν ο $M(\lambda)=I\lambda-Z_0$ είναι φασματικός διαιρέτης του $P(\lambda)$, τότε ο Z_0 ονομάζεται *φασματική ρίζα (spectral root)* της εξίσωσης $P(Z)=0$. Ένα σύστημα m φασματικών ριζών $Z_1, Z_2, \ldots, Z_m$ της $P(Z)=0$ καλείται *πλήρες (complete)* αν ισχύουν οι σχέσεις

$$\sigma(P)=\bigcup_{k=1}^{m}\sigma(Z_k) \quad \text{και} \quad \sigma(Z_j)\cap\sigma(Z_k)=\emptyset \ \ (j\neq k).$$

Σε αντίθεση με τα βαθμωτά πολυώνυμα, ένας πολυωνυμικός πίνακας δεν γράφεται πάντα ως γινόμενο δύο πολυωνυμικών πινάκων μικροτέρου βαθμού. Για παράδειγμα, ο δευτεροβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας

$$P(\lambda)=I\lambda^2-B \doteq I\lambda^2-\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

δεν παραγοντοποιείται λόγω της μη ύπαρξης τετραγωνικής ρίζας του πίνακα B. Το πρόβλημα της παραγοντοποίησης πολυωνυμικών πινάκων είναι ιδιαίτερα δύσκολο και έχει προσελκύσει το ενδιαφέρον πλήθους ερευνητών (βλέπε τις εργασίες [3]-[8] και την βιβλιογραφία τους). Στόχος μας είναι η παρουσίαση, με συστηματικό και ξεκάθαρο τρόπο, μιας σειράς αποτελεσμάτων ύπαρξης πλήρους συστήματος φασματικών ριζών και παραγοντοποίησης σε m γραμμικούς παράγοντες πολυωνυμικών πινάκων της μορφής (1). Στο πρώτο κεφάλαιο διερευνούμε γενικούς πολυωνυμικούς πίνακες χρησιμοποιώντας πίνακες τύπου Vandermonde, ενώ στο δεύτερο κεφάλαιο το ενδιαφέρον μας επικεντρώνεται σε πολυωνυμικούς πίνακες που δεν έχουν γενικευμένα ιδιοδιανύσματα. Τέλος πρέπει να σημειωθεί ότι όλα τα αποτελέσματα της εργασίας ισχύουν αν ο συντελεστης I του λ^m, στην (1), αντικατασταθεί με έναν αντιστρέψιμο πίνακα A_m.

1. Παραγοντοποίηση και Πίνακες Vandermonde

Έστω ένας $n\times n$ πολυωνυμικός πίνακας

$$P(\lambda)=I\lambda^m+A_{m-1}\lambda^{m-1}+\ldots+A_1\lambda+A_0$$

και μια m-άδα πινάκων $Z_1, Z_2, \ldots, Z_m \in \mathbf{C}^{n\times n}$. Σε αυτή τη συλλογή πινάκων αντιστοιχούμε τον $nm\times nm$ *πίνακα Vandermonde*

$$W(Z_1,Z_2,\ldots,Z_m)=\begin{bmatrix} I & I & \ldots & I\\ Z_1 & Z_2 & \ldots & Z_m\\ Z_1^2 & Z_2^2 & \ldots & Z_m^2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ Z_1^{m-1} & Z_2^{m-1} & \ldots & Z_m^{m-1}\end{bmatrix}. \tag{5}$$

Στο κεφάλαιο αυτό μελετούμε προβλήματα πάνω στην φασματική ανάλυση και στην παραγοντοποίηση του $P(\lambda)$ με την βοήθεια του πίνακα $W(Z_1,Z_2,\ldots,Z_m)$ (βλέπε επίσης την εργασία [8]). Δύο αποτελέσματα της εργασίας [6] είναι απαραίτητα για την καλύτερη κατάνόηση του θέματος αλλά και για τις αποδείξεις που παρουσιάζονται στην συνέχεια.

Θεώρημα 1 [6, Θεώρημα 2.4]

Έστω ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)=I\lambda^m+A_{m-1}\lambda^{m-1}+\ldots+A_1\lambda+A_0$ και $Z_1,Z_2,\ldots,Z_m$ ρίζες της εξίσωσης $P(Z)=0$. Το σύστημα αυτών των ριζών είναι πλήρες (δηλαδή $\sigma(P)=\bigcup_{k=1}^{m}\sigma(Z_k)$ και $\sigma(Z_j)\cap\sigma(Z_k)=\emptyset$ για $j\neq k$) αν και μόνο αν ο πίνακας Vandermonde $W(Z_1,Z_2,\ldots,Z_m)$ στην (5) είναι αντιστρέψιμος.

Λήμμα 2 [6, Λήμμα 2.1]

Αν Z είναι μια ρίζα της εξίσωσης $P(Z)=0$ και Γ είναι μια κλειστή μετρήσιμη καμπύλη η οποία περικλείει στο εσωτερικό της το φάσμα $\sigma(Z)$ ενώ το $\sigma(P)\setminus\sigma(Z)$ βρίσκεται στο εξωτερικό της, τότε ο πίνακας Z είναι φασματική ρίζα της εξίσωσης $P(Z)=0$ αν και μόνο αν

$$\int_\Gamma \lambda^s P^{-1}(\lambda)d\lambda = Z^s\int_\Gamma P^{-1}(\lambda)d\lambda \quad (s=0,1,2,\ldots).$$

Αποδεικνύουμε αρχικά ένα γενικό αποτέλεσμα.

Θεώρημα 3

Έστω ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)=I\lambda^m+A_{m-1}\lambda^{m-1}+\ldots+A_1\lambda+A_0$ και $Z_1,Z_2,\ldots,Z_\rho$ $(2\leq\rho<m)$ φασματικές ρίζες της εξίσωσης $P(Z)=0$. Αν ο πίνακας $W(Z_1,Z_2,\ldots,Z_\rho)$ στην (7) είναι αντιστρέψιμος, τότε ο $P(\lambda)$ έχει φασματικό διαιρέτη $M(\lambda)$ με φάσμα $\sigma(M)=\bigcup_{j=1}^{\rho}\sigma(Z_j)$ και οι $Z_1,Z_2,\ldots,Z_\rho$ είναι φασματικές ρίζες της εξίσωσης $M(Z)=0$.

Απόδειξη

Θεωρούμε μια κλειστή μετρήσιμη καμπύλη Γ η οποία περικλείει στο εσωτερικό της το $\sigma(P)\setminus\bigcup_{j=1}^{\rho}\sigma(Z_j)$, ενώ οι υπόλοιπες ιδιοτιμές του $P(\lambda)$ βρίσκονται εκτός της Γ. (Τέτοια καμπύλη υπάρχει πάντα για φασματικές ρίζες.) Ορίζουμε τα σύνολα

$$\sigma_1=\sigma(Z_1) \quad \text{και} \quad \sigma_k=\sigma(Z_k)\setminus\bigcup_{j=1}^{k-1}\{\sigma(Z_k)\cap\sigma(Z_j)\} \ (k=2,3,\ldots,\rho),$$

τα οποία είναι κλειστά και ικανοποιούν την σχέση $\sigma_j\cap\sigma_k=\emptyset$ $(j\neq k)$, καθώς και την ένωση $\sigma=\bigcup_{k=1}^{\rho}\sigma_k$. Για κάθε $k=1,2,\ldots,\rho$, υπάρχει κλειστή μετρήσιμη καμπύλη Γ_k που περικλείει το σ_k στο εσωτερικό της, ενώ το $\sigma\setminus\sigma_k$ βρίσκεται στο εξωτερικό της. Είναι φανερό πως

$$\int_\Gamma \lambda^s P^{-1}(\lambda)d\lambda = \sum_{k=1}^{\rho}\int_{\Gamma_k}\lambda^s P^{-1}(\lambda)d\lambda \quad (s=0,1,2,\ldots) \tag{6}$$

κι επειδή κάθε πίνακας Z_k είναι φασματική ρίζα της $P(Z)=0$, έχουμε ότι

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_k}\lambda^s P^{-1}(\lambda)d\lambda = Z_k^s\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_k}P^{-1}(\lambda)d\lambda \quad (s=0,1,2,\ldots) \tag{7}$$

για κάθε $k=1,2,\ldots,\rho$ (βλέπε την Πρόταση 2.1 στην εργασία [6]). Από τις ισότητες (6) και (7) καταλήγουμε στο ότι

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\lambda^{s}P^{-1}(\lambda)d\lambda=\sum_{k=1}^{\rho}Z_k^sG_k \quad (k=1,2,\ldots,\rho) \tag{8}$$

όπου $G_k=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_k}P^{-1}(\lambda)d\lambda$. Λόγω της αντιστρεψιμότητας του πίνακα Vandermonde $W(Z_1,Z_2,\ldots,Z_\rho)$ (βλέπε τα Θεωρήματα 1.2 και 1.3 στην εργασία [6]), υπάρχει μοναδικός πολυωνυμικός πίνακας

$$M(\lambda)=I\lambda^{\rho}+B_{\rho-1}\lambda^{\rho-1}+\ldots+B_1\lambda+B_0$$

τέτοιος ώστε

$$M(Z_k)=Z_k^{\rho}+B_{\rho-1}Z_k^{\rho-1}+\ldots+B_1Z_k+B_0=0 \quad (k=1,2,\ldots,\rho). \tag{9}$$

Λαμβάνοντας υπόψη την εργασία [4], θεωρούμε τον $nm\times nm$ μπλοκ-πίνακα

$$R_\sigma=\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\lambda^{m-1+s-j}P^{-1}(\lambda)d\lambda\right]_{s,j=1}^{m}$$

και από την σχέση (8) έχουμε ότι

$$R_\sigma=\left[\sum_{k=1}^{\rho}Z_k^{m-1+s-j}G_k\right]_{s,j=1}^{m}.$$

Για ένα τυχαίο διάνυσμα $x=[x_j]_{j=1}^{m}\in\mathbf{C}^{nm}$ ($x_j\in\mathbf{C}^{n}$), ισχύει

$$R_\sigma x=\left[\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{\rho}Z_k^{m-1+s-j}G_kx_j\right]_{s=1}^{m},$$

ενώ από την (9) είναι φανερό ότι

$$Z_k^{\rho+r}=-B_{\rho-1}Z_k^{\rho-1+r}-\ldots-B_1Z_k^{1+r}-B_0Z_k^{r} \quad (r=0,1,2,\ldots)$$

για κάθε $k=1,2,\ldots,\rho$. Αν λοιπόν ορίσουμε τα διανύσματα $y_s=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{\rho}Z_k^{m-1+s-j}G_kx_j$ $(s=1,2,\ldots,\rho)$ και $y=[y_s]_{s=1}^{\rho}\in\mathbf{C}^{n\rho}$, τότε

$$R_\sigma x=\begin{bmatrix} y \\ Ky\end{bmatrix}, \tag{10}$$

όπου $K=[K_{i,j}]_{i=1,2,\ldots,m-\rho}^{j=1,2,\ldots,\rho}\in\mathbf{C}^{n(m-\rho)\times n\rho}$ με $K_{1,j}=-B_{j-1}$ $(j=1,2,\ldots,\rho)$. Θεωρούμε τώρα τον $nm\times n\rho$ πίνακα $R_\sigma(\rho)$ που σχηματίζεται από τις πρώτες $n\rho$ στήλες του R_σ,

$$R_\sigma(\rho)=\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\lambda^{m-1+s-j}P^{-1}(\lambda)d\lambda\right]_{j=1,2,\ldots,m}^{s=1,2,\ldots,\rho}$$

και θα αποδείξουμε ότι αντιστρέφεται από δεξιά. Εφόσον κάθε πίνακας Z_k είναι ρίζα της εξίσωσης $P(Z)=0$, ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ γράφεται στη μορφή

$$P(\lambda) = (I\lambda^{m-1} + D_{m-2}^{(k)}\lambda^{m-2} + \ldots + D_1^{(k)}\lambda + D_0^{(k)})(I\lambda - Z_k) \quad (k = 1,2,\ldots,\rho).$$

Επιπλέον, για κάθε $\lambda \notin \sigma(P)$,

$$(I\lambda - Z_k)^{-1} = P^{-1}(\lambda)(I\lambda^{m-1} + D_{m-2}^{(k)}\lambda^{m-2} + \ldots + D_1^{(k)}\lambda + D_0^{(k)}). \tag{11}$$

Η ένωση $\sigma = \bigcup_{k=1}^{\rho} \sigma_k$ βρίσκεται στο εσωτερικό της κλειστής μετρήσιμης καμπύλης Γ και από την ισότητα (11) προκύπτει ότι

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \lambda^l (I\lambda - Z_k)^{-1} d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \lambda^{l+m-1} P^{-1}(\lambda) d\lambda + \frac{1}{2\pi i}\sum_{r=1}^{m-1}\left(\int_\Gamma \lambda^{l+m-r-1} P^{-1}(\lambda) d\lambda\right) D_{m-r-1}^{(m)} \tag{12}$$

για κάθε $k = 1,2,\ldots,\rho$ και $l = 0,1,2,\ldots$ Ορίζουμε τώρα τον $m\rho \times nm$ πίνακα

$$\Delta = \begin{bmatrix} I & I & \ldots & I \\ D_{m-2}^{(1)} & D_{m-2}^{(2)} & \ldots & D_{m-2}^{(\rho)} \\ D_{m-3}^{(1)} & D_{m-3}^{(2)} & \ldots & D_{m-3}^{(\rho)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_0^{(1)} & D_0^{(2)} & \ldots & D_0^{(\rho)} \end{bmatrix}$$

και από την (12) παίρνουμε $R_\sigma(\rho)\cdot\Delta = W(Z_1, Z_2, \ldots, Z_\rho)$. Άρα ο πίνακας $R_\sigma(\rho)$ είναι από δεξιά αντιστρέψιμος διότι ο πίνακας Vandermonde $W(Z_1, Z_2, \ldots, Z_\rho)$ είναι αντιστρέψιμος από την υπόθεση μας. Επιπλέον, από την (10) έχουμε ότι $\operatorname{Ker} R_\sigma =$ $\operatorname{Ker} R_\sigma(\rho)$ και σύμφωνα με το Θεώρημα 1.3 της εργασίας [4], ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ έχει φασματικό διαιρέτη $T(\lambda)$ τέτοιον ώστε

$$T(\lambda) = I\lambda^\rho + B_{\rho-1}\lambda^{\rho-1} + \ldots + B_1\lambda + B_0$$

με $B_{j-1} = -K_{1,j}$ $(j = 1,2,\ldots,\rho)$ και $\sigma(T) = \sigma$. Δηλαδή, $T(\lambda) = M(\lambda)$, $\sigma(T) = \sigma(M)$ $= \bigcup_{k=1}^{\rho} \sigma(Z_k)$ και

$$P(\lambda) = N(\lambda)M(\lambda), \tag{13}$$

όπου

$$N(\lambda) = I\lambda^{m-\rho} + S_{m-\rho-1}\lambda^{m-\rho-1} + \ldots + S_1\lambda + S_0. \tag{14}$$

Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη του θεωρήματος αρκεί να δείξουμε ότι οι $Z_1, Z_2, \ldots, Z_\rho$ είναι φασματικές ρίζες της εξίσωσης $M(Z) = 0$. Από τις σχέσεις (13) και (14) έχουμε πως για κάθε $\lambda \notin \sigma(M)$,

$$\lambda^s M^{-1}(\lambda) = \sum_{\rho=0}^{\mu-\rho} \lambda^{\mu-\rho-r+s} P^{-1}(\lambda) S_{m-\rho-r} \quad (s = 0,1,2,\ldots) \tag{15}$$

Επειδή οι πίνακες $Z_1, Z_2, \ldots, Z_\rho$ είναι φασματικές ρίζες της εξίσωσης $M(Z) = 0$, υπάρχουν ρ κλειστές μετρήσιμες καμπύλες $\widetilde{\Gamma}_1, \widetilde{\Gamma}_2, \ldots, \widetilde{\Gamma}_\rho$ τέτοιες ώστε η καμπύλη $\widetilde{\Gamma}_j$ $(j = 1,2,\ldots,\rho)$

περικλείει στο εσωτερικό της το $\sigma(Z_j)$, ενώ το $\sigma(M)\setminus\sigma(Z_j)$ βρίσκεται εκτός της $\widetilde{\Gamma}_j$. Ολοκληρώνοντας την (15) επί της $\widetilde{\Gamma}_j$ και εφαρμόζοντας το Λήμμα 2, έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{\widetilde{\Gamma}_j} \lambda^s M^{-1}(\lambda)d\lambda &= \sum_{r=0}^{m-\rho} Z_j^{m-\rho-r+s}\left(\int_{\widetilde{\Gamma}_j} P^{-1}(\lambda)d\lambda\right)S_{m-\rho-r} \\
&= Z_j^s \sum_{r=0}^{m-\rho} Z_j^{m-\rho-r}\left(\int_{\widetilde{\Gamma}_j} P^{-1}(\lambda)d\lambda\right)S_{m-\rho-r} \\
&= Z_j^s \sum_{r=0}^{m-\rho}\left(\int_{\widetilde{\Gamma}_j} \lambda^{m-\rho-r}P^{-1}(\lambda)d\lambda\right)S_{m-\rho-r} \\
&= Z_j^s \int_{\widetilde{\Gamma}_j} P^{-1}(\lambda)(I\lambda^{m-\rho}+S_{m-\rho-1}\lambda^{m-\rho-1}+\ldots+S_1\lambda+S_0)d\lambda \\
&= Z_j^s \int_{\widetilde{\Gamma}_j} P^{-1}(\lambda)N(\lambda)d\lambda \\
&= Z_j^s \int_{\widetilde{\Gamma}_j} M^{-1}(\lambda)d\lambda
\end{aligned}$$

για κάθε $j=1,2,\ldots,\rho$ και $s=0,1,2,\ldots$ Από τις ισότητες αυτές και το Λήμμα 2 προκύπτει ότι οι πίνακες $Z_1,Z_2,\ldots,Z_\rho$ είναι φασματικές ρίζες της εξίσωσης $M(Z)=0$ και η απόδειξη είναι πλήρης. ∎

Πόρισμα 4

Αν $Z_1,Z_2,\ldots,Z_\rho$ $(1\le\rho<m)$ είναι φασματικές ρίζες της εξίσωσης $P(Z)=0$ και ο πίνακας $W(Z_1,Z_2,\ldots,Z_\rho)$ στην (5) είναι αντιστρέψιμος, τότε

$$\sigma(Z_j)\cap\sigma(Z_k)=\emptyset \quad (j,k=1,2,\ldots,\rho \text{ και } j\neq k).$$

Απόδειξη

Η απόδειξη είναι άμεση από τα Θεωρήματα 1 και 3. ∎

Το Θεώρημα 3 μας δίνει την δυνατότητα να αποδείξουμε ένα ενδιαφέρον κριτήριο παραγοντοποίησης του $P(\lambda)$ σε γινόμενο γραμμικών παραγόντων.

Θεώρημα 5

Έστω ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)=I\lambda^m+A_{m-1}\lambda^{m-1}+\ldots+A_1\lambda+A_0$ και $Z_1,Z_2,\ldots,Z_m$ φασματικές ρίζες της εξίσωσης $P(Z)=0$. Αν ο πίνακας Vandermonde $W(Z_1,Z_2,\ldots,Z_k)$ στην (5) είναι αντιστρέψιμος για κάθε $k=2,3,\ldots,m$, τότε ο $P(\lambda)$ μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$P(\lambda)=(I\lambda-Y_m)(I\lambda-Y_{m-1})\ldots(I\lambda-Y_2)(I\lambda-Y_1) \tag{16}$$

όπου ο πίνακας Y_j είναι όμοιος με την ρίζα Z_j $(j=1,2,\ldots,m)$, αντίστοιχα.

Απόδειξη

Επειδή ο πίνακας $W(Z_1,Z_2,\ldots,Z_{m-1})$ είναι αντιστρέψιμος, ο $P(\lambda)$ παραγοντοποιείται στη μορφή

$$P(\lambda)=(I\lambda-Y_m)M_m(\lambda), \tag{17}$$

όπου ο πολυωνυμικός πίνακας $M_m(\lambda)$ είναι $m-1$ βαθμού, $\sigma(M_m)=\bigcup_{k=1}^{m-1}\sigma(Z_k)$ και οι $Z_1,Z_2,\dots,Z_{m-1}$ είναι φασματικές ρίζες της εξίσωσης $M_m(Z)=0$. Επαναλαμβάνοντας $m-2$ φορές το ίδιο βήμα, καταλήγουμε στην σχέση (16). Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε την ομοιότητα κάθε πίνακα Y_j με την αντίστοιχη ρίζα Z_j $(j=1,2,\dots,m)$.

Ο πίνακας Vandermonde $W(Z_1,Z_2,\dots,Z_m)$ είναι αντιστρέψιμος και σύμφωνα με το Θεώρημα 1, το σύστημα των ριζών $Z_1,Z_2,\dots,Z_m$ είναι πλήρες. Γράφοντας τον πολυωνυμικό πίνακα $M_m(\lambda)=I\lambda^{m-1}+D_{m-2}\lambda^{m-2}+\dots+D_1\lambda+D_0$, ισχύει

$$M_m(Z_k)=Z_k^{m-1}+D_{m-2}Z_k^{m-2}+\dots+D_1Z_k+D_0 \quad (k=1,2,\dots,m-1)$$

και ορίζοντας τους $nm\times nm$ πίνακες

$$B=\begin{bmatrix} I & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & I & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & I & 0\\ D_0 & D_1 & \dots & D_{m-2} & I\end{bmatrix} \quad \text{και} \quad Q=\begin{bmatrix} I & I & \dots & I & I\\ Z_1 & Z_2 & \dots & Z_{m-1} & Z_m\\ Z_1^2 & Z_2^2 & \dots & Z_{m-1}^2 & Z_m^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ Z_1^{m-2} & Z_2^{m-2} & \dots & Z_{m-1}^{m-2} & Z_m^{m-2}\\ 0 & 0 & \dots & 0 & M_m(Z_m)\end{bmatrix}$$

μπορεί κανείς να επαληθεύσει ότι

$$B\,W(Z_1,Z_2,\dots,Z_m)=Q. \tag{18}$$

Από την αντιστρεψιμότητα των B και $W(Z_1,Z_2,\dots,Z_m)$ έπεται και η αντιστρεψιμότητα του πίνακα $M_m(Z_m)$. Επιπλέον, για κάθε $\lambda\notin\sigma(P)$, έχουμε από την (17) ότι

$$(I\lambda-Y_m)^{-1}=M_m(\lambda)P^{-1}(\lambda) \tag{19}$$

και αν Γ_m είναι μια κλειστή μετρήσιμη καμπύλη που περικλείει το φάσμα $\sigma(Z_m)$ στο εσωτερικό της, ενώ το $\sigma(P)\setminus\sigma(Z_m)$ βρίσκεται στο εξωτερικό της, τότε

$$M_m(Z_m)\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_m}P^{-1}(\lambda)d\lambda=I. \tag{20}$$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της ισότητας (19) με λ και εφαρμόζοντας το Λήμμα 2,

$$Y_m=M_m(Z_m)Z_m\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_m}P^{-1}(\lambda)d\lambda. \tag{21}$$

Από την (20) έχουμε ότι $M_m(Z_m)^{-1}=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\Gamma_m}P^{-1}(\lambda)d\lambda$ και η (21) γράφεται

$$Y_m=M_m(Z_m)Z_mM_m(Z_m)^{-1}.$$

Με επαναλήψεις μπορούμε να αποδείξουμε ότι κάθε πίνακας Y_j είναι όμοιος με τον Z_j $(j=1,2,\dots,m)$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. ■

Το τελευταίο μέρος του Θεωρήματος 5 εξασφαλίζει την αντιστρεψιμότητα των πινάκων Vandermonde.

Θεώρημα 6

Έστω ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)=I\lambda^m+A_{m-1}\lambda^{m-1}+\ldots+A_1\lambda+A_0$ και $Z_1,Z_2,\ldots,Z_m$ φασματικές ρίζες της εξίσωσης $P(Z)=0$. Αν ο $P(\lambda)$ παραγοντοποιείται στη μορφή

$$P(\lambda)=(I\lambda-Y_m)(I\lambda-Y_{m-1})\ldots(I\lambda-Y_2)(I\lambda-Y_1) \tag{22}$$

όπου $\sigma(Y_j)=\sigma(Z_j)$ $(j=1,2,\ldots,m)$. Τότε κάθε πίνακας Vandermonde $W(Z_1,Z_2,\ldots,Z_k)$ $(k=2,3,\ldots,m)$ είναι αντιστρέψιμος.

Απόδειξη

Η ισότητα (22) γράφεται

$$P(\lambda)=N_{m-k}(\lambda)M_k(\lambda), \tag{23}$$

όπου

$$M_k(\lambda)=(I\lambda-Y_K)(I\lambda-Y_{K-1})\ldots(I\lambda-Y_2)(I\lambda-Y_1) \quad (k=1,2,\ldots,m) \tag{24}$$

και

$$\begin{aligned}N_{m-k}(\lambda)&=(I\lambda-Y_m)(I\lambda-Y_{m-1})\ldots(I\lambda-Y_{k+2})(I\lambda-Y_{k+1})\\&=I\lambda^{m-k}+D_{m-k-1}\lambda^{m-k-1}+\ldots+D_1\lambda+D_0.\end{aligned}$$

Έστω Γ_k $(k=1,2,\ldots m)$ μια κλειστή μετρήσιμη καμπύλη που περικλείει το φάσμα $\sigma(Z_k)$ στο εσωτερικό της, ενώ το $\sigma(P)\setminus\sigma(Z_k)$ βρίσκεται στο εξωτερικό της. Από την (23) έπεται ότι για $\lambda\notin\sigma(P)$,

$$\lambda^s M_k^{-1}(\lambda)=\lambda^s P^{-1}(\lambda)N_{m-k}(\lambda) \quad (s=0,1,2,\ldots)$$

για κάθε $k=1,2,\ldots,m$. Από το Λήμμα 2 έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_k}\lambda^s M_k^{-1}(\lambda)d\lambda&=\int_{\Gamma_k}\lambda^s P^{-1}(\lambda)N_{m-k}(\lambda)d\lambda\\&=\sum_{r=0}^{m-k}Z_k^{m-k-r+s}\int_{\Gamma_k}P^{-1}(\lambda)D_{m-k-r}d\lambda\\&=Z_k^s\int_{\Gamma_k}P^{-1}(\lambda)N_{m-k}(\lambda)d\lambda,\end{aligned}$$

δηλαδή

$$\int_{\Gamma_k}\lambda^s M_k^{-1}(\lambda)d\lambda = Z_k^s\int_{\Gamma_k}M_k^{-1}(\lambda)d\lambda \quad (k=1,2,\ldots,m,\ s=0,1,2\ldots). \tag{25}$$

Η ισότητα (24) γράφεται

$$(I\lambda-Y_k)=M_{k-1}(\lambda)M_k^{-1}(\lambda)$$

και ολοκληρώνοντας την επί της Γ_k, λόγω της (25), καταλήγουμε στην σχέση

$$M_{k-1}(Z_k)\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_k}M_{k-1}^{-1}(\lambda)d\lambda=I \quad (k=1,2,\ldots,m).$$

Άρα ο πίνακας $\int_{\Gamma_k} M_k^{-1}(\lambda)d\lambda$ $(k=1,2,\ldots,m)$ είναι αντιστρέψιμος και από την (25) προκύπτει ότι ο Z_k είναι φασματική ρίζα της εξίσωσης $M_k(Z)=0$ (βλέπε το Λήμμα 2.2 στην εργασία [6]). Παρατηρούμε ότι για $l>k$, ο πολυωνυμικός πίνακας $M_l(\lambda)$ γράφεται

$$M_l(\lambda)=H(\lambda)M_k(\lambda)=H(\lambda)\widetilde{M}(\lambda)(I\lambda-Z_k),$$

όπου ο $H(\lambda)$ είναι βαθμού $l-k$ και $M_k(\lambda)=\widetilde{M}(\lambda)(I\lambda-Z_k)$ (διότι ο Z_k είναι ρίζα της εξίσωσης $M_k(Z)=0$). Επομένως, ο πίνακας Z_k είναι ρίζα όλων των εξισώσεων $M_l(Z)=0$ $(l=k,k+1,\ldots m)$. Όπως και προηγουμένως (βλέπε τα αποτελέσματα της σχέσης (23) και τις ισότητες στην (25)), ισχύουν οι σχέσεις

$$\int_{\Gamma_k} \lambda^s M_l^{-1}(\lambda)d\lambda = Z_k^s\int_{\Gamma_k} M_l^{-1}(\lambda)d\lambda \quad (s=0,1,2\ldots)$$

οι οποίες αποδεικνύουν ότι ο Z_k είναι φασματική ρίζα όλων των εξισώσεων $M_l(Z)=0$ $(l=k,k+1,\ldots m)$. Δηλαδή, για κάθε $k=1,2,\ldots,m$, οι πίνακες $Z_1,Z_2,\ldots,Z_k$ είναι φασματικές ρίζες της εξίσωσης $M_k(Z)=0$ και $\bigcup_{j=1}^{k}\sigma(Z_j)\subset\sigma(M_k)$. Αν τώρα υποθέσουμε ότι για κάποιο $k\in\{1,2,\ldots,m\}$, υπάρχει $\mu\in\sigma(M_k)$ το οποίο δεν ανήκει στην ένωση $\bigcup_{j=1}^{k}\sigma(Z_j)$, τότε ο πίνακας $(I\mu-Y_k)(I\mu-Y_{k-1})\ldots(I\mu-Y_2)(I\mu-Y_1)$ αντιστρέφεται, άτοπο διότι $\mu\in\sigma(M_k)$. Αποδείξαμε λοιπόν ότι $\bigcup_{j=1}^{k}\sigma(Z_j)=\sigma(M_k)$. Αφού οι πίνακες $Z_1,Z_2,\ldots,Z_k$ είναι φασματικές ρίζες της εξίσωσης $M_k(Z)=0$ και $\bigcup_{j=1}^{k}\sigma(Z_j)=\sigma(M_k)$ $(k=2,3,\ldots,m)$, ο πίνακας Vandermonde $W(Z_1,Z_2,\ldots,Z_k)$ είναι αντιστρέψιμος (βλέπε το Θεώρημα 2.3 στην εργασία [6]) και το θεώρημα αποδείχθηκε. ■

2. Παραγοντοποίηση Απλών Πολυωνυμικών Πινάκων

Ένας πολυωνυμικός πίνακας

$$P(\lambda)=I\lambda^m+A_{m-1}\lambda^{m-1}+\ldots+A_1\lambda+A_0$$

ονομάζεται *απλός (simple)* αν δεν έχει γενικευμένα ιδιοδιανύσματα, δηλαδή κάθε αλυσίδα Jordan του $P(\lambda)$ περιέχει ακριβώς ένα διάνυσμα (το ιδιοδιάνυσμα). Προφανώς, αν ο $P(\lambda)$ έχει nm διακεκριμένες ιδιοτιμές, τότε είναι απλός. Στο παρόν κεφάλαιο μελετούμε την ύπαρξη φασματικών ριζών της εξίσωσης $P(Z)=0$ και την δυνατότητα παραγοντοποίησης του απλού πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ σε γραμμικούς παράγοντες (βλέπε επίσης την εργασία [7]).

Όπως είδαμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, ένα σύστημα m ριζών $Z_1,Z_2,\ldots,Z_m$ της εξίσωσης $P(Z)=0$ είναι πλήρες αν και μόνο αν ο πίνακας Vandermonde $W(Z_1,Z_2,\ldots,Z_m)$ που δίνεται στην σχέση (5) είναι αντιστρέψιμος (βλέπε το Θεώρημα 1). Επιπλέον ισχύει η γνωστή σχέση

$$L \cdot W(Z_1, Z_2, \ldots, Z_m) = W(Z_1, Z_2, \ldots, Z_m) \cdot \operatorname{diag}\{Z_1, Z_2, \ldots, Z_m\} \tag{26}$$

(βλέπε την εργασία [6]), όπου L είναι ο μπλοκ-συνοδεύοντας πίνακας του $P(\lambda)$ στην (3) και με $\operatorname{diag}\{Z_1, Z_2, \ldots, Z_m\}$ συμβολίζουμε τον $nm \times nm$ μπλοκ-διαγώνιο πίνακα με διαγώνια στοιχεία τους πίνακες $Z_1, Z_2, \ldots, Z_m$. Από την (26) είναι φανερό πως αν το σύστημα $Z_1, Z_2, \ldots, Z_m$ είναι πλήρες, τότε οι πίνακες L και $\operatorname{diag}\{Z_1, Z_2, \ldots, Z_m\}$ είναι όμοιοι. Επιπλέον ο $P(\lambda)$ είναι απλός αν και μόνο αν ο πίνακας L είναι *διαγωνοποιήσιμος*, δηλαδή έχει nm γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.

Τα λήμματα που ακολουθούν είναι απαραίτητα για την συνέχεια και πρέπει να σημειωθεί ότι τα δύο πρώτα ισχύουν για γενικούς πολυωνυμικούς πίνακες, ενώ το τρίτο ισχύει μόνο για απλούς.

Λήμμα 7

Έστω ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda) = I\lambda^m + A_{m-1}\lambda^{m-1} + \ldots + A_1\lambda + A_0$ και $Z_1, Z_2, \ldots, Z_m$ ρίζες της εξίσωσης $P(Z) = 0$. Το σύστημα των ριζών αυτών είναι πλήρες αν και μόνο αν οι ισότητες

$$Z_j \varphi_j = \mu \varphi_j \quad (j = 1,2,\ldots,m) \quad \text{και} \quad \sum_{j=1}^{m} \varphi_j = 0 \tag{27}$$

με $\mu \in \mathbf{C}$ και $\varphi_j \in \mathbf{C}^n$ ισχύουν μόνο αν $\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_m = 0$.

Απόδειξη
Θεωρούμε το διάνυσμα

$$\widetilde{\varphi} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_m \end{bmatrix} \in \mathbf{C}^{nm}$$

και οι ισότητες στην (27) γράφονται στη μορφή του συστήματος $W(Z_1, Z_2, \ldots, Z_m)\widetilde{\varphi} = 0$. Συνεπώς, το αντίστροφο του λήμματος είναι προφανές από το Θεώρημα 1.

Για το ευθύ, ας υποθέσουμε ότι ο πίνακας $W(Z_1, Z_2, \ldots, Z_m)$ δεν είναι αντιστρέψιμος. Τότε ο πυρήνας $\operatorname{Ker} W(Z_1, Z_2, \ldots, Z_m)$ περιέχει κάποιο διάνυσμα $x_0 \neq 0$. Θεωρούμε την ακολουθία των διανυσμάτων

$$y_j = \operatorname{diag}\{Z_1, Z_2, \ldots, Z_m\}^j x_0 \quad (j = 0,1,2,\ldots)$$

και τον χώρο που παράγουν, $H = \operatorname{span}\{y_0, y_1, y_2, \ldots\}$, ο οποίος είναι ένας μη τετριμμένος αναλλοίωτος υπόχωρος του πίνακα $\operatorname{diag}\{Z_1, Z_2, \ldots, Z_m\}$ και για τον λόγο αυτό περιέχει τουλάχιστον ένα ιδιοδιάνυσμα του, έστω

$$\widetilde{\psi} = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_m \end{bmatrix} \in \mathbf{C}^{nm}.$$

Από την σχέση (26) προκύπτει ότι $y_j \in \operatorname{Ker} W(Z_1, Z_2, \ldots, Z_m)$ $(j = 0,1,2,\ldots)$ κι επομένως $\boldsymbol{H} \subseteq \operatorname{Ker} W(Z_1, Z_2, \ldots, Z_m)$, δηλαδή $W(Z_1, Z_2, \ldots, Z_m)\,\widetilde{\psi} = 0$. Εύκολα μπορεί να δει κανείς ότι $Z_j \psi_j = \mu \psi_j (j = 1,2,\ldots,m)$ και από την υπόθεση του λήμματος, προκύπτει πως $\widetilde{\psi} = 0$. Καταλήγουμε λοιπόν σε άτοπο και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. ■

Λήμμα 8

Αν υποθέσουμε ότι τα ιδιοδιανύσματα $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ απότελούν βάση του χώρου $\mathbf{C}^n$, τότε υπάρχει ρίζα της εξίσωσης $P(Z) = 0$, για την οποία τα $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ είναι ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις ίδιες ιδιοτιμές.

Απόδειξη

Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ιδιοτιμές του $P(\lambda)$ με $P(\lambda_j)\varphi_j = 0$ $(j = 1,2,\ldots,n)$. Εφόσον το σύνολο $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ είναι βάση του $\mathbf{C}^n$, υπάρχει ακριβώς ένας πίνακας Z τέτοιος ώστε $Z\varphi_j = \lambda_j \varphi_j$ $(j = 1,2,\ldots,n)$. Παρατηρούμε ότι $P(Z)\varphi_j = 0$ $(j = 1,2,\ldots,n)$, επομένως ισχύει $P(Z) = 0$ και το λήμμα αποδείχθηκε. ■

Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ $(s \le nm)$ όλες οι διακεκριμένες ιδιοτιμές ενός απλού πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ και για κάθε ιδιόχωρο $\operatorname{Ker} P(\lambda_j)$ $(j = 1,2,\ldots,s)$ επιλέγουμε μια βάση. Η ένωση όλων αυτών των βάσεων καλείται *πλήρες σύστημα ιδιοδιανυσμάτων* του $P(\lambda)$ και περιέχει nm ακριβώς διανύσματα (βλέπε την εργασία [9]).

Λήμμα 9

Έστω ένας απλός πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda) = I\lambda^m + A_{m-1}\lambda^{m-1} + \ldots + A_1\lambda + A_0$ και ένα πλήρες σύστημα ιδιοδιανυσμάτων του, $\boldsymbol{\Phi} = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{nm}\}$. Τότε το $\boldsymbol{\Phi}$ μπορεί να διαμεριστεί σε m υποσυστήματα που το καθένα τους είναι βάση του $\mathbf{C}^n$.

Απόδειξη

Θεωρούμε το φάσμα $\sigma(P) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\tau\}$ $(1 \le \tau \le nm)$ πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ και το σύνολο $\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{nm}\}$ που περιέχει κάθε ιδιοτιμή του $P(\lambda)$ τόσες φορές όσο η πολλαπλότητα της ως ρίζα του πολυωνύμου $\det P(\lambda)$. Αν $\varphi_j \in \mathbf{C}^n$ είναι το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή μ_j, τότε τα διανύσματα

$$\widetilde{\varphi}_j = \begin{bmatrix} \varphi_j \\ \mu_j \varphi_j \\ \vdots \\ \mu_j^{m-1} \varphi_m \end{bmatrix} \in \mathbf{C}^{nm} \quad (j = 1,2,\ldots,nm)$$

αποτελούν ένα πλήρες σύστημα ιδιοδιανυσμάτων του μπλοκ-συνοδεύοντα πίνακα L και βάση του χώρου $\mathbf{C}^{nm}$. Θεωρούμε τον $nm \times nm$ πίνακα F που η j-στήλη του είναι το $\widetilde{\varphi}_j$ και υπολογίζουμε την ορίζουσα $\det F$ με την βοήθεια του αναπτύγματος Laplace ως προς τις n πρώτες γραμμές (βλέπε την εργασία [2, σελ. 91]). Εύκολα μπορεί να διαπιστώσει κανείς ότι η ορίζουσα $\det F$ είναι το αλγεβρικό άθροισμα γινομένων της μορφής

$$\mu_1^{k_1} \mu_2^{k_2} \ldots \mu_{nm}^{k_{nm}} f_1 f_2 \ldots f_m \tag{28}$$

όπου $k_1,k_2,\dots,k_{nm}$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί και $f_1,f_2,\dots,f_m$ είναι υποορίζουσες του F που σχηματίζονται από τις n πρώτες γραμμές του F και με διαμέριση όλων των στηλών του F σε m ομάδες με n γραμμές κάθε μια. Ας υποθέσουμε τώρα ότι για κάθε τυχαία διαμέριση του συστήματος $\boldsymbol{\Phi}$ σε m υποσυστήματα με n ακριβώς διανύσματα το καθένα, ένα τουλάχιστον από αυτά τα υποσυστήματα είναι γραμμικά εξαρτημένο. Αυτό σημαίνει πως σε κάθε επιλογή από υποορίζουσες $f_1,f_2,\dots f_m$ του F που εμφανίζονται σε όρους της μορφής (28), θα υπάρχει τουλάχιστον μια υποορίζουσα μηδενική. Συνεπώς, $\det F=0$, άτοπο διότι ο πίνακας L είναι αντιστρέψιμος. ■

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε το πρώτο από τα δύο κύρια αποτελέσματα του κεφαλαίου.

Θεώρημα 10

Για κάθε απλό πολυωνυμικό πίνακα $P(\lambda)=I\lambda^m+A_{m-1}\lambda^{m-1}+\dots+A_1\lambda+A_0$ υπάρχει ένα πλήρες σύστημα ριζών $Z_1,Z_2,\dots,Z_m$ της εξίσωσης $P(Z)=0$.

Απόδειξη

Έστω $\boldsymbol{\Phi}=\{\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_{nm}\}$ ένα πλήρες σύστημα ιδιοδιανυσμάτων του $P(\lambda)$. Από το Λήμμα 9, μπορούμε να διαμερίσουμε το $\boldsymbol{\Phi}$ σε m ακριβώς βάσεις του $\mathbf{C}^n$ και από το Λήμμα 8, κάθε μια από αυτές τις βάσεις αντιστοιχεί σε μια ρίζα της εξίσωσης $P(Z)=0$. Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι το σύστημα αυτών των ριζών, έστω $Z_1,Z_2,\dots,Z_m$, είναι πλήρες. Ας θεωρήσουμε τις σχέσεις (του Λήμματος 7)

$$Z_j\psi_j=\mu\psi_j \quad (j=1,2,\dots,m) \quad \text{και} \quad \sum_{j=1}^{m}\psi_j=0$$

και ας υποθέσουμε ότι τα διανύσματα $\psi_{\xi_1},\psi_{\xi_2},\dots,\psi_{\xi_\tau}$, με $2\le\tau\le m$, είναι μη μηδενικά. (Προφανώς, λόγω της συνθήκης $\sum_{j=1}^{m}\psi_j=0$, δεν είναι δυνατόν να υπάρχει ένα ακριβώς μη μηδενικό ψ_j.) Τότε το μ είναι ιδιοτιμή του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ και ο αντίστοιχος ιδιόχωρος $\operatorname{Ker}P(\mu)$ έχει μια βάση $\{\varphi_l,\varphi_{l+1},\dots,\varphi_{l+k}\}$ ($k+1$ είναι η διάσταση του $\operatorname{Ker}P(\mu)$). Επιπλέον, για κάθε $j=1,2,\dots,\tau$, ισχύει $\psi_{\xi_j}\in\operatorname{Ker}(I\mu-Z_{\xi_j})\subseteq\operatorname{Ker}P(\mu)$. Από το γεγονός ότι ο μπλοκ-συνοδεύοντας πίνακας L στην (3) έχει nm γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα προκύπτει πως οι ιδιόχωροι $\operatorname{Ker}(I\mu-Z_{\xi_j})$ $(j=1,2,\dots,\tau)$ είναι ανά δύο ξένοι. Επομένως μπορούμε να διαμερίσουμε το $\{\varphi_l,\varphi_{l+1},\dots,\varphi_{l+k}\}$ σε m ξένα ανά δύο σύνολα που το καθένα τους είναι βάση ενός από τους ιδιόχωρους $\operatorname{Ker}(I\mu-Z_{\xi_j})$. Γράφοντας κάθε διάνυσμα ψ_{ξ_j} ως γραμμικό συνδυασμό της αντίστοιχης βάσης και από την υπόθεση $\sum_{j=1}^{m}\psi_j=0$, καταλήγουμε στο ότι το σύστημα $\{\varphi_l,\varphi_{l+1},\dots,\varphi_{l+k}\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο, άτοπο. Άρα $\psi_1=\psi_2=\dots=\psi_m=0$ και η απόδειξη ολοκληρώνεται εφαρμόζοντας το Λήμμα 7. ■

Πόρισμα 11

Αν η ορίζουσα ενός πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)=I\lambda^m+A_{m-1}\lambda^{m-1}+\dots+A_1\lambda+A_0$ δεν έχει πολλαπλές ρίζες, τότε ο $P(\lambda)$ δεν έχει γενικευμένα ιδιοδιανύσματα (δηλαδή είναι απλός) και υπάρχει ένα πλήρες σύστημα ριζών $Z_1,Z_2,\dots,Z_m$ της εξίσωσης $P(Z)=0$.

Στην συνέχεια αποδεικνύουμε την παραγοντοποίηση των απλών πολυωνυμικών πινάκων σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων.

Λήμμα 12
Αν ένας απλός πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)=I\lambda^m+A_{m-1}\lambda^{m-1}+\ldots+A_1\lambda+A_0$ γράφεται στη μορφή $P(\lambda)=N(\lambda)(I\lambda-Z)$, τότε και ο πολυωνυμικός πίνακας $N(\lambda)$ είναι απλός.

Απόδειξη
Αρκεί να αποδείξουμε ότι αν ο $P(\lambda)$ δεν έχει γενικευμένα ιδιοδιανύσματα, τότε και ο $N(\lambda)$ δεν έχει γενικευμένα ιδιοδιανύσματα. Με άλλα λόγια, αρκεί να δείξουμε ότι αν δεν υπάρχει ζεύγος διανυσμάτων $\varphi_0\neq 0,\varphi_1\in\mathbf{C}^n$ τέτοια ώστε

$$P(\lambda_0)\varphi_0=0 \quad \text{και} \quad P(\lambda_0)\varphi_1+P^{(1)}(\lambda_0)\varphi_0=0$$

τότε δεν υπάρχει ζεύγος διανυσμάτων $\psi_0\neq 0,\psi_1\in\mathbf{C}^n$ που να ικανοποιεί τις σχέσεις

$$N(\lambda_0)\psi_0=0 \quad \text{και} \quad N(\lambda_0)\psi_1+N^{(1)}(\lambda_0)\psi_0=0. \tag{29}$$

Αρχικά αποδεικνύουμε ότι $\operatorname{Ker}(I\lambda_0-Z)\oplus\operatorname{Im}(I\lambda_0-Z)=\mathbf{C}^n$, $\lambda_0\in\mathbf{C}$. Παρατηρούμε ότι οι ισότητες στην (29) γράφονται

$$N(\lambda_0)(I\lambda_0-Z)\varphi_0=0 \tag{30}$$

και

$$N(\lambda_0)(I\lambda_0-Z)\varphi_1+N^{(1)}(\lambda_0)(I\lambda_0-Z)\varphi_0+N(\lambda_0)\varphi_0=0. \tag{31}$$

Αν λοιπόν δεχθούμε ότι $\operatorname{Ker}(I\lambda_0-Z)\cap\operatorname{Im}(I\lambda_0-Z)\neq\{0\}$ και υπάρχουν διανύσματα $\phi_0\neq 0$ και ϕ_1 τέτοια ώστε $(I\lambda_0-Z)\varphi_0=0$ και $\varphi_0=(I\lambda_0-Z)\varphi_1$, τότε ικανοποιούνται οι ισότητες (30) και (31), άτοπο. Συνεπώς $\operatorname{Ker}(I\lambda_0-Z)\cap\operatorname{Im}(I\lambda_0-Z)=\{0\}$ και κατάλήγουμε στο ότι $\operatorname{Ker}(I\lambda_0-Z)\oplus\operatorname{Im}(I\lambda_0-Z)=\mathbf{C}^n$ (βλέπε τα Θεωρήματα 2.3.11 και 3.1.8 στην εργασία [1]).

Ας υποθέσουμε τώρα ότι υπάρχουν δύο διανύσματα $\psi_0\neq 0,\psi_1\in\mathbf{C}^n$ που ικανοποιούν την (29). Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις :

(i) Αν $\psi_0\in\operatorname{Im}(I\lambda_0-Z)$, τότε γράφεται $\psi_0=(I\lambda_0-Z)y_0$ και η διαφορά ψ_1-y_0 είναι της μορφής $\psi_1-y_0=u+v$, όπου $u\in\operatorname{Ker}(I\lambda_0-Z)$ και $v\in\operatorname{Im}(I\lambda_0-Z)$. Ορίζουμε τα διανύσματα φ_0 και φ_1 από τις σχέσεις $\varphi_0=y_0+u$ και $v=(I\lambda_0-Z)\varphi_1$ ($\varphi_0\neq 0$ διότι $(I\lambda_0-Z)\varphi_0=\psi_0\neq 0$). Άμεσα επαληθεύεται πως τα φ_0 και φ_1 ικανοποιούν τις ισότητες (30) και (31), άτοπο.

(ii) Αν $\psi_0\notin\operatorname{Im}(I\lambda_0-Z)$, γράφεται $\psi_0=\varphi_0+(I\lambda_0-Z)\varphi_1$ όπου $\varphi_0\in\operatorname{Ker}(I\lambda_0-Z)$ και $\varphi_0\neq 0$. Τα διανύσματα φ_0 και φ_1 ικανοποιούν τις ισότητες (30) και (31) και οδηγούμαστε πάλι σε άτοπο. ■

Θεώρημα 13
Κάθε απλός πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)=I\lambda^m+A_{m-1}\lambda^{m-1}+\ldots+A_1\lambda+A_0$ παραγοντοποιείται στη μορφή

$$P(\lambda)=(I\lambda-Y_m)(I\lambda-Y_{m-1})\ldots(I\lambda-Y_2)(I\lambda-Y_1).$$

Απόδειξη

Σύμφωνα με το Θεώρημα 10, υπάρχει μια ρίζα Y_1 της εξίσωσης $P(Z) = 0$. Δηλαδή ο $P(\lambda)$ γράφεται στη μορφή $P(\lambda) = N(\lambda)(I\lambda - Y_1)$, όπου ο πολυωνυμικός πίνακας $N(\lambda)$ είναι απλός (βλέπε το Λήμμα 12). Η απόδειξη ολοκληρώνεται επαναλαμβάνοντας $m-2$ φορές το ίδιο βήμα. ∎

Πόρισμα 14

Αν η ορίζουσα ενός πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda) = I\lambda^m + A_{m-1}\lambda^{m-1} + \ldots + A_1\lambda + A_0$ δεν έχει πολλαπλές ρίζες, τότε ο $P(\lambda)$ (ο οποίος είναι απλός) παραγοντοποιείται στη μορφή

$$P(\lambda) = (I\lambda - Y_m)(I\lambda - Y_{m-1})\ldots(I\lambda - Y_2)(I\lambda - Y_1).$$

Από τα αποτελέσματα του προηγούμενου κεφαλαίου είναι φανερό ότι κάθε απλός πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda) = (I\lambda - Y_m)(I\lambda - Y_{m-1})\ldots(I\lambda - Y_2)(I\lambda - Y_1)$ έχει ένα πλήρες σύστημα ριζών $Z_1, Z_2, \ldots, Z_m$ της εξίσωσης $P(Z) = 0$ τέτοιο ώστε ο πίνακας Y_j να είναι όμοιος με την ρίζα Z_j $(j = 1,2,\ldots,m)$, αντίστοιχα.

Βιβλιογραφία

[1] Ανδρεαδάκης Σ. Α., *Γραμμική Άλγεβρα*, Αθήνα 1991.

[2] Δασκαλόπουλος Δ.. Γ., *Εφηρμοσμένη Γραμμική Άλγεβρα*, Αθήνα 1975.

[3] Gohberg I., Lancaster P. and Rodman L., *Matrix Polynomials*, Academic Press, 1982.

[4] Kabak V. I., Markus A. S. and Mereutsa I. V., On the connection between the spectral properties of a polynomial operator pencil and its factors, *Mat. Issled.. Vyp.*, **45** (1977), pp. 29-57 (στην Ρωσική).

[5] Markus A. S. *Introduction to Spectral Theory of Polynomial Operator Pencils*, AMS Transl. Math. Monographs, vol. 71, Amer. Math. Soc. Providence, 1988.

[6] Markus A. S. and Mereutsa I. V., On a complete collection of roots of the operator equation corresponding to a polynomial operator pencil, *Izv, Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, **37** (1973), pp. 1108-1131 (στην Ρωσική). Αγγλική μετάφραση στο *Math. SSSR Izv.*, 7 (1973).

[7] Markus A. S. and Mereutsa I. V., On some properties of simple λ-matrices, *Mat. Issled. Kishinev*, **37** (1977), pp. 207-213 (στην Ρωσική).

[8] Mereutsa I. V., On the factorization of a polynomial operator pencil, *Mat. Issled.*, **45** (1975), pp. 115-124 (στην Ρωσική).

[9] Yeni V. M., On the partition of eigenvalues and eigenvectors of matrix pencils, *Izv. Akad. Nauk MSSR*, 7 (1965), pp.94-97 (στην Ρωσική).