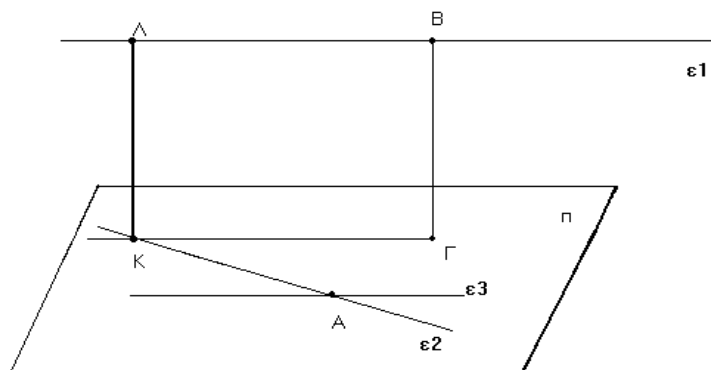


# ΕΡΓΑΣΙΑ 1

Παράδοση των ασκήσεων 1, 2, 3, 6, 10, 11, 12

μέχρι 30-1-14

- Να επαληθευθούν οι παρακάτω σχέσεις για τα διανύσματα  $\mathbf{a} = (1, 0, -1)$ ,  $\mathbf{b} = (2, 1, 3)$ ,  $\mathbf{c} = (2, 0, 4)$   
 Α)  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2$       Β)  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$
- Να αποδειχθεί ότι:  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} \times \mathbf{a}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c})^2$ . (Υποδείξη:  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$ )
- Αν είναι γνωστό ότι  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (1, 2, 2)$ , να υπολογισθεί το εξωτερικό γινόμενο  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b})$  και με βάση αυτό να αποδειχθεί ότι το εμβαδόν ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι το μισό του εμβαδού του παραλληλογράμμου ΑΓΕΖ όπου η ΑΖ είναι ίση και παράλληλη με την ΔΒ και η ΓΕ είναι ίση και παράλληλη με την ΑΖ.
- Να αποδειχθεί η ταυτότητα  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$  και να δοθεί μια γεωμετρική ερμηνεία.
- Θεωρούμε το τετράεδρο ΟΑΒΓ και συμβολίζουμε με  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3, \mathbf{n}_4$  τα προς τα έξω διανύσματα κάθετα στις έδρες ΟΑΒ, ΟΒΓ, ΟΓΑ και ΑΒΓ και τα οποία υποθέτουμε ότι έχουν μέτρο το κάθε ένα ίσο με το εμβαδόν της αντίστοιχης έδρας στην οποία είναι κάθετο. Να αποδειχθεί ότι  $\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 + \mathbf{n}_3 + \mathbf{n}_4 = \mathbf{0}$ .
- Θεωρούμε τρία μη συνευθειακά σημεία του χώρου  $A(\mathbf{a}), B(\mathbf{b}), C(\mathbf{c})$  με διανύσματα θέσης  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  αντίστοιχα ως προς μια αρχή Ο, και ΑΒΓ το τρίγωνο που ορίζουν τα τρία σημεία στο επίπεδο τους (π). Να δειχθεί ότι:  
 Α) το διάνυσμα  $\mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a}$  είναι κάθετο στο επίπεδο (π).  
 Β) το εμβαδόν του τριγώνου (ΑΒΓ) είναι  $E = \frac{1}{2} |\mathbf{n}|$ .
- Να βρεθεί το  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  ώστε τα διανύσματα  $\mathbf{a} = (1, 0, \varepsilon)$ ,  $\mathbf{b} = (2, 1, 3)$ ,  $\mathbf{c} = (2, 0, 4)$  να είναι συνεπίπεδα και στη συνέχεια να βρεθεί ένα κάθετο διάνυσμα στο επίπεδό τους.
- Να αποδειχθεί ότι αν μια τριάδα διανυσμάτων είναι ανά δύο κάθετα τότε είναι μη συνεπίπεδα (γραμμικώς ανεξάρτητα).
- Αν  $\mathbf{n}$  είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα και (π) είναι ένα επίπεδο κάθετο σε αυτό, να αποδειχθεί ότι για κάθε διάνυσμα  $\mathbf{r}$  το συμμετρικό του ως προς το επίπεδο (π) (κατοπτρικό) διάνυσμα  $\mathbf{r}' = \text{sym}_\pi \mathbf{r}$  δίνεται από τη σχέση:  $\mathbf{r}' = \text{sym}_\pi \mathbf{r} = \mathbf{r} - 2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$ . Επίσης να εξετασθεί αν ισχύουν οι σχέσεις:  
 α)  $\text{sym}_\pi(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) = \text{sym}_\pi \mathbf{r}_1 + \text{sym}_\pi \mathbf{r}_2$       β)  $\text{sym}_\pi(\lambda \mathbf{r}) = \lambda \text{sym}_\pi \mathbf{r}$
- Η γεωμετρική κατασκευή της κοινής κάθετου δύο ασύμβατων ευθειών  $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$  είναι η ακόλουθη



(Γεωμετρ. Β' Λυκείου):

(α). Από τυχόν σημείο Α της  $(\varepsilon_2)$  φέρουμε παράλληλη προς την  $(\varepsilon_1)$ , την  $(\varepsilon_3)$ . Έστω (π) το επίπεδο των  $(\varepsilon_2), (\varepsilon_3)$ . (β). Από τυχόν σημείο Β της  $(\varepsilon_1)$  φέρουμε ευθεία  $(\varepsilon_4)$  κάθετη στο (π). Έστω Γ το ίχνος

της. (γ). Από το σημείο Γ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς την ευθεία  $(\varepsilon_3)$  που τέμνει την  $(\varepsilon_2)$  στο σημείο Κ.

(δ). Από το σημείο Κ φέρουμε παράλληλη προς την  $(\varepsilon_4)$  που τέμνει την  $(\varepsilon_1)$  στο σημείο Λ.

Αποδεικνύεται ότι τα Κ και Λ είναι μοναδικά καθορισμένα και ανεξάρτητα από την τυχαία επιλογή των σημείων Α και Β. Ακολουθώντας τα παραπάνω βήματα και επιλέγοντας τα δικά σας σημεία  $A(x_1, y_1, z_1)$  και  $B(x_2, y_2, z_2)$ , να προσδιορίσετε τις εξισώσεις όλων των γεωμετρικών στοιχείων που χρησιμοποιούνται (ευθείες επίπεδα, σημεία) για την κατασκευή της κοινής καθέτου των ασύμβατων ευθειών:

$$(\varepsilon_1): \frac{x-3}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-7}{4} \quad \text{και} \quad (\varepsilon_2): \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{2} = z-1$$

11. Να βρεθεί το συμμετρικό  $P'$  του σημείου  $P(1,0,3)$  ως προς την ευθεία  $(\varepsilon): x+y=0, x+z=0$ .
12. Να βρεθεί η απόσταση του σημείου  $M(-3,2,-1)$  από την ευθεία  $\varepsilon$  που περνά από το σημεία  $A(4,3,8)$  και  $B(5,5,10)$ .
13. Να δεχθεί ότι οι ευθείες  $(\varepsilon_1): x=-y=-z$  και  $(\varepsilon_2): x-1=1-y=4-z$  είναι παράλληλες και να βρεθεί η απόστασή τους και η εξίσωση του επιπέδου που ορίζουν.