<u>Σύντομες απαντήσεις στην εργασία 1</u>

1. Να επαληθευθούν οι παρακάτω σχέσεις για τα διανύσματα $\boldsymbol{a}=(1,\,0,\,-1)$, $\boldsymbol{b}=(2,\,1,3)$, $\boldsymbol{c}=(2,\,0,\,4)$

Α) $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2+(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2=|\mathbf{a}|^2\,|\mathbf{b}|^2$ **Β)** $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$ **Γ)** $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\ \ \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c})^2$

<u>Λύση:</u> Α) $\boldsymbol{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&0&-1\\2&1&3\end{vmatrix}=(1,-5,1)$, $|\boldsymbol{a}\times\mathbf{b}|=\sqrt{27}$, $\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{b}=2+0-3=-1$, $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2}$, $|\mathbf{b}|=\sqrt{14}$ άρα η αποδεικτέα γράφεται: $27+(-1)^2=2.14$ που είναι αληθής.

Β) $\mathbf{b}\times\mathbf{c}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&1&3\\2&0&4\end{vmatrix}=(4,-2,-2)\Rightarrow\boldsymbol{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&0&-1\\4&-2&-2\end{vmatrix}=(-2,-2,-2)$,

Επίσης: $\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{c}=1\cdot2+0+(-1)\cdot4=-2$ και άρα:

$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=-2\boldsymbol{b}+2\mathbf{c}=-2(2,1,3)-(-1)(2,0,4)=(-2,-2,-2)=\boldsymbol{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$.

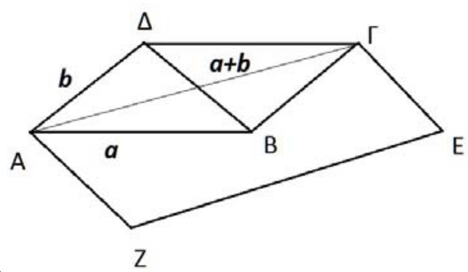
Γ) $\mathbf{c}\times\boldsymbol{a}=\ldots=(0,6,0)$, $\Rightarrow(\boldsymbol{a}\times\mathbf{b}\ \ \mathbf{b}\times\mathbf{c}\ \ \mathbf{c}\times\boldsymbol{a})=\begin{vmatrix}1&-5&1\\4&-2&-2\\0&6&0\end{vmatrix}=36$. Όμως έχουμε για το β μέλος της αποδεικτέας ότι:

$$(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c})^2=\begin{vmatrix}1&0&-1\\2&1&3\\2&0&4\end{vmatrix}^2=6^2=36.$$

2. Αν είναι γνωστό ότι $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(1,2,2)$, να υπολογισθεί το εξωτερικό γινόμενο $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$ και με βάση αυτό να αποδειχθεί ότι το εμβαδόν ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι το μισό του εμβαδού του παραλληλογράμμου ΑΓΕΖ όπου η ΑΖ είναι ίση και παράλληλη με την ΔΒ και η ΓΕ είναι ίση και παράλληλη με την ΑΖ.

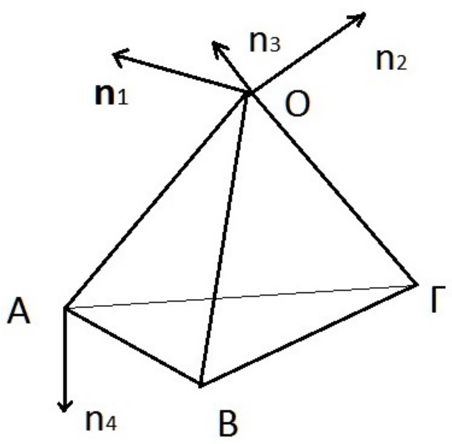
<u>Λύση:</u>

$$(\boldsymbol{a}+\mathbf{b})\times(\boldsymbol{a}-\mathbf{b})=(\boldsymbol{a}+\mathbf{b})\times\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}+\mathbf{b}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\times\mathbf{b}-\mathbf{b}\times\mathbf{b}=-2(\boldsymbol{a}\times\mathbf{b})=(-2,-4,-4).$$



Αν $\mathrm{AB}=\boldsymbol{a},\ \mathrm{A\Delta}=\mathbf{b}\Rightarrow\mathrm{A\Gamma}=\boldsymbol{a}+\mathbf{b}$ και το εμβαδόν του ΑΒΓΔ είναι

$(\mathrm{AB\Gamma\Delta})=|\boldsymbol{a}\times\mathbf{b}|$. Όμοια $(\mathrm{A\Gamma EZA})=|\mathbf{AZ}\times\mathbf{A\Gamma}|=|\mathbf{A\Gamma}\times\mathbf{AZ}|=|(\boldsymbol{a}+\mathbf{b})\times((\boldsymbol{a}-\mathbf{b}))|=|-2(\boldsymbol{a}\times\mathbf{b})|=2(\mathrm{AB\Gamma\Delta})$



3. Θεωρούμε το τετράεδρο ΟΑΒΓ και συμβολίζουμε με $\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2, \boldsymbol{n}_3, \boldsymbol{n}_4$ τα προς τα έξω διανύσματα κάθετα στις έδρες ΟΑΒ, ΟΒΓ, ΟΓΑ και ΑΒΓ και τα οποία υποθέτουμε ότι έχουν μέτρο το κάθε ένα ίσο με το εμβαδόν της αντίστοιχης έδρας στην οποία είναι κάθετο. Να αποδειχθεί ότι $\boldsymbol{n}_1+\boldsymbol{n}_2+\boldsymbol{n}_3+\boldsymbol{n}_4=\boldsymbol{0}$.

Λύση: Από τη γεωμετρική ερμηνεία του εξωτερικού γινομένου έχουμε: $2\boldsymbol{n}_1=\mathbf{OA}\times\mathbf{OB},\ \ 2\boldsymbol{n}_2=\mathbf{OB}\times\mathbf{O\Gamma},\ 2\boldsymbol{n}_3=\mathbf{O\Gamma}\times\mathbf{OA},\ 2\boldsymbol{n}_4=\mathbf{AB}\times\mathbf{A\Gamma}$

$$2(\boldsymbol{n}_1+\boldsymbol{n}_2+\boldsymbol{n}_3+\boldsymbol{n}_4)=\mathsf{OA}\times\mathsf{OB}+\mathsf{OB}\times\mathsf{O\Gamma}+\mathsf{O\Gamma}\times\mathsf{OA}+\mathsf{A\Gamma}\times\mathsf{AB}=$$

Άρα $\mathsf{OA}\times\mathsf{OB}+\mathsf{OB}\times\mathsf{O\Gamma}+\mathsf{O\Gamma}\times\mathsf{OA}+(\mathrm{O.\Gamma}-\mathrm{OA})\times(\mathrm{OB}-\mathrm{OA})=$

$$=\ldots=\mathsf{OB}\times\mathsf{O\Gamma}+\mathsf{O\Gamma}\times\mathsf{OB}=\mathbf{0}$$

4. Θεωρούμε τρία μη συνευθεικά σημεία του χώρου $A(\boldsymbol{a}), B(\boldsymbol{b}), \Gamma(\boldsymbol{c})$ με διανύσματα θέσης $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ αντίστοιχα ως προς μια αρχή Ο, και ABC το τρίγωνο που ορίζουν τα τρία σημεία στο επίπεδο τους (π). Να δειχθεί ότι: το εμβαδόν του τριγώνου (ΑΒΓ) είναι $E=\frac{1}{2}|\boldsymbol{n}|$ όπου $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$.

<u>Λύση:</u> Από το προηγούμενο σχήμα προκύπτει:

$$2\mathrm{E}=|\mathsf{AB}\times\mathsf{A\Gamma}|=|(\mathbf{b}-\boldsymbol{a})\times(\mathbf{c}-\boldsymbol{a})|=|\mathbf{b}\times\mathbf{c}-\mathbf{b}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{a}\times\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{n}||.$$

5. Να βρεθεί το $\varepsilon\in\mathbb{R}$ ώστε τα διανύσματα $\boldsymbol{a}=(1,0,\varepsilon)$, $\boldsymbol{b}=(2,1,3)$, $\boldsymbol{c}=(2,0,4)$ να είναι συνεπίπεδα και στη συνέχεια να βρεθεί ένα κάθετο διάνυσμα στο επίπεδό τους.

<u>Λύση:</u> Είναι συνεπίπεδα αν και μόνον αν το μικτό τους γινόμενο είναι μηδέν: $\begin{vmatrix}1&0&\varepsilon\\2&1&3\\2&0&4\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow\varepsilon=2$.

Ένα κάθετο διάνυσμα είναι το $\boldsymbol{n}=\mathbf{b}\times\mathbf{c}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&1&3\\2&0&4\end{vmatrix}=(4,-2,-2)$.

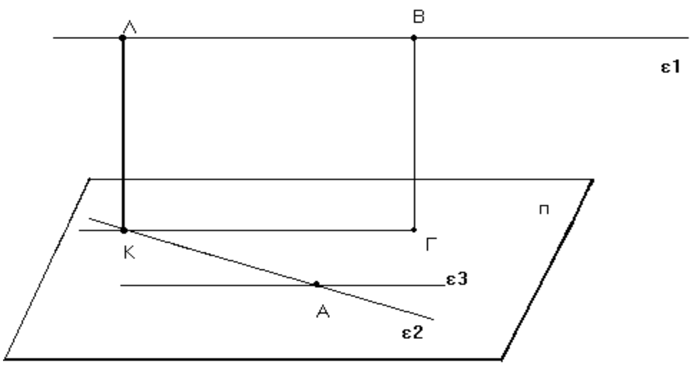
6. Να αποδειχθεί ότι αν μια τριάδα διανυσμάτων είναι ανά δύο κάθετα τότε είναι μη συνεπίπεδα (γραμμικώς ανεξάρτητα).

<u>Λύση:</u> Θεωρούμε την τριάδα των διανυσμάτων $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ με $\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=0,\ \ i\neq j$. Έστω

$\kappa\boldsymbol{e}_1+\lambda\boldsymbol{e}_2+\mu\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{0}\Rightarrow\kappa\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_1+\lambda\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_1+\mu\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_1=0\Rightarrow\kappa|\boldsymbol{e}_1|=0\Rightarrow\kappa=0$.

Όμοια πολλαπλασιάζοντας διαδοχικά επί $\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ προκύπτει $\lambda=\mu=0$. Άρα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

7. Η γεωμετρική κατασκευή της κοινής καθέτου δύο ασύμβατων ευθειών $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ είναι η ακόλουθη



(Γεωμετρ. Β΄Λυκείου):

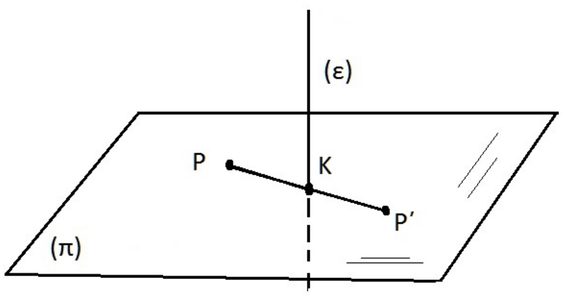
(α). Από τυχόν σημείο Α της (ε_2) φέρουμε παράλληλη προς την (ε_1), την (ε_3). Έστω (π) το επίπεδο των $(\varepsilon_2),(\varepsilon_3)$. **(β).** Από τυχόν σημείο Β της (ε_1) φέρουμε ευθεία (ε_4) κάθετη στο (π). Έστω Γ το ίχνος της. **(γ).** Από το σημείο Γ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς την ευθεία (ε_3) που τέμνει την (ε_2) στο σημείο Κ. **(δ).** Από το σημείο Κ φέρουμε παράλληλη προς την (ε_4) που τέμνει την (ε_1) στο σημείο Λ. Αποδεικνύεται ότι τα Κ και Λ είναι μοναδικά καθορισμένα και ανεξάρτητα από την τυχαία επιλογή των σημείων Α και Β. Ακολουθώντας τα παραπάνω βήματα και επιλέγοντας τα δικά σας σημεία $A(x_1,y_1,z_1)$ και $B(x_2,y_2,z_2)$, να προσδιορίσετε τις εξισώσεις όλων των γεωμετρικών στοιχείων που χρησιμοποιούνται (ευθείες επίπεδα, σημεία) για την κατασκευή της κοινής καθέτου των ασύμβατων ευθειών:

$$(\varepsilon 1):\ \frac{x-3}{2}=\frac{y-5}{3}=\frac{z-7}{4} \quad \text{και} \quad (\varepsilon 2):\ \frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{2}=z-1.$$

<u>Λύση:</u> (α) έστω $A(0,1,0)\in(\varepsilon_2)$ τότε $(\varepsilon_3): x=2t, y=1+3t, z=4t$. Άρα το κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο (π) είναι: $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}\times\mathbf{b}=(2,2,1)\times(2,3,4)=(2,-6,2)$, $\boldsymbol{a}//(\varepsilon_1), \mathbf{b}//(\varepsilon_2)$. Επομένως $(\pi): 5x-6y+2z+6=0$. **(β)** Αν $B(1,2,3)\in(\varepsilon_1)$ τότε η ΒΓ έχει παράσταση: $x=1+5\lambda,\ y=2-6\lambda,\ z=3+2\lambda$ και αντικαθιστώντας στην εξίσωση του επιπέδου προκύπτει ητο σημείο τομής $\Gamma(8/13,\ 32/13,\ 37/13)$. **(γ)** Η ΓΚ έχει τότε παράσταση: $x=8/13+3m,\ y=32/13+3m,\ z=37/13+4m$. Από αυτήν και την (ε_2) προκύπτει το σημείο $K(-13/3,\ -1/13,\ -7/13)$. **(δ) Η** Η ΚΛ έχει παράσταση: $x=-14/13+3s,\ y=-1/13-6s,\ z=-7/13+2s$ και από αυτήν και την (ε_1) προκύπτει το σημείο $\Lambda(-9/13,\ -7/13,\ -5/13)$. Τα σημεία Κ και Λ καθορίζουν την κοινή κάθετη η δε απόσταση είναι $d=(K\Lambda)$. Σημείωση: Οι ευθείες είναι πράγματι ασύμβατες αφού δεν είναι παράλληλες διότι $\nexists\lambda\in\mathbb{R}:(2,3,4)=\lambda(2,2,1)$ και δεν τέμνονται αφού το σύστημα $(\varepsilon_1),\ (\varepsilon_2)$ δεν έχει λύση.

8. Να βρεθεί το συμμετρικό P' του σημείου P(1,0,3) ως προς την ευθεία (ε): $x+y=0, x+z=0$.

<u>Λύση</u>



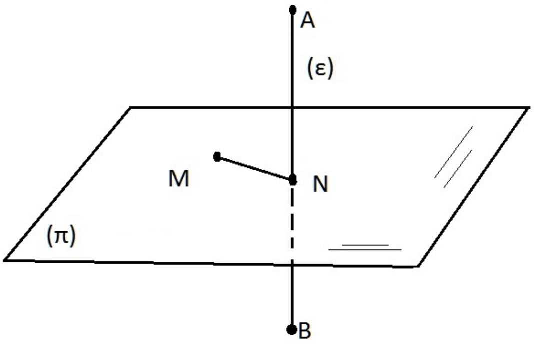
Λύση: Για την εύρεση του συμμετρικού θα χρειασθεί η εύρεση της ορθής προβολής Κ του δεδομένου σημείου Ρ στην ευθεία. Το Κ όμως είναι η τομή της ευθείας με το επίπεδο (π) που διέρχεται από το Ρ και είναι κάθετο στην ευθεία. Το επίπεδο αυτό έχει κάθετο διάνυσμα $\boldsymbol{n}$ το παράλληλο προς την ευθεία. Η (ε) έχει παραμετρική παράσταση: $(\varepsilon):\ x=-t,\ y=t,\ z=t$ και άρα $\boldsymbol{n}=(-1,1,1)$. Τότε: $(\pi):(-1)(x-1)+1(y-0)+1(z-3)=0$,

ισοδύναμα: $(\pi):-x+y+z-2=0$. Αντικαθιστώντας τις (ε) στην (π) προκύπτει t=3/2 και άρα $K(-2/3,\ 2/3,\ 2/3)$. Αν $P'(x',y',z')$ είναι το ζητούμενο συμμετρικό τότε $\mathbf{PP'}=2\mathbf{PK}$.

Άρα $x'-1=2\left(-\frac{2}{3}-1\right),\quad y'-0=2\cdot\frac{2}{3},\quad z'-3=2\left(\frac{2}{3}-3\right)$, άρα $P'\left(-\frac{7}{3},\frac{4}{3},-\frac{5}{3}\right)$.

9. Να βρεθεί η απόσταση του σημείου M(-3,2,-1) από την ευθεία ε που περνά από το σημεία A(4,3,8) και B(5,5,10).

Λύση: Η ζητούμενη απόσταση είναι η απόσταση του σημείου M από το σημείο τομής N της ευθείας που είναι η τομή της με το κάθετο προς αυτήν επίπεδο που διέρχεται από το M. Η (ε) διέρχεται από το A και είναι παράλληλη προς το $\mathbf{AB}=(1,2,2)$ και έχει παράσταση:



$(\varepsilon): \ x=4+t, \ y=3+2t, \ z=8+2t$. Όμως $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{AB}\perp(\pi)$ άρα: $(\pi): 1(x+3)+2(y-2)+2(z+1)=0$,ισοδύναμα:

Αντικαθιστώντας τις (ε) στην (π) προκύπτει t=-3, άρα $\mathrm{N}(1,-3,2)$, οπότε $d(M,\varepsilon)=d(M,N)=\sqrt{50}$.

10. Να δεχθεί ότι οι ευθείες $(\varepsilon_1): x=-y=-z$ και $(\varepsilon_2): x-1=1-y=4-z$ είναι παράλληλες και να βρεθεί η απόστασή τους και η εξίσωση του επιπέδου που ορίζουν.

Λύση: Από την μορφή των ευθειών προκύπτει ότι: $(\varepsilon_1)//\boldsymbol{a}=(1,-1,-1)//(\varepsilon_2)$. Επίσης το σημείο (0,0,0) ανήκει στην πρώτη ευθεία αλλά όχι στη δεύτερη. Άρα δεν ταυτίζονται και είναι παράλληλες. Το τυχόν σημείο της (ε_1) είναι $M(t,-t,-t)$ ενώ το τυχόν σημείο της (ε_2) είναι $N(1+\lambda, \ 1-\lambda, \ 4-\lambda)$. Ζητούμε τα (t,λ) ώστε $\mathbf{MN}\perp\boldsymbol{a}$.Άρα $3\lambda-3t=4$. Κάθε ζεύγος (t,λ) που ικανοποιεί την συνθήκη αυτή δίνει ένα ζεύγος σημείων τα οποία ορίζουν ευθεία κάθετη στις δύο παράλληλες ευθείες. Επιλέγω $t=0, \ \lambda=4/3$ οπότε $M(0,0,0), \ N\left(\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{8}{3}\right)$ οπότε

$d\left((\varepsilon_1), (\varepsilon_2)\right)=(\mathrm{MN})=\frac{\sqrt{114}}{3}$.

Το επίπεδο που ορίζουν διέρχεται από το $M(0,0,0)$ και έχει κάθετο διάνυσμα $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}\times\mathbf{MN}=(1,-1,-1)\times\left(\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{8}{3}\right)=(-3, \ -5, \ 2)$, άρα έχει εξίσωση: $-3x-5y+2z=0$.