Συμπληρωματικές ασκήσεις στην Αναλυτική Γεωμετρία και τον διανυσματικό λογισμό με λύσεις:

1. Δίνονται οι ευθείες: $(\varepsilon): x-y=0,\ 2x-y+z=0, \quad (\zeta): x+z=0,\ x+y=1$. Να αποδειχθεί ότι ορίζουν ένα επίπεδο και να βρεθεί η εξίσωσή του.
Λύση: Η (ε) και (ζ) γράφονται: $(\varepsilon): x=t,\ y=t,\ z=-t \quad (\zeta): x=m,\ y=1-m,\ z=-m$. Είναι $(\varepsilon)//\boldsymbol{a}=(1,1,-1)$ και $(\zeta)//\mathbf{b}=(1,-1,-1)$. Προφανώς δεν είναι παράλληλες. Εξετάζω αν τέμνονται δηλαδή αν υπάρχουν (t,m) ώστε: $t=m,\ t=1-m,\ -t=-m$. Προφανώς $t=m=1/2$. Άρα τέμνονται στο σημείο $P_0(1/2,\,1/2,\,-1/2)$. Άρα ορίζουν ένα επίπεδο που διέρχεται από το σημείο P_0 και είναι κάθετο στο διάνυσμα

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1\end{vmatrix}=(-2,\ 0,\ -2).$$

Επομένως το επίπεδο έχει εξίσωση:

$$-2(x-1/2)+0(x-1/2)-2(z+1/2)=0 \quad \text{δηλαδή: } x+z=0.$$

2. Δίνεται η ευθεία: $(\varepsilon): x-1=y=2-z$ και το επίπεδο (π): $ax+y-z=2$. Να βρεθούν οι τιμές του α ώστε: 1) η ευθεία να τέμνει το επίπεδο, 2) $\varepsilon//\pi$, 3) η ευθεία να ανήκει στο επίπεδο 4) $\varepsilon\perp\pi$.
<u>Λύση:</u> Η ευθεία γράφεται: $(\varepsilon): x=1+t,\ y=t,\ z=2-t,\ t\in\mathbb{R}$. Η (ε) τέμνει το επίπεδο αν υπάρχει $t\in\mathbb{R}$ ώστε $a(1+t)+t-2+t=2 \Leftrightarrow t(a+2)=4-a$. Τέτοιο t υπάρχει αν $a\neq -2$. Αν $a=-2$ η ευθεία είναι παράλληλη στο επίπεδο αφού δεν υπάρχει κοινό σημείο. Άρα δεν υπάρχει α ώστε η ευθεία να ανήκει στο επίπεδο. Τέλος $\boldsymbol{n}=(a,1,-1)\perp(\pi)$ και $\boldsymbol{u}=(1,1,-1)//(\varepsilon)$. Άρα $\varepsilon\perp\pi \Leftrightarrow \boldsymbol{u}//\boldsymbol{n} \Leftrightarrow a=1$.

3. Να δειχθεί ότι για οποιαδήποτε διανύσματα $\boldsymbol{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ ισχύει: $(\boldsymbol{a}-\mathbf{b}\ \ \mathbf{b}-\mathbf{c}\ \ \mathbf{c}-\boldsymbol{a})=0$ (μικτό γινόμενο).
<u>Λύση</u>. <u>α΄ τρόπος</u> Εφαρμόζουμε ιδιότητες

$$(\boldsymbol{a}-\mathbf{b}\ \ \mathbf{b}-\mathbf{c}\ \ \mathbf{c}-\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{a}-\mathbf{b})\cdot\left[(\mathbf{b}-\mathbf{c})\times(\mathbf{c}-\boldsymbol{a})\right]=(\boldsymbol{a}-\mathbf{b})\cdot\left[\mathbf{b}\times(\mathbf{c}-\boldsymbol{a})-\mathbf{c}\times(\mathbf{c}-\boldsymbol{a})\right]$$
$$=(\boldsymbol{a}-\mathbf{b})\cdot\left[\mathbf{b}\times\mathbf{c}-\mathbf{b}\times\boldsymbol{a}-\mathbf{c}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\boldsymbol{a}\right]=\dots.=0$$

<u>Β΄ τρόπος</u> $(\boldsymbol{a}-\mathbf{b})+(\mathbf{b}-\mathbf{c})+(\mathbf{c}-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$ άρα είναι γραμμικώς εξαρτημένα και άρα έχουν μικτό γινόμενο μηδέν. (ισοδύναμα $(\boldsymbol{a}-\mathbf{b})=-(\mathbf{b}-\mathbf{c})-(\mathbf{c}-\boldsymbol{a})$ άρα είναι συνεπίπεδα).

4. Δίνονται τα επίπεδα (p): $x+y-z=1, \quad (q): x+my+3z=2, \quad (r): 2x+3y+mz=3,\ m\in\mathbb{R}$
Να βρεθεί η σχετική θέση των επιπέδων για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου m. (βλ. παραδ 7.3.1 βιβλίου σελ. 189).
Λύση: Οι τρείς εξισώσεις συνιστούν ένα γραμμικό σύστημα με 3 αγνώστους και πίνακα συντελεστών

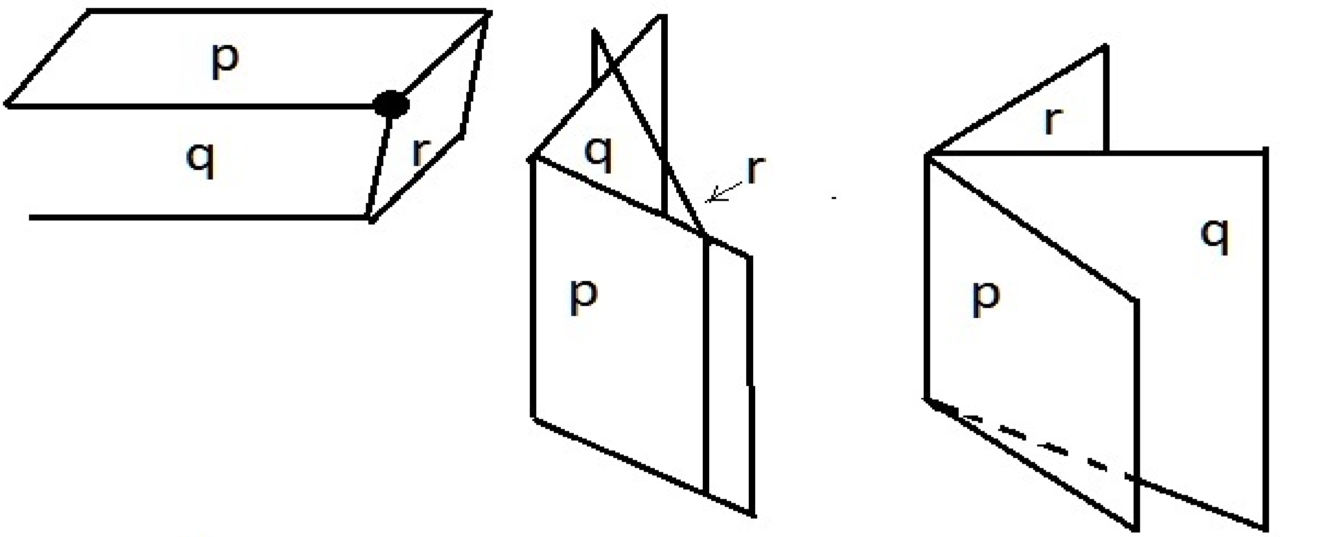
$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & m & 3\\ 2 & 3 & m\end{bmatrix}$$

με ορίζουσα: $|A|=(m+3)(m-2)$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

α) Αν $|A| \neq 0 \quad (m \neq -3$ και $m \neq 2)$ τότε το σύστημα είναι Crammer και έχει μοναδική λύση, άρα τα επίπεδα έχουν ένα κοινό σημείο (σχ. α).

β) Αν $m=-3$ το σύστημα (p): $x+y-z=1, \quad (q): x-3y+3z=2, \quad (r): 2x+3y-3z=3$ δεν έχει λύση όπως προκύπτει από γραμμοπράξεις (μέθοδος Gauss) στον επαυξημένο. Αυτό σημαίνει ότι τα επίπεδα δεν έχουν κοινό σημείο. Παρατηρώ ότι τα κάθετα διανύσματα στα επίπεδα είναι $\boldsymbol{n}_p=(1,1,-1)$, $\boldsymbol{n}_q=(1,-3,3)$, $\boldsymbol{n}_r=(2,3,-3)$ και ότι $\boldsymbol{n}_p \nparallel \boldsymbol{n}_q, \quad \boldsymbol{n}_p \nparallel \boldsymbol{n}_r, \quad \boldsymbol{n}_q \nparallel \boldsymbol{n}_r$. Άρα αφού δεν έχουν κοινό σημείο, τα επίπεδα τέμνονται ανά δύο (σχ. β).

γ) Αν $m=2$ το σύστημα γράφεται (p): $x+y-z=1, \quad (q): x+2y+3z=2, \quad (r): 2x+3y+2z=3$ και όπως προκύπτει από γραμμοπράξεις το σύστημα έχει την μονοπαραμετρική απειρία λύσεων: $(x,y,z)=(5t,1-4t,t)=(0,1,0)+t(5,-4,1),\ t \in \mathbb{R}$. Άρα τέμνονται σε μια ευθεία που διέρχεται από το σημείο (0,1,0) και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα (5,-4,1). Ισοδύναμα: τα επίπεδα (p) και (q) τέμνονται αφού τα κάθετα διανύσματά των δεν είναι παράλληλα. Η ευθεία αυτή είναι παράλληλη στο εξωτερικό γινόμενο $\boldsymbol{n}_p \times \boldsymbol{n}_q=(5,-4,1)$ που παρατηρώ ότι είναι κάθετο στο $\boldsymbol{n}_r$. Άρα η ευθεία αυτή είναι παράλληλη ή ανήκει στο επίπεδο (r). Τέλος παρατηρώ ότι ένα τυχαίο σημείο της ευθείας (λύση των (p), (q)) όπως το (5,3,-1) ή το ((0,1,0) ανήκει στο επίπεδο (r). Άρα η ευθεία ανήκει σε αυτό. Επομένως τα τρία επίπεδα διέρχονται από την ίδια ευθεία (σχ. γ).



α β γ