ΕΡΓΑΣΙΑ 2

1. Χρησιμοποιώντας την μέθοδο των τομών με επίπεδα παράλληλα προς τα επίπεδα των συντεταγμένων, να γίνει σχεδίαση σε διαφορετικά σχήματα, των επιφανειών με εξισώσεις (βλ. σελ. 113-122 βιβλίου):

α) $z=-4+(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16})$, **β)** $\frac{z^2}{16}-\frac{y^2}{25}=1+\frac{x^2}{36}$ **γ)** $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}=1+\frac{z^2}{36}$

2. Δίνεται η σφαίρα (Σ): $(x-1)^2+y^2+(z-2)^2=4$, και το επίπεδο (π): $x+z=1$.

Α. Να βρεθεί η προβολή του κέντρου της σφαίρας στο επίπεδο (π).

Β) Να δειχθεί ότι το επίπεδο τέμνει τη σφαίρα.

Γ) Να βρεθούν το κέντρο και η ακτίνα του κύκλου που ορίζεται από την τομή της σφαίρας με το επίπεδο.

Δ) Να γραφεί ο ίδιος κύκλος ως τομή κυλίνδρου με άξονα παράλληλο στον άξονα $z'z$ και επιπέδου. Να γίνουν τα σχετικά σχήματα.

Ε) Να βρεθεί μια παραμετρική παράσταση του παραπάνω κύκλου.

3. Δίνονται οι επιφάνειες $S_1: x^2+y^2-z=0$ και $S_2: 2y-z=-3$.

Α. Να σχεδιασθούν οι επιφάνειες και η καμπύλη (c) που είναι η τομή τους.

Β. Να παρασταθεί η καμπύλη (c) ως τομή ορθού κυλίνδρου Κ με την επιφάνεια S_2 και να γίνει σχεδίαση των Κ, S_2 και (c).

Γ. Να βρεθεί μια παραμετρική παράσταση της (c).

Δ. Να βρεθεί μια παραμετρική παράσταση και η καρτεσιανή εξίσωση της κυλινδρικής επιφάνειας Μ με οδηγό καμπύλη την (c) και γενέτειρες παράλληλες προς το διάνυσμα $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{k}=(0,0,1)$. Να γίνει πρόχειρο σχέδιο με την Μ και την (c).

Ε. Να βρεθεί η καρτεσιανή παράσταση της κωνικής επιφάνειας με κορυφή το σημείο Κ(0,0,5) και οδηγό καμπύλη την (c) με δύο τρόπους: 1) χρησιμοποιώντας την αρχική μορφή της $(c)=S_1\cap S_2$ και 2) την παραμετρική της μορφή. Να σχεδιασθεί η κωνική επιφάνεια.

4. Να βρείτε ποιά από τα παρακάτω σύνολα είναι διανυσματικοί υπόχωροι των αντιστοίχων χώρων $\mathbb{R}^n$:

Α) $U=\{(x,y): x^2+y^2=1\}\subset\mathbb{R}^2$, $V=\{(x,y): x\le y\}\subset\mathbb{R}^2$,

Β) $U=\{(x,y,z): 2x+y-z=1\}\subset\mathbb{R}^3$, $V=\left\{(x,y,z): x+y-z=0,\ 5x-y-z=0\right\}\subset\mathbb{R}^3$

Γ) $E=\{(x,y,z,w): x+y=y+z=z+w=0\}\subset\mathbb{R}^4$

5. Να βρεθεί μια βάση και η διάσταση των παρακάτω διανυσματικών υπόχωρων:

Α) $S=[A]$,όπου $A=\left\{t^3+t^2-1,\ t^2+2t+1,\ 2t^3+3t^2+2t-1,\ t^3+3t^2+4t+1\right\}\subset P_3$ και P_3 ο χώρος των πολυωνύμων βαθμού το πολύ 3.

Β) $S_1=\left\{A\in\Pi_3: A=A^T\right\}$, $S_2=\left\{A\in\Pi_3: A=-A^T\right\}$, $S_1\cap S_2$.

6. Δίνονται οι διανυσματικοί υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$

$V_1=\left\{(x,y,z): x+y-z=0\right\}\subset\mathbb{R}^3$, $V_2=\left\{(x,y,z): 5x-y-z=0\right\}$

Α) Να βρεθεί μια βάση και η διάστασή των υπόχωρων $V_1, V_2, V_1\cap V_2$.

7. Για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ το $(1,-2,\lambda)\in\mathbb{R}^3$ είναι στοιχείο της θήκης $\left[(3,0,-2),(2,-1,-5)\right]$. Να δοθεί γεωμετρική ερμηνεία.

8. Να εξεταστεί αν ισχύει: $\left[(3,0,-2),(2,-1,-5)\right]=\left[(5,-1,-7),(8,-1,-9)\right]$.

9. Έστω ο πίνακας $A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Αποδείξτε ότι $A^{-1}=\frac{1}{16}(A^2-8A+20I)$.

10. Έστω ο πίνακας $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Αποδείξτε ότι $A^k=A^{k-2}+A^2-I$, για $k=3,4,\ldots$ και υπολογίστε (ακριβώς) τον A^{100}.

11. Αποδείξτε ότι για τους 5×5 πίνακες $A=\left[a_{i,j}\right]=\left[i+2j\right]_{i,j=1}^{5}$ και $B=\left[b_{i,j}\right]=\left[i+5j\right]_{i,j=1}^{5}$, ισχύει $|A|=|B|=|A+B|=0.$

12. Έστω 2×2 πραγματικοί πίνακες A, B που ικανοποιούν τις συνθήκες: $A^2B^2=(AB)^2-AB$ και $\det(B)=1$, και η συνάρτηση $f(t)=\det(\mathrm{A}-t\mathrm{B})$, $t\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι: (α) ο πίνακας A είναι μη αντιστρέψιμος, (β) $f(t)=t^2-at$, για κάποιο $a\in\mathbb{R}$ που εξαρτάται από τα στοιχεία των A και B, (γ) $\det(A+2B)+\det(A-2B)=8$.

13. Για τις διάφορες τιμές του $a\in\mathbb{R}$,, λύστε το γραμμικό σύστημα $\begin{cases} (a+1)x+y+z=a+1 \\ x+(a+1)y+z=a+3 \\ x+y+(a+1)z=-2a-4 \end{cases}$.

14. Για τις διάφορες τιμές των $a,b,c\in\mathbb{R}$, λύστε τα συστήματα

$$\begin{cases} x+\ ay+\ a^2z\ =1 \\ x+\ ay+\ abz\ =a \\ bx+a^2y+a^2bz\ =a^2b \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} x+ay+a^2z\ =a^3 \\ x+by+b^2z\ =b^3 \\ x+cy+c^2z\ =c^3 \end{cases}.$$

15. Έστω το γραμμικό σύστημα: (Σ): $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-1 \\ 3x_1+3x_2+4x_3+(a^2+3)x_4=a^2 \\ x_1-x_2-x_3-2x_4=2 \\ x_1+5x_2+(a+7)x_3+(a+9)x_4=-3 \\ x_1+3x_2+4x_3+5x_4=0 \end{cases}$. Βρείτε για ποιες τιμές της παραμέτρου $a\in\mathbb{R}$ το σύστημα έχει άπειρες λύσεις και για ποιες τιμές της $a\in\mathbb{R}$ είναι αδύνατο. Για τις τιμές της παραμέτρου $a\in\mathbb{R}$ για τις οποίες το (Σ) έχει άπειρες λύσεις, λύστε το σύστημα.

16. Βρείτε για ποιες τιμές του $k\in\mathbb{R}$, η γενική λύση του γραμμικού συστήματος $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ kx+y+z=1 \\ (3k-1)x+y+4z=2 \end{cases}$ είναι υποσύνολο της γενικής λύσης του γραμμικού συστήματος $\begin{cases} kx+y+z=1 \\ x+ky+z=1 \\ x+y+kz=1 \end{cases}$.