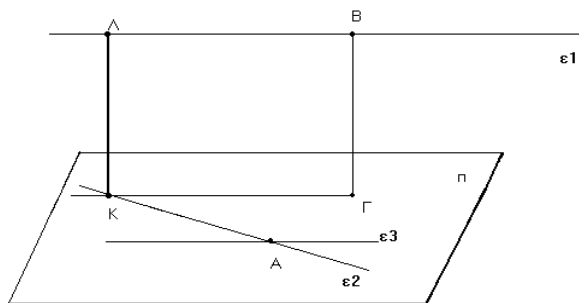


Παράδοση των ασκήσεων μέχρι 28/1/2014

1. Να επαληθευθούν οι παρακάτω σχέσεις για τα διανύσματα $\mathbf{a} = (1, 0, -1)$, $\mathbf{b} = (2, 1, 3)$, $\mathbf{c} = (2, 0, 4)$
 Α) $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2$, Β) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$, Γ) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} \times \mathbf{a}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c})^2$
2. Θεωρούμε τρία μη συνευθειακά σημεία του χώρου $A(\mathbf{a})$, $B(\mathbf{b})$, $C(\mathbf{c})$ με διανύσματα θέσης $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ αντίστοιχα ως προς μια αρχή O , και ABC το τρίγωνο που ορίζουν τα τρία σημεία στο επίπεδο τους (π) . Να δειχθεί ότι το εμβαδόν του τριγώνου $(AB\Gamma)$ είναι $E = \frac{1}{2}|\mathbf{n}|$, $(\mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a} \perp (\pi))$.
3. Να βρεθεί το $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ώστε τα διανύσματα $\mathbf{a} = (1, 0, \varepsilon)$, $\mathbf{b} = (2, 1, 3)$, $\mathbf{c} = (2, 0, 4)$ να είναι συνεπίπεδα και στη συνέχεια να βρεθεί ένα κάθετο διάνυσμα στο επίπεδό τους.
4. Να αποδειχθεί ότι αν μια τριάδα διανυσμάτων είναι ανά δύο κάθετα τότε είναι μη συνεπίπεδα (γραμμικώς ανεξάρτητα).
5. Η γεωμετρική κατασκευή της κοινής καθέτου δύο ασύμβατων ευθειών $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ είναι η ακόλουθη (Γεωμετρ. Β' Λυκείου):
 (α). Από τυχόν σημείο A της (ε_2) φέρουμε παράλληλη προς την (ε_1) , την (ε_3) . Έστω (π) το επίπεδο



των $(\varepsilon_2), (\varepsilon_3)$. (β). Από τυχόν σημείο B της (ε_1) φέρουμε ευθεία (ε_4) κάθετη στο (π) . Έστω Γ το ίχνος της. (γ). Από το σημείο Γ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς την ευθεία (ε_3) που τέμνει την (ε_2) στο σημείο K .

(δ). Από το σημείο K φέρουμε παράλληλη προς την (ε_4) που τέμνει την (ε_1) στο σημείο Λ .

Αποδεικνύεται ότι τα K και Λ είναι μοναδικά καθορισμένα και ανεξάρτητα από την τυχαία επιλογή των σημείων A και B . Ακολουθώντας τα παραπάνω βήματα και επιλέγοντας τα δικά σας σημεία $A(x_1, y_1, z_1)$ και $B(x_2, y_2, z_2)$, να προσδιορίσετε τις εξισώσεις όλων των γεωμετρικών στοιχείων που χρησιμοποιούνται (ευθείες επίπεδα, σημεία) για την κατασκευή της κοινής καθέτου των ασύμβατων ευθειών:

$$(\varepsilon_1): \frac{x-3}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-7}{4} \quad \text{και} \quad (\varepsilon_2): \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{2} = z-1$$

6. Να βρεθεί το συμμετρικό P' του σημείου $P(1, 0, 3)$ ως προς την ευθεία $(\varepsilon): x + y = 0, x + z = 0$.
7. Να βρεθεί η απόσταση του σημείου $M(-3, 2, -1)$ από την ευθεία ε που περνά από τα σημεία $A(4, 3, 8)$ και $B(5, 5, 10)$.
8. Να δεχθεί ότι οι ευθείες $(\varepsilon_1): x = -y = -z$ και $(\varepsilon_2): x-1 = 1-y = 4-z$ είναι παράλληλες και να βρεθεί η απόστασή τους και η εξίσωση του επιπέδου που ορίζουν.