## Εργασία 2 Γραμμική Αλγεβρα και Αναλυτική Γεωμετρία ΧΗΜ. ΜΗΧ. 2014-15

**Παράδοση μέχρι 16/1/14 (κρατείστε ένα αντίγραφο για να το συγκρίνετε με τις λύσεις)**

**1.** Δίνονται οι πίνακες: $\Gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\Delta = \begin{bmatrix} 7 & 1 & -5 & 0 \end{bmatrix}$. α) Να υπολογίσετε τους πίνακες $\Gamma\Delta$, $\Delta\Gamma$ και $\Gamma^T$, $\Delta^T$. β) Να επαληθεύσετε τη σχέση: $(\Gamma\Delta)^T = \Delta^T\Gamma^T$.

**2. α)** Να δειχθεί ότι δεν υπάρχουν τετραγωνικοί πίνακες Α,Β ώστε ΑΒ-ΒΑ=Ι. **β)** Αν ο Α ικανοποιεί τη σχέση $A^\nu + A^{\nu-1} + .... + A + I = 0$, να δειχθεί ότι $A^{-1} = A^\nu$.

**3.** Με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss να βρείτε, αν υπάρχουν, τις λύσεις των συστημάτων:

**α)** $\left\{\begin{aligned} x + 2y - z &= 5 \\ 3x - y + 2z &= 2 \\ 2x + 11y - 7z &= -2 \end{aligned}\right\}$ **β)** $\left\{\begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ x + y - z &= 3 \\ x - y - z &= 5 \\ 2x + 3y + 8z &= 0 \end{aligned}\right\}$

4. Δίνεται το σύστημα (Σ): $\begin{aligned} y - 2z + 3w &= 1 \\ x - 3y + 2z + w &= 0 \\ x - y - 2z + 7w &= 2 \\ x \quad - 4z + 10w &= 2 + k \end{aligned}$

α) Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου $k$ για τις οποίες το σύστημα (Σ) έχει λύση.

β) Να λύσετε το σύστημα για τις τιμές του $k$ που βρήκατε στο ερώτημα α).

**5.** Έστω $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. Να βρείτε μια διαγωνοποίηση του Α. Να συμπεράνετε ότι ο Α αντιστρέφεται και να βρείτε μια διαγωνοποίηση του πίνακα $A^{-1}$. Ποια είναι χαρακτηριστικά ποσά του $A^{-1}$ (Δεν χρειάζεται να υπολογίσετε τον $A^{-1}$ ).

**6.** Με τη βοήθεια του θεωρήματος Cayley - Hamilton, να δείξετε ότι ίσχυει: $A^3 = A$, όπου. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

κατόπιν να υπολογίσετε τον πίνακα $B = 3A^{513} - 2A$ B = 3A513 − 2A .

**7.** Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ a & -2 & 1 \end{bmatrix}$. Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου α ώστε ο πίνακας Α να έχει ως ιδιοδιάνυσμα το $X = \begin{bmatrix} 2, & 1, & -2 \end{bmatrix}^T$. Κατόπιν να βρείτε μια διαγωνοποίηση του $A^2$. Να βρείτε ποιά από τα παρακάτω σύνολα είναι διανυσματικοί υπόχωροι των αντιστοίχων χώρων $\mathbb{R}^n$ :

Α) $U=\{(x,y): x^2+y^2=1\}\subset\mathbb{R}^2$, $V=\{(x,y): x\le y\}\subset\mathbb{R}^2$,

Β) $U=\{(x,y,z): 2x+y-z=1\}\subset\mathbb{R}^3$, $V=\left\{(x,y,z): x+y-z=0,\ 5x-y-z=0\right\}\subset\mathbb{R}^3$

Γ) $E=\{(x,y,z,w): x+y=y+z=z+w=0\}\subset\mathbb{R}^4$

**8.** Για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ το $(1,-2,\ \lambda)\in\mathbb{R}^3$ είναι στοιχείο της θήκης $\left[(3,\ 0,\ -2),\ (2,\ -1,\ -5)\right]$. Να δοθεί γεωμετρική ερμηνεία.

**9.** Να εξεταστεί αν ισχύει: $\left[(3,\ 0,\ -2),\ (2,\ -1,\ -5)\right]=\left[(5,\ -1,\ -7),\ (8,\ -1,\ -9)\right]$.

**10.** Δίνονται οι διανυσματικοί υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$
$V_1=\left\{(x,y,z): x+y-z=0\right\}\subset\mathbb{R}^3$, $V_2=\left\{(x,y,z): 5x-y-z=0\right\}$ Να βρεθεί μια βάση και η διάστασή των υπόχωρων $V_1,\ V_2,\ V_1\cap V_2$.