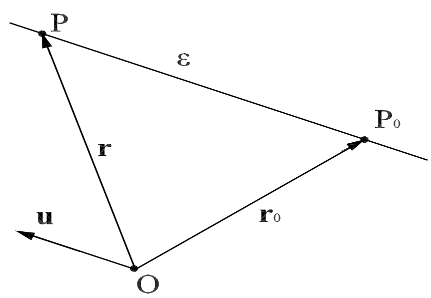
Κεφάλαιο 2

Ευθεία και επίπεδο

2.1 Η ευθεία

Μία ευθεία (ε) ορίζεται μονοσήμαντα είτε **(i)** από ένα σημείο της και μία διεύθυνση προς την οποία είναι παράλληλη είτε **(ii)** από δύο σημεία της.

Σκοπός μας είναι να εκφράσουμε το διάνυσμα θέσης $\mathbf{r}$ ή τις συντεταγμένες (x, y, z) ενός σημείου P της ευθείας με τη βοήθεια των αντίστοιχων μεγεθών των στοιχείων που ορίζουν, σε κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις, την ευθεία.



Σχήμα 2.1:

(i) Θεωρούμε ένα σημείο O του $\mathcal{E}$, την αρχή. Έστω ότι η ευθεία (ε) περνά από ένα σημείο $\mathrm{P}_0(\mathbf{r}_0)$ και είναι παράλληλη προς ένα διάνυσμα $\mathbf{u}$. Αν $\mathrm{P}(\mathbf{r})$ είναι ένα σημείο πάνω στην (ε), τότε τα διανύσματα $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$ και $\mathbf{u}$ είναι συγγραμμικά (σχήμα 2.1). Άρα

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\times\mathbf{u}=\mathbf{0}. \tag{2.1}$$

Ισοδύναμα, υπάρχει $t\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0=t\mathbf{u}$. Επομένως:

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+t\mathbf{u},\ t\in\mathbb{R}. \tag{2.2}$$

Για τις διάφορες τιμές του t το σημείο $\mathrm{P}(\mathbf{r})$ διαγράφει την ευθεία (ε). (Για $t=0$ συμπίπτει με το σημείο $\mathrm{P}_0(\mathbf{r}_0)$)
Η εξίσωση (2.1) λέγεται **διανυσματική εξίσωση** της ευθείας, ενώ η εξίσωση (2.2) λέγεται **διανυσματική παραμετρική εξίσωση** της ευθείας.
Αν θεωρήσουμε ένα σύστημα συντεταγμένων με αρχή το O, ως προς το οποίο είναι $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_0=x_0\mathbf{i}+y_0\mathbf{j}+z_0\mathbf{k}$, δηλαδή $\mathrm{P}(x,y,z)$, $\mathrm{P}_0(x_0,y_0,z_0)$ και $\mathbf{u}=u_1\mathbf{i}+u_2\mathbf{j}+u_3\mathbf{k}$, τότε η εξίσωση (2.2) είναι ισοδύναμη με το σύστημα:

$$x=x_0+tu_1, \quad y=y_0+tu_2, \quad z=z_0+tu_3, \quad t\in\mathbb{R}. \tag{2.3}$$

Οι αλγεβρικές σχέσεις (2.3) λέγονται **παραμετρικές εξισώσεις** της ευθείας και για κάθε $t\in\mathbb{R}$ δίνουν τις συντεταγμένες ενός σημείου της. Έστω $u_1u_2u_3\neq 0$. Τότε με απαλοιφή του t από τις (2.3) προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$\frac{x-x_0}{u_1}=\frac{y-y_0}{u_2}=\frac{z-z_0}{u_3}. \tag{2.4}$$

Οι Εξισώσεις (2.4) λέγονται **αναλυτικές** ή **καρτεσιανές εξισώσεις** της ευθείας. Αν ένα από τα u_1,u_2,u_3 είναι μηδέν (π.χ. $u_3=0$) τότε οι εξισώσεις (2.3) γράφονται:

$$\frac{x-x_0}{u_1}=\frac{y-y_0}{u_2}, \quad z=z_0. \tag{2.5}$$

Αν δύο από τα u_1,u_2,u_3 είναι μηδέν (π.χ. $u_2=u_3=0$), τότε οι (2.3) γράφονται:

$$x=x_0+tu_1, \quad y=y_0, \quad z=z_0, \quad t\in\mathbb{R}. \tag{2.6}$$

Παράδειγμα 2.1.1. Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $\mathrm{P}_0(1,-2,0)$ και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\mathbf{u}=\mathbf{i}-2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ έχει διανυσματική παραμετρική εξίσωση την

$$\mathbf{r}=\mathbf{i}-2\mathbf{j}+t(\mathbf{i}-2\mathbf{j}+3\mathbf{k})=(t+1)\mathbf{i}-(2t+2)\mathbf{j}+3t\mathbf{k}, \quad t\in\mathbb{R}.$$

Από αυτήν προκύπτουν οι παραμετρικές της εξισώσεις που είναι

$$x=1+t, \quad y=-2-2t, \quad z=3t, \quad t\in\mathbb{R}$$

και κατόπιν, με απαλοιφή του t, οι καρτεσιανές της εξισώσεις:

$$x-1=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{3}.$$

Παράδειγμα 2.1.2. Ο άξονας x′x στο θεωρούμενο σύστημα είναι μία ευθεία που περνά από το σημείο $\mathrm{O}(0,0,0)$ και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\mathbf{u} = \mathbf{i} = \mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$. Άρα οι παραμετρικές του εξισώσεις είναι:

$$x = t, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad t \in \mathbb{R}$$

και οι αναλυτικές του

$$y = 0, \;\; z = 0.$$

Όμοια οι παραμετρικές εξισώσεις των αξόνων y′y και z′z είναι αντιστοίχως

$$x = 0,\; y = t,\; z = 0, \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad x = 0,\; y = 0,\; z = t, \quad t \in \mathbb{R}$$

και οι αντίστοιχες αναλυτικές

$$x = 0, \;\; z = 0 \quad \text{και} \quad x = 0, \;\; y = 0.$$

Παρατήρηση 2.1.1. Τα συνημίτονα διεύθυνσης του διανύσματος $\mathbf{u}$ (βλέπε σελίδα 20), προς το οποίο είναι παράλληλη η ευθεία, ονομάζονται **συνημίτονα διεύθυνσης** της ευθείας.

(ii) Η περίπτωση που η ευθεία ορίζεται από δύο σημεία $\mathrm{P}_0(\mathbf{r}_0)$ και $\mathrm{P}_1(\mathbf{r}_1)$ με $\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$, μπορεί να αναχθεί στην προηγούμενη. Πράγματι, αρκεί να θεωρήσουμε ότι η ευθεία ορίζεται από το σημείο $\mathrm{P}_0(\mathbf{r}_0)$ από το οποίο διέρχεται και το διάνυσμα $\mathbf{u} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0$ προς το οποίο είναι παράλληλη. Τότε οι αντίστοιχες προς τις (2.1),(2.2),(2.3) και (2.4) εξισώσεις της ευθείας είναι:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) = \mathbf{0}, \tag{2.7}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.8}$$

$$x = x_0 + t(x_1 - x_0), \quad y = y_0 + t(y_1 - y_0), \quad z = z_0 + t(z_1 - z_0), \quad t \in \mathbb{R} \tag{2.9}$$

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}, \quad (x_1 - x_0)(y_1 - y_0)(z_1 - z_0) \neq 0. \tag{2.10}$$

Επίσης, εξισώσεις αντίστοιχες προς τις (2.5) και (2.6) προκύπτουν ανάλογα.

Παράδειγμα 2.1.3. Να εξετασθεί αν το σημείο $\mathrm{P}(2,3,5)$ βρίσκεται επάνω στην ευθεία που περνά από τα σημεία $\mathrm{P}_0(1,3,2)$ και $\mathrm{P}_1(2,1,0)$.

Λύση. Από την (2.9) προκύπτει ότι ο συντεταγμένες (x, y, z) ενός σημείου της ευθείας δίνονται από τις εξισώσεις:

$$\begin{aligned}x &= 1 + t(2-1) = 1 + t,\\ y &= 3 + t(1-3) = 3 - 2t,\\ z &= 2 + t(0-2) = 2 - 2t, \quad t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Για να βρίσκεται το $\mathrm{P}(2, 3, 5)$ επάνω στην ευθεία πρέπει να υπάρχει $t \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε:

$$2 = 1 + t, \quad 3 = 3 - 2t, \quad 5 = 2 - 2t.$$

Η τιμή $t = 1$ που δίνει η πρώτη εξίσωση δεν επαληθεύει τις άλλες δύο εξισώσεις. Άρα το σημείο $\mathrm{P}(2, 3, 5)$ δεν ανήκει στην ευθεία.

Παράδειγμα 2.1.4. Δίδονται δύο ευθείες (ε_1) και (ε_2) από τις οποίες η (ε_1) περνά από τα σημεία $\mathrm{A}(0, 1, 0)$ και $\mathrm{B}(1, 2, 1)$ ενώ η (ε_2) περνά από το σημείο $\Gamma(1, 0, 1)$ και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\mathbf{u} = 0\mathbf{i} + \mathbf{j} + 0\mathbf{k} = \mathbf{j}$. Να αποδειχθεί ότι οι δύο αυτές ευθείες τέμνονται και να βρεθεί το σημείο τομής τους.

Λύση. Οι παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας (ε_1) είναι:

$$x = 0 + t(1-0) = t,\ y = 1 + t(2-1) = 1 + t,\ z = 0 + t(1-0) = t, \quad t \in \mathbb{R},$$

ενώ της (ε_2) είναι:

$$x = 1 + \lambda 0 = 1,\ y = 0 + 1\lambda = \lambda,\ \ z = 1 + 0\lambda = 1, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Για να βρίσκεται κάποιο σημείο και στις δύο ευθείες πρέπει να υπάρχουν τιμές για τις παραμέτρους t και λ τέτοιες ώστε:

$$t = 1, \quad \lambda = 1 + t, \quad 1 = t.$$

Προφανώς αυτό συμβαίνει για $t = 1$ και $\lambda = 2$. Άρα οι ευθείες τέμνονται και το κοινό τους σημείο, όπως προκύπτει από τις εξισώσεις τους, είναι το $\mathrm{P}(1, 2, 1)$.

Παρατήρηση 2.1.2. Στην περίπτωση που θεωρούμε την ευθεία σε ένα δεδομένο επίπεδο (π) και ένα σύστημα συντεταγμένων σ' αυτό τότε η σχέση (2.2) με $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, $\mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j}$ και $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$ ισοδυναμεί με τις

$$x = x_0 + tu_1, \quad y = y_0 + tu_2, \quad t \in \mathbb{R},$$

που είναι παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας στο (π). Αν $u_1u_2 \neq 0$ προκύπτει (με απαλοιφή του t) η αναλυτική της εξίσωση

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \alpha x + \beta y = \gamma,$$

όπου $\alpha = u_2$, $\beta = -u_1$ και $\gamma = u_2x_0 - u_1y_0$. Αν $u_1 = 0$ ή $u_2 = 0$ τότε $\beta = 0$ ή $\alpha = 0$ και η ευθεία είναι παράλληλη προς τον $y'y$ ή τον $x'x$ αντίστοιχα.

2.2 Το επίπεδο

Ένα επίπεδο ορίζεται:

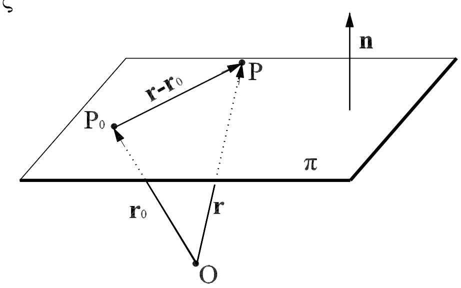
(i) από ένα σημείο του και μία διεύθυνση κάθετη σ' αυτό ή

(ii) από ένα σημείο του και δύο μη συγγραμμικά διανύσματα παράλληλα προς αυτό ή

(iii) από δύο σημεία του Α, Β και ένα διάνυσμα $\mathbf{u}$ που είναι παράλληλο προς αυτό, αλλά όχι συγγραμμικό με το $\mathbf{AB}$ ή

(iv) από τρία σημεία του Α, Β, Γ που δεν βρίσκονται επάνω στην ίδια ευθεία.

Οι περιπτώσεις (iii) και (iv) ανάγονται άμεσα στην περίπτωση (ii). Για το λόγο αυτό θα μελετήσουμε μόνο τις περιπτώσεις (i) και (ii).



Σχήμα 2.2:

(i) *Το επίπεδο* (π) *διέρχεται από το σημείο* P_0 *και είναι κάθετο σε ένα διάνυσμα* $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ (σχήμα 2.2).

Θεωρούμε μία αρχή Ο. Αν είναι $\mathrm{P}_0(\mathbf{r}_0)$ και $\mathrm{P}(\mathbf{r})$ είναι ένα τυχαίο σημείο του επιπέδου, τότε το $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ έχει διεύθυνση παράλληλη προς το επίπεδο και άρα κάθετη στο $\mathbf{n}$. Επομένως:

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{n}=0. \tag{2.11}$$

Η εξίσωση (2.11) λέγεται **διανυσματική εξίσωση** του επιπέδου (π). Αν θεωρήσουμε ένα σύστημα συντεταγμένων με αρχή το Ο, ως προς το οποίο είναι $\mathbf{n} = \mathrm{A}\mathbf{i} + \mathrm{B}\mathbf{j} + \Gamma\mathbf{k}$ και $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ τότε η (2.11) γράφεται:

$$(x-x_0)\mathrm{A} + (y-y_0)\mathrm{B} + (z-z_0)\Gamma = 0, \tag{2.12}$$

ή ισοδύναμα

$$\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Gamma z + \Delta = 0, \tag{2.13}$$

όπου

$$\Delta = -(\mathrm{A}x_0 + \mathrm{B}y_0 + \Gamma z_0) \quad \text{και} \quad |\mathrm{A}| + |\mathrm{B}| + |\Gamma| \neq 0.$$

Η εξίσωση (2.13) λέγεται **καρτεσιανή εξίσωση** του επίπεδου.
Αντιστρόφως το σύνολο των σημείων του χώρου που οι συντεταγμένες τους (x, y, z) επαληθεύουν μία εξίσωση της μορφής (2.13), βρίσκονται επάνω σε ένα επίπεδο που είναι κάθετο στο διάνυσμα $\mathbf{n} = \mathrm{A}\mathbf{i}+\mathrm{B}\mathbf{j}+\Gamma\mathbf{k}$. Πράγματι, αν $\mathrm{P}_1(x_1, y_1, z_1)$ και $\mathrm{P}_2(x_2, y_2, z_2)$ είναι δύο τέτοια σημεία, δηλαδή

$$\mathrm{A}x_1 + \mathrm{B}y_1 + \Gamma z_1 + \Delta = 0, \quad \mathrm{A}x_2 + \mathrm{B}y_2 + \Gamma z_2 + \Delta = 0,$$

τότε

$$\mathrm{A}(x_2 - x_1) + \mathrm{B}(y_2 - y_1) + \Gamma(z_2 - z_1) = 0.$$

Η σχέση όμως αυτή είναι ισοδύναμη με την $\mathbf{n}\cdot\mathbf{P_1P_2} = 0$ και άρα $\mathbf{n}\perp\mathbf{P_1P_2}$. Άρα όλα τα σημεία του χώρου που οι συντεταγμένες τους ικανοποιούν την (2.13), σχηματίζουν με το P_1 διανύσματα που είναι κάθετα στο σταθερό διάνυσμα $\mathbf{n}$ και επομένως είναι συνεπίπεδα.

Αξιοσημείωτες περιπτώσεις

- Επίπεδα παράλληλα προς τα επίπεδα των συντεταγμένων.

    1. Το επίπεδο xOy περνά από την αρχή $\mathrm{O}(0, 0, 0)$ και είναι κάθετο στο διάνυσμα $\mathbf{n} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + \mathbf{k} = \mathbf{k}$. Άρα έχει εξίσωση $z = 0$.

2. Όμοια τα επίπεδα yOz, xOz έχουν εξισώσεις $x = 0$, $y = 0$ αντίστοιχα.
3. Γενικότερα, η εξίσωση $z = c$ παριστάνει επίπεδο που διέρχεται από το σημείο $(0, 0, c)$ και έχει κάθετο διάνυσμα το $\mathbf{k}$, δηλαδή είναι παράλληλο στο επίπεδο xOy (άρα κάθετο στον άξονα z′z). Όμοια οι εξισώσεις $x = c$, $y = d$ παριστάνουν επίπεδα παράλληλα προς τα yOz, xOz αντίστοιχα.

- Επίπεδα παράλληλα προς τους άξονες των συντεταγμένων.

1. Ένα επίπεδο που είναι παράλληλο προς τον άξονα z′z έχει κάθετο διάνυσμα της μορφής $\mathbf{n} = \mathrm{A}\mathbf{i}+\mathrm{B}\mathbf{j}+0\mathbf{k}$ και άρα εξίσωση της μορφής

$$\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Delta = 0,$$

όπου παρατηρούμε ότι απουσιάζει η μεταβλητή που αντιστοιχεί στον άξονα προς τον οποίο είναι παράλληλο.

2. Όμοια προκύπτουν οι εξισώσεις

$$\mathrm{B}y + \Gamma z + \Delta = 0, \quad \mathrm{A}x + \Gamma z + \Delta = 0$$

των επιπέδων που είναι παράλληλα προς τους άξονες x′x, y′y αντίστοιχα.

Παρατήρηση 2.2.1. Αν $\mathrm{AB}\Gamma\Delta \neq 0$ η εξίσωση (2.13) γράφεται :

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 1,$$

όπου $\alpha = -\frac{\Delta}{\mathrm{A}}$, $\beta = -\frac{\Delta}{\mathrm{B}}$, $\gamma = -\frac{\Delta}{\Gamma}$. Το αντίστοιχο επίπεδο τέμνει τους άξονες x′x, y′y, z′z στα σημεία

$$\mathrm{P}_1(\alpha, 0, 0), \quad P_2(0, \beta, 0), \quad P_3(0, 0, \gamma)$$

αντίστοιχα. Οι αριθμοί α, β, γ λέγονται **συντεταγμένες επί την αρχή** του επίπεδου.

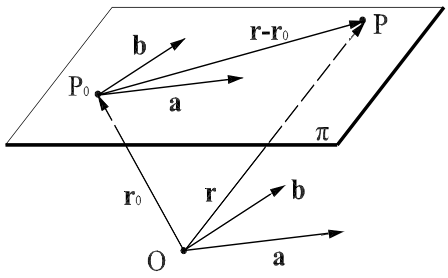
Παράδειγμα 2.2.1. Να βρεθεί η καρτεσιανή εξίσωση του επιπέδου που περνά από το σημείο $P_0(1,1,1)$ και είναι κάθετο στο διάνυσμα $\mathbf{r}=\mathbf{i}-2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$.
Είναι $\mathbf{r}_0=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ οπότε η (2.12) γράφεται:

$$(x-1)\cdot 1+(y-1)\cdot(-2)+(z-1)\cdot 3=0 \quad \text{ή} \quad x-2y+3z-2=0.$$

(ii) *Το επίπεδο διέρχεται από το σημείο* $P_0(\mathbf{r}_0)$ *και είναι παράλληλο προς τα μη συγγραμμικά διανύσματα* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ (σχήμα 2.3).
Στην περίπτωση αυτή τα διανύσματα $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ θα είναι συνεπίπεδα και άρα το μικτό τους γινόμενο θα είναι μηδέν:

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=0. \tag{2.14}$$

Η (2.14) προκύπτει από την εξίσωση (2.11) με $\mathbf{n}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}$.
Ισοδύναμα, μπορούμε να πούμε ότι υπάρχουν αριθμοί $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε



Σχήμα 2.3:

$$\mathbf{r}-\mathbf{r}_0=\kappa\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}, \quad \kappa,\lambda\in\mathbb{R}. \tag{2.15}$$

Η εξίσωση (2.15) λέγεται **διανυσματική παραμετρική εξίσωση** του επιπέδου.
Θεωρούμε ένα σύστημα συντεταγμένων με αρχή το O, ως προς το οποίο είναι $\mathbf{a}=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}$ και $\mathbf{b}=b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}$. Η εξίσωση (2.15) είναι ισοδύναμη με το σύστημα :

$$\begin{aligned} x&=x_0+\kappa a_1+\lambda b_1\\ y&=y_0+\kappa a_2+\lambda b_2 \quad \kappa,\lambda\in\mathbb{R}.\\ z&=z_0+\kappa a_3+\lambda b_3 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Οι εξισώσεις αυτές λέγονται **παραμετρικές εξισώσεις** του επιπέδου και για κάθε ζευγάρι $(\kappa,\lambda)\in\mathbb{R}^2$ δίνουν τις συντεταγμένες ενός σημείου του. Με τη βοήθεια της σχέσης (1.21) για το μικτό γινόμενο, η εξίσωση (2.14) γράφεται ισοδύναμα:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{2.17}$$

Αν αναπτύξουμε την ορίζουσα ως προς τα στοιχεία της πρώτης γραμμής, θα πάρουμε την καρτεσιανή εξίσωση του επιπέδου (Μορφή (2.12) ή (2.13)).

Παράδειγμα 2.2.2. Να βρεθεί η καρτεσιανή εξίσωση του επιπέδου που ορίζεται από τα σημεία $\mathrm{A}(1,1,0)$, $\mathrm{B}(0,0,-1/5)$, $\Gamma(2,0,-1)$.

Λύση. Τα σημεία $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma$ έχουν διανύσματα θέσης $\mathbf{a} = \mathbf{i}+\mathbf{j}+0\mathbf{k}$, $\quad \mathbf{b} = 0\mathbf{i}+0\mathbf{j}-\frac{1}{5}\mathbf{k}$, $\quad \mathbf{c} = 2\mathbf{i}+0\mathbf{j}-\mathbf{k}$, αντίστοιχα. Το επίπεδο περνά από το $\mathrm{A}(1,1,0)$ και είναι παράλληλο προς τα διανύσματα $\mathbf{b}-\mathbf{a} = -\mathbf{i}-\mathbf{j}-\frac{1}{5}\mathbf{k}$ και $\mathbf{c}-\mathbf{a} = \mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}$. Άρα από την (2.17) προκύπτει η εξίσωση:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ -1 & -1 & -\frac{1}{5} \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

και αναπτύσσοντας την ορίζουσα βρίσκουμε: $\quad 2\mathrm{x}-3\mathrm{y}+5\mathrm{z}+1=0$.

Παράδειγμα 2.2.3. Να βρεθεί το σημείο τομής της ευθείας $(\varepsilon): x-1 = y = z-3$ με το επίπεδο $(\pi): x+2y+z=16$.

Λύση **(1ος τρόπος)**. Το κοινό τους σημείο επαληθεύει συγχρόνως όλες τις παραπάνω εξισώσεις, άρα είναι η λύση του συστήματος $x-1=y$, $\quad y=z-3$, $\quad x+2y+z=16$, δηλαδή το $\mathrm{P}_0(x_0,y_0,z_0)$ με $x_0=4$, $y_0=3$, $z_0=6$.
(2ος τρόπος). Οι παραμετρικές εξισώσεις της (ε) είναι: $x=1+t$, $y=t$, $z=3+t$, $t\in\mathbb{R}$. Το σημείο τομής με το επίπεδο θα προκύψει από εκείνη την τιμή του t για την οποία το σημείο $\mathrm{P}(1+t,\ t,\ 3+t)$ της ευθείας θα ανήκει στο επίπεδο, δηλαδή $(1+t)+2t+(3+t)=16$. Από αυτή προκύπτει ότι $t=3$ και άρα το σημείο τομής είναι το $\mathrm{P}_0(4,3,6)$.

Παράδειγμα 2.2.4. Να δειχθεί ότι η ευθεία $\dfrac{x-1}{9} = \dfrac{y-6}{-4} = \dfrac{z-3}{-6}$ βρίσκεται στο επίπεδο $2x-3y+5z+1=0$.

Απόδειξη **(1ος τρόπος)**. Ονομάζοντας με t τους ίσους λόγους στις εξισώσεις της ευθείας, προκύπτουν οι παραμετρικές της εξισώσεις:

$$x = 1 + 9t,\ y = 6 - 4t,\ z = 3 - 6t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Αντικαθιστούμε τις συντεταγμένες αυτές του τυχαίου σημείου της ευθείας στην εξίσωση του επιπέδου, οπότε έχουμε: $2(1+9t)-3(6-4t)+5(3-6t)+1 = 0$. Η εξίσωση αυτή προφανώς αληθεύει για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Άρα όλα τα σημεία της ευθείας επαληθεύουν την εξίσωση του επίπεδου και επομένως η ευθεία βρίσκεται επάνω στο επίπεδο.

(2ος τρόπος). Το σημείο $\mathrm{P}(1,6,3)$ της ευθείας επαληθεύει την εξίσωση του επιπέδου. Άρα ευθεία και επίπεδο έχουν ένα κοινό σημείο. Επί πλέον το διάνυσμα $\mathbf{n} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, που είναι κάθετο στο επίπεδο και το διάνυσμα $\mathbf{u} = 9\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$, που είναι παράλληλο προς την ευθεία, είναι μεταξύ τους κάθετα αφού $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0$. Άρα η ευθεία είναι παράλληλη προς το επίπεδο και επομένως ανήκει σ' αυτό.

Παράδειγμα 2.2.5. Δίνεται το σημείο $\mathrm{P}(1,0,3)$ και το επίπεδο $(\pi) : x+y+z = 13$.

1. Να βρεθεί η προβολή $\mathrm{P}_0(x_0, y_0, z_0)$ του σημείου P στο επίπεδο (π).

2. Να βρεθεί το συμμετρικό $\mathrm{P}'(x', y', z')$ του σημείου P ως προς το επίπεδο (π).

Λύση **1.** Η προβολή $\mathrm{P}_0(x_0, y_0, z_0)$ του σημείου P στο επίπεδο (π), είναι το σημείο τομής του επιπέδου και της κάθετης ευθείας (δ) από το $\mathrm{P}(1,0,3)$ στο επίπεδο. Η ευθεία αυτή έχει παραμετρικές εξισώσεις $(\delta) : x = 1 + t,\ y = t,\ z = 3 + t,\ t \in \mathbb{R}$. Αντικαθιστώντας τα x, y, z της ευθείας στην εξίσωση του επιπέδου προκύπτει $t = 3$ και άρα το σημείο τομής της (δ) με το (π), δηλαδή η ζητούμενη προβολή, είναι το σημείο $\mathrm{P}_0(4,3,6)$.

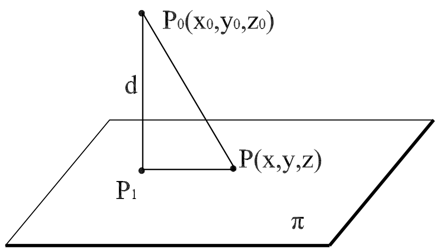
2. Το σημείο $\mathrm{P}_0(4,3,6)$ είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος PP', άρα:

$$\frac{x'+1}{2} = 4, \quad \frac{y'+0}{2} = 3, \quad \frac{z'+3}{2} = 6. \quad \text{Επομένως} \quad \mathrm{P}'(7,6,9).$$

2.3 Εφαρμογές και γενικά παραδείγματα

1. Απόσταση σημείου από επίπεδο.

Θεωρούμε ένα επίπεδο (π) : $\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma z+\Delta=0$ και ένα σημείο $\mathrm{P}_0(x_0,y_0,z_0)$ (σχήμα 2.4). Αν $\mathrm{P}(x,y,z)$ είναι τυχόν σημείο του επιπέδου, η απόσταση d του P_0 από το (π) είναι ίση με το μέτρο της προβολής του διανύσματος $\mathbf{P_0P}$ στη διεύθυνση του καθέτου διανύσματος $\mathbf{n}=\mathrm{A}\mathbf{i}+\mathrm{B}\mathbf{j}+\Gamma\mathbf{k}$ του επιπέδου (βλέπε σχέση (1.14)). Επομένως:



Σχήμα 2.4:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d} &= |\mathrm{Pr}_{\mathbf{n}}\mathbf{P_0P}| = \frac{|\mathbf{P}_0\mathbf{P}\cdot\mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} \\
&= \frac{|\mathrm{A}(x-x_0)+\mathrm{B}(y-y_0)+\Gamma(z-z_0)|}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\Gamma^2}} \\
&= \frac{|\mathrm{A}x_0+\mathrm{B}y_0+\Gamma z_0-(\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma z)|}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\Gamma^2}}
\end{aligned}
$$

και άρα

$$\mathrm{d}=\frac{|\mathrm{A}x_0+\mathrm{B}y_0+\Gamma z_0+\Delta|}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\Gamma^2}}. \tag{2.18}$$

2. Κοινή κάθετη και ελάχιστη απόσταση ασύμβατων ευθειών.

Δίνονται οι ευθείες: $(\varepsilon_1):\frac{x}{2}=\frac{y-1}{3}=z$ και $(\varepsilon_2):x-1=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$.

α) Να αποδειχθεί ότι είναι ασύμβατες.

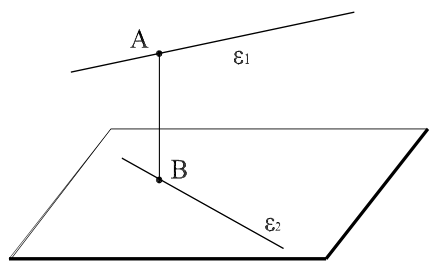
β) Να βρεθεί η εξίσωση της κοινής κάθετης και η ελάχιστη απόστασή τους (σχήμα 2.5).

Λύση. **α)** Θα δείξουμε ότι οι ευθείες δεν είναι παράλληλες και δεν τέμνονται. Αν ήταν παράλληλες θα υπήρχε $\lambda\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\mathbf{u}_1=(2,3,1)=\lambda(1,2,3)=\lambda\mathbf{u}_2$, όπου $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2$ είναι αντίστοιχα τα διανύσματα προς τα οποία είναι παράλληλες οι ευθείες (ε_1) και (ε_2). Αυτό όμως είναι αδύνατο. Επίσης δεν τέμνονται διότι το σύστημα των τεσσάρων εξισώσεων που περιγράφουν τις δύο ευθείες είναι αδύνατο. Άρα οι ευθείες είναι ασύμβατες.

β) Οι παραμετρικές εξισώσεις της (ε_1) είναι $x = 2t,\ y = 1+3t,\ z = t \quad t \in \mathbb{R}$ και της $(\varepsilon_2) : \ x = 1+\lambda,\ y = 2\lambda,\ z = 3\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}$.

Άρα το τυχόν σημείο της (ε_1) έχει μορφή $A(2t,\ 1+3t, t), \quad t \in \mathbb{R}$ και της $(\varepsilon_2)\ :\ B(1+\lambda,\ 2\lambda,\ 3\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}$. Η κοινή κάθετη θα προκύψει από την απαίτηση το διάνυσμα $\mathbf{AB}$ να είναι κάθετο και στις δύο ευθείες. Ισοδύναμα:

$$\mathbf{AB} \cdot \mathbf{u}_1 = 0, \quad \mathbf{AB} \cdot \mathbf{u}_2 = 0.$$

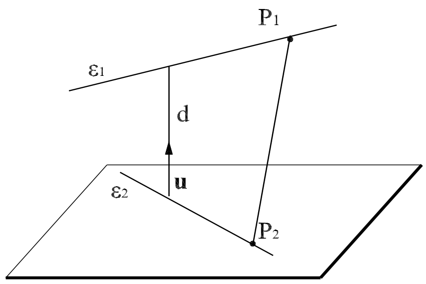


Σχήμα 2.5:

Επειδή $\mathbf{AB} = (1+\lambda-2t)\mathbf{i} + (2\lambda - 3t - 1)\mathbf{j} + (3\lambda - t)\mathbf{k}$, οι προηγούμενες σχέσεις ισοδυναμούν με το σύστημα: $11\lambda - 14t = 1, \quad 14\lambda - 11t = 1,$

από όπου προκύπτει $t = -\dfrac{1}{25},\ \lambda = \dfrac{1}{25}$. Άρα τα σημεία των δύο ευθειών από τα οποία περνά η κοινή κάθετή τους είναι τα

$$A(-\frac{2}{25}, \frac{22}{25}, -\frac{1}{25}),\ B(\frac{26}{25}, \frac{2}{25}, \frac{3}{25}).$$



Σχήμα 2.6:

Η κοινή κάθετη (δ) διέρχεται από το A και είναι παράλληλη στο $\mathbf{AB} = \frac{4}{25}(7\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + \mathbf{k})$, ισοδύναμα προς το $\mathbf{u} = 7\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Επομένως η (δ) έχει εξίσωση:

$$\frac{x + \frac{2}{25}}{7} = \frac{y - \frac{22}{25}}{-5} = z + \frac{1}{25}.$$

Η ελάχιστη απόσταση των δύο ευθειών είναι $\mathrm{d} = |\mathbf{AB}| = \frac{\sqrt{1200}}{25} = \frac{4\sqrt{3}}{5}$.

Η απόσταση d μπορεί να βρεθεί και διαφορετικά: Η d είναι ίση με το μέτρο της προβολής του διανύσματος $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$, όπου P_1 και P_2 δύο σημεία των ευθειών

(ε_1) και (ε_2) αντίστοιχα, επάνω στο διάνυσμα που είναι κάθετο προς τις ευθείες (σχήμα 2.6). Ένα διάνυσμα κάθετο προς τις ευθείες είναι το $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2$, όπου τα διανύσματα $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ είναι παράλληλα προς τις ευθείες (ε_1) και (ε_2) αντίστοιχα. Είναι $\mathbf{u}_1 = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{u}_2 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ και $\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 = 7\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Τα σημεία $\mathrm{P}_1(0,1,0)$ και $\mathrm{P}_2(1,0,0)$ ανήκουν στις ευθείες (ε_1) και (ε_2) αντίστοιχα. Άρα $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{i} - \mathbf{j}$ και $\mathrm{d} = \dfrac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2|}{|\mathbf{u}|} = \dfrac{4\sqrt{3}}{5}$.

3. Η ευθεία ως τομή δύο επιπέδων.

Θεωρούμε δύο επίπεδα

$$\mathrm{A}_1 x + \mathrm{B}_1 y + \Gamma_1 z + \Delta_1 = 0, \quad \mathrm{A}_2 x + \mathrm{B}_2 y + \Gamma_2 z + \Delta_2 = 0$$

με κάθετα διανύσματα $\mathbf{n}_1 = \mathrm{A}_1\mathbf{i} + \mathrm{B}_1\mathbf{j} + \Gamma_1\mathbf{k}$ και $\mathbf{n}_2 = \mathrm{A}_2\mathbf{i} + \mathrm{B}_2\mathbf{j} + \Gamma_2\mathbf{k}$ αντίστοιχα. Τα επίπεδα αυτά τέμνονται αν και μόνο αν τα $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ δεν είναι παράλληλα, ισοδύναμα αν $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 \neq \mathbf{0}$.

Όταν τα επίπεδα τέμνονται ορίζουν μία ευθεία, την τομή τους, η οποία περιγράφεται πλήρως από τις δύο εξισώσεις των επιπέδων (είναι το σύνολο των σημείων $\mathrm{P}(x,y,z)$ του χώρου που ικανοποιούν συγχρόνως και τις δυο εξισώσεις). Έτσι μία ευθεία (ε) μπορεί να δοθεί και ως

$$(\varepsilon): \quad \mathrm{A}_1 x + \mathrm{B}_1 y + \Gamma_1 z + \Delta_1 = 0, \quad \mathrm{A}_2 x + \mathrm{B}_2 y + \Gamma_2 z + \Delta_2 = 0.$$

Παρατηρούμε ότι η ευθεία αυτή είναι ορθογώνια προς το $\mathbf{n}_1$, αφού ανήκει στο (π_1) και ορθογώνια προς το $\mathbf{n}_2$, αφού ανήκει στο (π_2). Άρα είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\mathbf{u} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$. Επομένως για τον προσδιορισμό των αναλυτικών εξισώσεών της αρκεί η εύρεση ενός σημείου που ικανοποιεί τις εξισώσεις των (π_1) και (π_2). Εναλλακτικά, μπορεί κανείς να βρει τις παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας, αν ορίσει κατάλληλα μία από τις μεταβλητές ως παράμετρο και κατόπιν από τις δύο εξισώσεις των επιπέδων να προσδιορίσει τις άλλες δυο μεταβλητές συναρτήσει της παραμέτρου. Οι μέθοδοι αυτοί φαίνονται στο παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα 2.3.1. Δίνονται τα επίπεδα (π_1): $x - y + z = 1$ και (π_2): $2x - y - z = 2$.

i) Να δειχθεί ότι τέμνονται και να βρεθούν οι καρτεσιανές και οι παραμετρικές εξισώσεις της τομής τους (ε).
ii) Να παρασταθεί η (ε) ως τομή δύο άλλων επιπέδων: (π_1') παράλληλο στο άξονα z′z και (π_2') παράλληλο στο άξονα y′y.

Λύση. **i) (1ος τρόπος).** Τα επίπεδα τέμνονται διότι $\mathbf{u} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = (2, 3, 1) \neq \mathbf{0}$. Ένα διάνυσμα παράλληλο στη ζητούμενη ευθεία είναι το $\mathbf{u}$, ενώ ένα σημείο που ανήκει και στα δύο επίπεδα και άρα στην (ε) είναι το $\mathrm{P}_0(1, 0, 0)$. Επομένως οι καρτεσιανές της εξισώσεις είναι

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = z.$$

Αν χρησιμοποιήσουμε άλλο σημείο π.χ. το $\mathrm{P}(3, 3, 1)$ προκύπτουν οι

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{3} = z - 1,$$

που είναι ένα άλλο ζευγάρι εξισώσεων για την ίδια ευθεία.
Για την εύρεση των παραμετρικών εξισώσεων αρκεί, κατά τα γνωστά, να θέσουμε τους ίσους λόγους ίσον με t.
(2ος τρόπος). Θέτουμε $z = t$ οπότε το σύστημα των εξισώσεων των επιπέδων γράφεται: $x - y = 1 - t,\ 2x - y = 2 + t$. Οι λύσεις του είναι $x = 1 + 2t,\ y = 3t,\ z = t,\ t \in \mathbb{R}$, που αποτελούν τις παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας. Η μοναδικότητα της λύσης του τελευταίου συστήματος οφείλεται στο ότι η ορίζουσα του πίνακα των συντελεστών των μεταβλητών του πρώτου μέλους είναι μη μηδενική. Ένα τέτοιο σύστημα μπορεί πάντα να προκύψει από το αρχικό, θέτοντας κατάλληλα ως παράμετρο μία από τις μεταβλητές, αφού μία τουλάχιστον 2×2 ορίζουσα (συνιστώσα του $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$) είναι μη μηδενική.
ii) Απαλείφοντας διαδοχικά το z και το y προκύπτει το ισοδύναμο σύστημα: $3x - 2y = 3, \quad x - 2z = 1$. Η πρώτη εξίσωση περιγράφει επίπεδο (π_1') παράλληλο στον άξονα z′z και η δεύτερη επίπεδο (π_2') παράλληλο στον άξονα y′y.

4. Η εξίσωση $Ax + By = \Gamma$ στο επίπεδο.

Ένα σύστημα συντεταγμένων $\{\mathrm{O}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ στο χώρο ορίζει ένα σύστημα συντεταγμένων $\{\mathrm{O}, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ στο επίπεδο $x\mathrm{O}y$. Μία ευθεία (ε) του επιπέδου $x\mathrm{O}y$

με εξίσωση ως προς το $\{\mathrm{O}, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ την $Ax + By = \Gamma$ (βλέπε παρατήρηση 2.1.2) παριστάνεται στον χώρο από τις εξισώσεις

$$Ax + By = \Gamma, \quad z = 0,$$

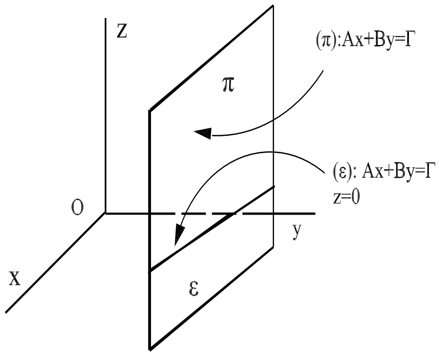
δηλαδή ως τομή του επιπέδου xOy με το επίπεδο $Ax + By = \Gamma$ που είναι κάθετο σ' αυτό (σχήμα 2.7)).

5. Προβολή ευθείας σε επίπεδο.

Η προβολή μίας ευθείας (ε) σε ένα επίπεδο (π) είναι μία ευθεία (ε') του επιπέδου (π) που κάθε σημείο της είναι η προβολή κάποιου σημείου της (ε). Επομένως η (ε') μπορεί να προκύψει με έναν από τους ακόλουθους τρόπους:

(i) Από τις προβολές δύο τυχαίων σημείων της (ε) στο (π).

(ii) Ως τομή του επιπέδου (π) με το προβάλλον επίπεδο (π_1) (το επίπεδο που περιέχει την (ε) και είναι κάθετο στο (π)).



Σχήμα 2.7:

Παράδειγμα 2.3.2. Να βρεθεί η προβολή της ευθείας (ε): $\dfrac{x-1}{2} = y-2 = z$ στο επίπεδο (π): $2x - y + z - 1 = 0$.

Λύση. **(1ος τρόπος).** Δύο τυχαία σημεία της (ε) είναι: $\mathrm{P}_1(1,2,0)$, $\mathrm{P}_2(3,3,1)$. Οι ευθείες (δ_1), (δ_2) που διέρχονται από τα P_1 και P_2 αντίστοιχα και είναι κάθετες στο (π) (σχήμα 2.8), θα είναι παράλληλες προς το κάθετο διάνυσμα $\mathbf{n} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ του επιπέδου. Άρα οι παραμετρικές εξισώσεις τους είναι:

$$\begin{aligned}
(\delta_1) &: \ x = 1 + 2t, \ y = 2 - t, \ z = t, \ t \in \mathbb{R}, \\
(\delta_2) &: \ x = 3 + 2\lambda, \ y = 3 - \lambda, \ z = 1 + \lambda, \ \lambda \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τα x, y, z, κάθε μίας από αυτές, στην εξίσωση του επιπέδου, προκύπτει: $t = \frac{1}{6}$, $\lambda = -\frac{1}{2}$. Επομένως οι προβολές των P_1, P_2 είναι:

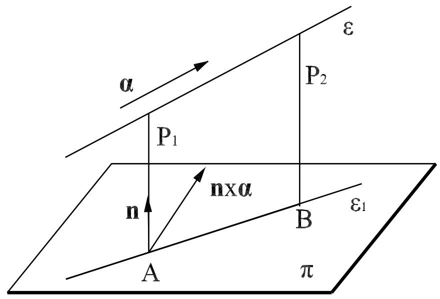
$$\mathrm{A}(\frac{4}{3}, \frac{11}{6}, \frac{1}{6}) \quad \text{και} \quad \mathrm{B}(2, \frac{7}{2}, \frac{1}{2}).$$

Η ζητούμενη προβολή ορίζεται από τα A, B και άρα έχει εξισώσεις:

$$\frac{x - 4/3}{2 - 4/3} = \frac{y - 11/6}{7/2 - 11/6} = \frac{z - 1/6}{1/2 - 1/6},$$

ισοδύναμα: $\frac{1}{2}(x - \frac{4}{3}) = \frac{1}{5}(y - \frac{11}{6}) = z - \frac{1}{6}$.

(2ος τρόπος). Η προβολή της ευθείας (ε) είναι η τομή του επιπέδου (π) με το προβάλλον επίπεδο (π_1). Το επίπεδο (π_1) όμως είναι παράλληλο προς το κάθετο διάνυσμα $\mathbf{n} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ του (π) και προς το παράλληλλο προς την ευθεία (ε) διάνυσμα $\boldsymbol{\alpha} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Άρα ένα διάνυσμα κάθετο σ' αυτό είναι το $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n} \times \boldsymbol{\alpha} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{k}$. Ένα σημείο του είναι ένα οποιοδήποτε σημείο της (ε) π.χ. το $\mathrm{P}_1(1, 2, 0)$. Επομένως έχει εξίσωση την $(-2)(x - 1) + 0(y - 2)0 + 4(z - 0) = 0$ ισοδύναμα $2x - 4z = 2$. Άρα η προβολή της (ε) στο (π) είναι η τομή των (π), (π_1): $2x - y + z - 1 = 0$, $2x - 4z = 2$.



Σχήμα 2.8:

6. Επίπεδο οριζόμενο από δύο παράλληλες ευθείες.

Δύο παράλληλες ευθείες προς ένα διάνυσμα $\mathbf{u}$, ορίζουν ένα επίπεδο. Το επίπεδο αυτό είναι παράλληλο προς τα διανύσματα $\mathbf{u}$, $\mathbf{AB}$, όπου A, B δύο σημεία των ευθειών (ε_1), (ε_2) αντίστοιχα και διέρχεται από τα σημεία A, B.

Παράδειγμα 2.3.3. Δίνονται οι ευθείες: $(\varepsilon_1): \ x - 1 = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{5}$ και $(\varepsilon_2): \ x - 2y + z + 1 = 0, \quad 2x + y - z - 2 = 0$. Να αποδειχθεί ότι είναι παράλληλες και να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που ορίζουν.

Λύση. Οι εξισώσεις της (ε_2) γράφονται $\dfrac{x-0}{1}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z+3}{5}$. Άρα η (ε_2) είναι παράλληλη προς το $\mathbf{u}=\mathbf{i}+3\mathbf{j}+5\mathbf{k}$ και επομένως και προς την (ε_1). Έστω $\mathrm{A}(1,0,2)$ ένα σημείο της (ε_1) και $B(0,-1,-3)$ ένα σημείο της (ε_2). Τότε το ζητούμενο επίπεδο είναι παράλληλο προς τα διανύσματα $\mathbf{AB}=-\mathbf{i}-\mathbf{j}-5\mathbf{k}$, $\mathbf{u}=\mathbf{i}+3\mathbf{j}+5\mathbf{k}$ και διέρχεται π.χ. από το Α. Άρα έχει εξίσωση:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & -1 & -5 \end{vmatrix}=0, \quad \text{ή} \quad 5x-z-3=0.$$

2.4 Ασκήσεις

1. Να αποδειχθεί ότι τα παρακάτω συστήματα εξισώσεων παριστάνουν την ίδια ευθεία:

$a)$ $x+y-z+1=0,\quad 2x+3y-1=0,\quad$ $b)$ $\frac{x+1}{3}=\frac{1-y}{2}=z-1,$

$c)$ $x=2+3t,\ y=-1-2t,\ z=2+t,\quad t\in\mathbb{R}.$

2. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που περνά από το συμμετρικό σημείο P' του σημείου $\mathrm{P}(1,0,-2)$ ως προς το επίπεδο $x-2y+3z+1=0$ και είναι παράλληλη προς την ευθεία που περνά από τα σημεία $\mathrm{A}(2,3,5)$, $\mathrm{B}(0,1,-2)$.

3. Να βρεθούν οι παραμετρικές εξισώσεις του επιπέδου που περνά από το σημείο τομής των ευθειών $(\varepsilon_1):\ \frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{2}=z,\quad (\varepsilon_2):\ \frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{3}=z-1,$ και περιέχει την ευθεία $(\varepsilon):\ 2x+y-z=1,\ x-2y+z=2.$

4. Να βρεθεί η κοινή κάθετη και η ελάχιστη απόσταση των ασυμβάτων ευθειών: $(\varepsilon_1):\ x-1=\frac{y-9}{-2}=z-5,\ (\varepsilon_2):\ \frac{x-6}{7}=\frac{y+7}{-6}=z.$

5. Να βρεθούν οι καρτεσιανές και οι παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας που είναι τομή των επιπέδων: $(\pi_1):\ 6x+y-z+2=0,\quad (\pi_2):\ 2x-y-3z-14=0.$

6. Να υπολογισθεί ο όγκος του τετραέδρου με έδρες τα τρία επίπεδα των συντεταγμένων και το επίπεδο $2x+y+z-1=0$.

7. Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που είναι κάθετο στο μέσον του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ με $\mathrm{A}(4,3,1)$, $\mathrm{B}(2,5,3)$.

8. Να βρεθεί η απόσταση των παραλλήλων επιπέδων $3x-2y+7z-9=0$, $6x-4y+14z-13=0$.

9. Να βρεθεί η οξεία γωνία των επιπέδων $x + z + 1 = 0,\ y + z + 3 = 0.$

10. Να βρεθούν οι εξισώσεις της προβολής της ευθείας $x = 4 + 3t,\ y = -1 - 2t,\ z = 4t,\ \ t \in \mathbb{R}$ στο επίπεδο $x - 3y - z + 8 = 0.$

11. Να βρεθεί η απόσταση του σημείου $\mathrm{P}_0(1, 2, -1)$ από την ευθεία που περνά από τα σημεία $\mathrm{A}(2, -1, 4),\ \mathrm{B}(3, 1, 6).$

12. Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που ορίζεται από τις ευθείες

$$(\varepsilon_1):\ x = 1 + 2t,\ y = 4 + t,\ z = 5 + 2t, \quad t \in \mathbb{R},$$
$$(\varepsilon_2):\ x = 2 - \lambda,\ y = 8 + 3\lambda,\ z = 11 + 4\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

13. Να βρεθούν οι αναλυτικές και οι παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας που περνά από το σημείο $\mathrm{P}_0(3, -2, -4)$, είναι παράλληλη προς το επίπεδο $3x - 2y - 3z - 7 = 0$ και τέμνει την ευθεία $x = 5 + 6t,\ y = -6 - 4t,\ z = 3 + 4t, \quad t \in \mathbb{R}.$

14. Να αποδειχθεί ότι η απόσταση μεταξύ των δύο ασύμβατων ευθειών (ε_1) : $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{u}_1, \quad (\varepsilon_2):\ \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + m\mathbf{u}_2$ δίνεται από τον τύπο

$$\mathrm{d} = \frac{|(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \cdot (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2)|}{|\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2|}.$$

15. Να αποδειχθεί ότι αν δύο ευθείες $(\varepsilon_1)\ :\ \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{u}_1, \quad (\varepsilon_2)\ :\ \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + m\mathbf{u}_2$ τέμνονται τότε $(\mathbf{u}_2\,\mathbf{r}_2\,\mathbf{u}_1) = (\mathbf{u}_2\,\mathbf{r}_1\,\mathbf{u}_1)$ και αν $(\mathbf{r}_1\,\mathbf{u}_1\,\mathbf{u}_2) \neq 0$, τότε το σημείο τομής P_0 έχει διάνυσμα θέσης το

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_1 + \frac{(\mathbf{r}_1\,\mathbf{r}_2\,\mathbf{u}_2)}{(\mathbf{r}_1\,\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2)}\mathbf{u}_1.$$

16. Να δειχθεί ότι η αναλυτική εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από τρία δεδομένα μη συνευθειακά σημεία $A_i(x_i, y_i, z_i),\ i = 1, 2, 3$ είναι η

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}.$$

17. Να δειχθεί ότι στο παράδειγμα 2.3.2 το διάνυσμα $\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\alpha})$ (βλέπε σχήμα 2.8) είναι παράλληλο προς την προβολή (ε_1) και να βρεθεί το σημείο τομής της (ε) με το επίπεδο (π). Στη συνέχεια να βρεθούν οι εξισώσεις της προβολής (ε_1).