Ν. ΚΑΔΙΑΝΑΚΗΣ
Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Σ. ΚΑΡΑΝΑΣΙΟΣ
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΚΑΙ

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Έκδοση 5η

ΑΘΗΝΑ 2011

Κάθε γνήσιο αντίτυπο έχει την ιδιόχειρη υπογραφή των συγγραφέων.

ISBN 960-91725-0-4

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η Γραμμική Άλγεβρα αποτελεί το απαραίτητο υπόβαθρο για τη μελέτη πλήθους προβλημάτων από τα Μαθηματικά, τη Φυσική, τη Μηχανική αλλά και τις Κοινωνικές επιστήμες. Περιοχές στα Μαθηματικά όπως για παράδειγμα αυτή των Διαφορικών Εξισώσεων, της Στατιστικής, της Ανάλυσης και της Διαφορικής Γεωμετρίας, προϋποθέτουν μία πολύ καλή γνώση των εννοιών και των μεθόδων της. Επίσης, στη Φυσική (Θεωρία της Σχετικότητας, Κβαντομηχανική), στην Τεχνολογία (Θεωρία κυκλωμάτων, Θεωρία σημάτων, Γραφικά Υπολογιστών, Μηχανική Συνεχούς Μέσου), στα Οικονομικά και την Οικολογία (Γραμμικός Προγραμματισμός, Διακριτά Δυναμικά Συστήματα), είναι μόνο μερικά παραδείγματα εφαρμογής των μεθόδων της Γραμμικής Άλγεβρας.

Ο Διανυσματικός Λογισμός και η Αναλυτική Γεωμετρία, μολονότι φαινομενικά διαφορετικά αντικείμενα από τη Γραμμική Άλγεβρα, είναι μία καλή και παιδαγωγικά ορθή αφετηρία για την εισαγωγή των εννοιών της. Επιπλέον και από μόνα τους τα αντικείμενα αυτά είναι απαραίτητα για τα μαθήματα της Ανάλυσης, της Φυσικής και της Μηχανικής. Το Βιβλίο μπορεί να χωρισθεί σε τέσσερις διδακτικές ενότητες:

1. Στην πρώτη ενότητα (Κεφάλαια 1- 4) αναπτύσσεται ο Διανυσματικός Λογισμός και η Αναλυτική Γεωμετρία. Αφού αναπτυχθεί ο Διανυσματικός Λογισμός (Κεφάλαιο 1), χρησιμοποιείται στην μελέτη της Αναλυτικής Γεωμετρίας ευθειών και επιπέδων (Κεφάλαιο 2). Στη συνέχεια αναπτύσσεται η θεωρία των καμπύλων στο επίπεδο και των γραφικών τους παραστάσεων (Κεφάλαιο 3), και κατόπιν η θεωρία των καμπύλων και επιφανειών του χώρου (Κεφάλαιο 4).

2. Στη δεύτερη ενότητα (Κεφάλαια 5,6 και 7) αναπτύσσεται κυρίως το λογιστικό μέρος της Γραμμικής Άλγεβρας με τη μελέτη των Πινάκων (Κεφάλαιο 5), των Οριζουσών (Κεφάλαιο 6) και την επίλυση των Γραμμικών Συστημάτων αναπτύσσοντας τις μεθόδους Gauss και Crammer (Κεφάλαιο 7).

3. Στην τρίτη ενότητα (Κεφάλαια 8 - 14 και Κεφάλαια 16 και 17) εκτίθεται το πιο βασικό μέρος της Γραμμικής Άλγεβρας με τη συστηματική μελέτη της κεντρικής έννοιας του Διανυσματικού χώρου και των εννοιών που σχετίζονται μ΄ αυτήν (Κεφάλαιο 8, 12), των Γραμμικών Απεικονίσεων (Κεφάλαιο 9), αλλά και του βαθμού πίνακα (Κεφάλαιο 11). Η θεωρία των Χαρακτηριστικών ποσών (Κεφάλαιο 13) και των Τετραγωνικών Μορφών (Κεφάλαιο 14), αποτελεί το κατ΄ εξοχήν εφαρμόσιμο μέρος της Γραμμικής Άλγεβρας. Το κεφάλαιο 16 των αναλλοίωτων υπόχωρων περιέχει ότι απαιτείται για τη μελέτη των κανονικών μορφών γραμμικών απεικονίσεων και πινάκων (π.χ. κανονική μορφή Jordan) η οποία και γίνεται στο κεφάλαιο 17. Τα δύο αυτά κεφάλαια αντιμετωπίζουν το πρόβλημα της εύρεσης της απλούστερης δυνατής μορφής πινάκων που δεν είναι διαγωνοποιήσιμοι. Πολλά από τα παραδείγματα στην 3η ενότητα προέρχονται από την Αναλυτική Γεωμετρία που προηγήθηκε, αναδεικνύοντας έτσι τον Γεωμετρικό χαρακτήρα της Γραμμικής Άλγεβρας. Ιδιαίτερα αυτό μπορεί να λεχθεί για ολόκληρο το κεφάλαιο 10 που αναφέρεται στους Γεωμετρικούς μετασχηματισμούς και τις εφαρμογές τους στα γραφικά υπολογιστών. Επίσης, γίνεται προσπάθεια για μία συστηματική σύνδεση ακόμα και των πιο θεωρητικών εννοιών με συγκεκριμένες εφαρμογές από διάφορα επιστημονικά πεδία.

4. Στην τέταρτη ενότητα (Κεφάλαιο 15) αναπτύσσονται συγκεκριμένες εφαρμογές της Γραμμικής Άλγεβρας. Στο 1ο Μέρος γίνεται ταξινόμηση των καμπύλων και των επιφανειών 2ου βαθμού. Στο 2ο Μέρος γίνεται μία εφαρμογή των μεθόδων της Γραμμικής Άλγεβρας στη Μηχανική, αρχικά στην Κινηματική του στερεού και στη συνέχεια του στη Μηχανική του Συνεχούς Μέσου. Στο 3ο Μέρος γίνεται μία εισαγωγή στα Διακριτά Δυναμικά Συστήματα και τις εξισώσεις διαφορών παρουσιάζοντας μαθηματικά πρότυπα από την Οικολογία και τη Θεωρία Ψηφιακών Σημάτων.

Στο Παράρτημα (Κεφάλαιο 18) στο τέλος του βιβλίου έχουν παρατεθεί κάποιες αποδείξεις θεωρημάτων που δεν έγιναν στην κανονική ροή του κειμένου για παιδαγωγικούς λόγους καθώς και βασικές έννοιες από τις Αλγεβρικές Δομές.

Ευχαριστούμε θερμά τον Καθηγητή κ. Κ. Λασκαρίδη και την Αν. Καθηγήτρια κα. Σ. Λαμπροπούλου για τις χρήσιμες υποδείξεις και παρατηρήσεις τους στην 1η έκδοση του βιβλίου αυτού. Επίσης, ευχαριστούμε πολύ τους πρωτοετείς φοιτητές των Σχολών " Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών" και " Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών", του ακ. έτους 2001-02, που βοήθησαν στην εύρεση διαφόρων παροραμάτων.

Οι συγγραφείς — Αθήνα Οκτώβριος, 2002

ΠΡΟΛΟΓΟΣ 5ης Έκδοσης

Στην έκδοση αυτή, έχουν γίνει ορισμένες προσθήκες στη θεωρία, έχουν διορθωθεί παροράματα προηγουμένων εκδόσεων και έχουν προστεθεί ασκήσεις στα Κεφάλαια τέσσερα, πέντε, έξι και επτά.

Οι συγγραφείς — Αθήνα Οκτώβριος, 2011

Περιεχόμενα

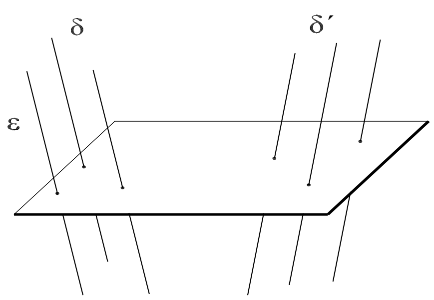
Κεφάλαιο 1

Διανυσματικός Λογισμός

1.1 Εφαρμοστά διανύσματα

Με τον όρο «εποπτικός χώρος» εννοούμε τον συνήθη χώρο $\mathcal{E}$ των σημείων της «εποπτείας» μας μαζί με την Ευκλείδεια Γεωμετρία του.

Θα λέμε ότι δύο ευθείες έχουν **ίδια διεύθυνση** αν είναι παράλληλες ή συμπίπτουν. Το σύνολο δ όλων των παραλλήλων ευθειών προς μία δεδομένη ευθεία (ε) θα λέγεται **διεύθυνση** της ευθείας (ε). Συνήθως όμως η διεύθυνση περιγράφεται μόνο από ένα στοιχείο του συνόλου αυτού, δηλαδή την (ε) ή οποιαδήποτε άλλη παράλληλη προς την (ε) ευθεία. Στο σχήμα 1.1 βλέπουμε δύο διαφορετικές διευθύνσεις δ και δ' (Τα επίπεδα που εμφανίζονται στο σχήμα όπως και στα επόμενα σχήματα της παραγράφου είναι για λόγους προοπτικής).



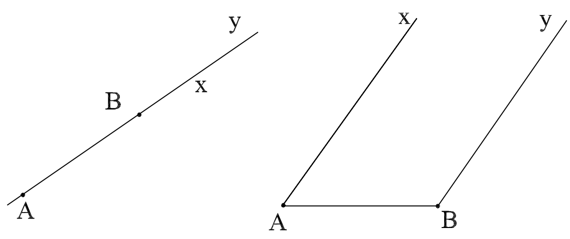
Σχήμα 1.1:

Διεύθυνση μίας ημιευθείας Αx ή ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, θα λέγεται η διεύθυνση της ευθείας στην οποία ανήκει.

Θεωρούμε το σύνολο των ημιευθειών με μία ορισμένη διεύθυνση. Θα λέμε ότι δύο ημιευθείες έχουν την **ίδια φορά** αν και μόνο αν οι ημιευθείες Ax, By : **α)** ανήκουν ή στην ίδια ευθεία και η μία περιέχει την άλλη ή **β)** ανήκουν σε δύο διαφορετικές ευθείες και βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο με ακμή το ευθύγραμμο τμήμα AB (σχήμα 1.2).

Το σύνολο ϕ των ημιευθειών που έχουν την ίδια φορά προς μία δεδομένη ημιευθεία Ax θα λέγεται **φορά της ημιευθείας** Ax. Συνήθως η φορά δίνεται μέσω μίας ημιευθείας του συνόλου αυτού.

Αν για τις ημιευθείες Ax και By του ορισμού, στην μεν περίπτωση α) η μία δεν περιέχει την άλλη και στην περίπτωση β) δεν βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο με ακμή το AB, θα λέμε ότι έχουν **αντίθετη φορά**. Ένα διατεταγμένο ζευ-

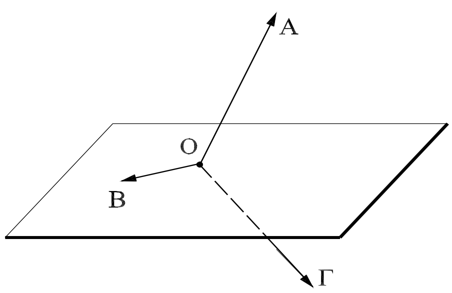


Σχήμα 1.2: Φορά ημιευθειών

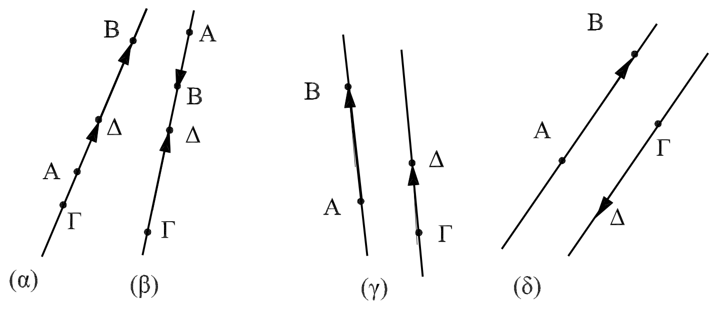
γάρι (A, B) σημείων του $\mathcal{E}$ ορίζει ένα ευθύγραμμο τμήμα AB με καθορισμένη αρχή A και πέρας B. Ένα τέτοιο ευθύγραμμο τμήμα θα λέγεται **εφαρμοστό διάνυσμα** με αρχή το A και πέρας το B ή εφαρμοστό διάνυσμα με σημείο εφαρμογής το A. Ένα εφαρμοστό διάνυσμα στο σημείο A συμβολίζεται με $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ ή $\mathbf{AB}$ και γραφικά παριστάνεται, με ένα βέλος με αρχή το A και πέρας το B. Ονομάζουμε **διεύθυνση** και **φορά** του διανύσματος $\mathbf{AB}$, τη διεύθυνση και τη φορά αντίστοιχα της ημιευθείας AB. Η ευθεία που περιέχει το ευθύγραμμο τμήμα AB λέγεται **φορέας** του διανύσματος $\mathbf{AB}$. Το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος AB, ως προς μία μονάδα μήκους, λέγεται **μέτρο ή μήκος** του διανύσματος $\mathbf{AB}$, ως προς τη μονάδα αυτή και συμβολίζεται με $|\mathbf{AB}|$. Το $\mathbf{AB}$ θα λέγεται **μοναδιαίο διάνυσμα** αν $|\mathbf{AB}| = 1$. Για κάθε σημείο A το διάνυσμα

ΑΑ λέγεται **μηδενικό εφαρμοστό διάνυσμα** στο Α. Ένα μηδενικό εφαρμοστό διάνυσμα έχει μέτρο μηδέν, ενώ η διεύθυνση και η φορά του δεν είναι μονοσήμαντα καθορισμένες. Έτσι το μηδενικό διάνυσμα **ΑΑ** βρίσκεται επάνω σε κάθε ευθεία που περνά από το Α. Το σύνολο των εφαρμοστών διανυσμάτων σε ένα σημείο Ο του $\mathcal{E}$ θα το συμβολίζουμε με $\mathcal{D}_0$ (σχήμα 1.3).

Θεωρούμε ένα σταθερό σημείο Ο του $\mathcal{E}$. Είναι φανερό ότι σε κάθε σημείο Α του $\mathcal{E}$ αντιστοιχεί ακριβώς ένα διάνυσμα του $\mathcal{D}_0$, το **ΟΑ**. Αντιστρόφως σε κάθε διάνυσμα του $\mathcal{D}_0$ αντιστοιχεί ακριβώς ένα σημείο του $\mathcal{E}$, το πέρας του διανύσματος. Στο σημείο Ο του $\mathcal{E}$ αντιστοιχεί το μηδενικό διάνυσμα. Υπάρχει επομένως, μία αμφιμονοσήμαντη και επί απεικόνιση η οποία σε κάθε σημείο A του $\mathcal{E}$ αντιστοιχίζει το διάνυσμα **ΟΑ** του $\mathcal{D}_0$ και αντιστρόφως. Το διάνυσμα **ΟΑ** λέγεται συνήθως **διάνυσμα θέσης** ή **διανυσματική ακτίνα** του σημείου Α. Δύο εφαρμοστά διανύσματα που έχουν την ίδια διεύθυνση λέγονται **συγγραμμικά** αν βρίσκονται επάνω στην ίδια ευθεία (σχήμα 1.4(α),(β)) ή **παράλληλα** αν βρίσκονται επάνω σε παράλληλες ευθείες (σχήμα 1.4(γ),(δ)). Αν τα διανύσματα **ΑΒ** και **ΓΔ** είναι παράλληλα θα γράφουμε **ΑΒ**//**ΓΔ**. Ειδικότερα, δύο παράλληλα ή συγ-



Σχήμα 1.3: Το σύνολο $\mathcal{D}_0$



Σχήμα 1.4: Συγγραμμικά-παράλληλα διανύσματα

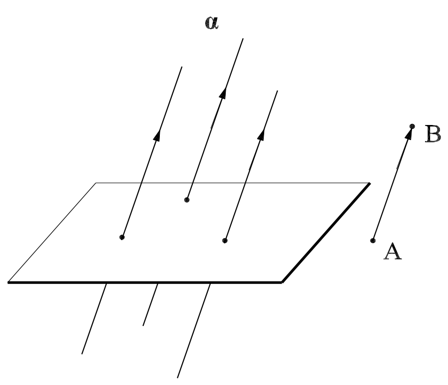
γραμμικά διανύσματα **AB** και **ΓΔ** λέγονται **ομόρροπα** (σχήμα 1.4(α),(γ)), αντίστοιχα **αντίρροπα** (σχήμα 1.4(β),(δ)), αν οι ημιευθείες AB και ΓΔ έχουν την ίδια, αντίστοιχα αντίθετη, φορά. Αν οι διευθύνσεις δύο διανυσμάτων είναι κάθετες, τα διανύσματα θα λέγονται **κάθετα** ή **ορθογώνια** και θα γράφουμε: **AB**$\perp$**ΓΔ**.

1.2 Ελεύθερα διανύσματα

Τα εφαρμοστά διανύσματα χρησιμοποιούνται στη Φυσική για την παράσταση μεγεθών όπως είναι η δύναμη σε ένα σημείο, η ταχύτητα ενός υλικού σημείου σε κάποιο σημείο της τροχιάς του, ζεύγη δυνάμεων κ.λ.π. Υπάρχουν όμως και φυσικές καταστάσεις στις οποίες η παράσταση ενός μεγέθους μπορεί να γίνει ισοδύναμα από διάφορα μεταξύ τους εφαρμοστά διανύσματα που έχουν όμως την ίδια διεύθυνση, φορά και μέτρο. Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε τη ροή, με σταθερή ταχύτητα, ρευστού μέσα σε ευθύ κυλινδρικό σωλήνα. Τότε σε όλα τα μόρια του ρευστού αντιστοιχούν ίδια διανύσματα και ένα οποιοδήποτε από τα διανύσματα αυτά θα δώσει την ίδια πληροφορία για τη διεύθυνση, τη φορά και την ταχύτητα του ρευστού. Επί πλέον, από γεωμετρική σκοπιά, είναι φανερό ότι οι ιδιότητες των σχημάτων δεν εξαρτώνται από τη θέση τους στο χώρο. Επομένως υπάρχουν περιπτώσεις στη Γεωμετρία αλλά και στη Φυσική, στις οποίες η έννοια του εφαρμοστού διανύσματος αποδεικνύεται ανεπαρκής. Για τους λόγους αυτούς είναι απαραίτητη η γενίκευση της έννοιας του εφαρμοστού διανύσματος.

Θα λέμε ότι δύο εφαρμοστά διανύσματα **AB** και **ΓΔ** είναι **ισοδύναμα** αν και μόνο αν είναι ομόρροπα και έχουν το ίδιο μέτρο. Δύο μηδενικά διανύσματα θα θεωρούνται ισοδύναμα. Το σύνολο όλων των διανυσμάτων που είναι ισοδύναμα προς ένα δεδομένο διάνυσμα **AB** ονομάζεται **ελεύθερο διάνυσμα** και το **AB** ένας **αντιπρόσωπος** του ελεύθερου διανύσματος. Ισοδύναμα, μπορεί κανείς να «δει» το ελεύθερο διάνυσμα σαν ένα εφαρμοστό διάνυσμα που όμως έχει τη δυνατότητα να «μετακινείται» παράλληλα προς τον εαυτό του, διατηρώντας τη διεύθυνση, τη φορά, και το μέτρο του. Ο όρος «ελεύθερο διάνυσμα» αναφέρεται τότε, στην ελευθερία που έχουμε στην επιλογή του σημείου εφαρμογής.

Το σύνολο των ελεύθερων διανυσμάτων θα το συμβολίζουμε με $\mathcal{D}$ και τα στοιχεία του με $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \gamma$, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ κ.λ.π. Στη συνέχεια ένα ελεύθερο διάνυσμα θα παριστάνεται με έναν οποιοδήποτε αντιπρόσωπό του, εφαρμοστό διάνυσμα (π.χ. το ελεύθερο διάνυσμα $\boldsymbol{\alpha}$ στο σχήμα 1.5 με το εφαρμαστό διάνυσμα $\mathbf{AB}$).



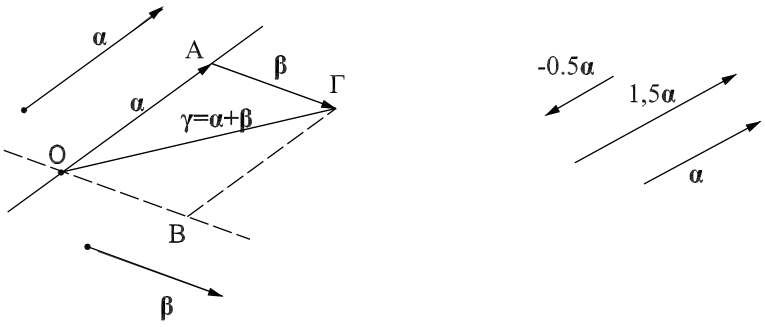
Σχήμα 1.5: Ελεύθερο διάνυσμα

Διεύθυνση, **φορά** και **μέτρο** ενός ελεύθερου διανύσματος θα ονομάζουμε τη διεύθυνση, τη φορά και το μέτρο, αντίστοιχα, ενός οποιουδήποτε αντιπροσώπου του. Το μέτρο του διανύσματος $\boldsymbol{\alpha}$ συμβολίζεται με $|\boldsymbol{\alpha}|$. Δύο ελεύθερα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\beta}$ θα λέγονται **συγγραμμικά** αν και μόνο αν έχουν την ίδια διεύθυνση, δηλαδή δύο οποιοιδήποτε αντιπρόσωποί τους είναι συγγραμμικά ή παράλληλα εφαρμοστά διανύσματα. Θεωρούμε ότι τα μηδενικά εφαρμοστά διανύσματα $\mathbf{AA}, \mathbf{BB}$ κ.λ.π., με αρχή τα διάφορα σημεία του χώρου $\mathcal{E}$ μπορούν να θεωρηθούν ισοδύναμα και επομένως αυτά και μόνο αυτά ορίζουν ένα ελεύθερο διάνυσμα που το ονομάζουμε **μηδενικό ελεύθερο διάνυσμα** και το συμβολίζουμε με $\mathbf{0}$.

1.3 Πράξεις διανυσμάτων

Στο σύνολο $\mathcal{D}$ των ελεύθερων διανυσμάτων ορίζουμε το άθροισμα $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}$ δύο διανυσμάτων $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ ως εξής: Αν $\mathrm{O} \in \mathcal{E}$ τότε ορίζονται τα σημεία Α και Γ έτσι ώστε $\mathbf{OA} = \boldsymbol{\alpha}$ και $\mathbf{A\Gamma} = \boldsymbol{\beta}$. Το ελεύθερο διάνυσμα $\boldsymbol{\gamma}$, που ορίζει το διάνυσμα $\mathbf{O\Gamma} = \mathbf{OA} + \mathbf{A\Gamma}$, είναι ανεξάρτητο από την επιλογή του Ο και λέγεται **άθροισμα** των $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\beta}$. Γράφουμε $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}$.

Παρατηρούμε ότι αν τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ είναι μη συγγραμμικά και $\mathbf{OB} = \boldsymbol{\beta}$, τότε το $\mathbf{O\Gamma} = \boldsymbol{\gamma}$ ορίζεται από τη διαγώνιο του παραλληλόγραμμου ΟΑΓΒ και

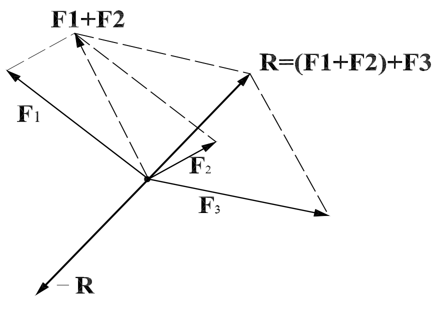


Σχήμα 1.6: πράξεις στο $\mathcal{D}$

επομένως είναι παράλληλο προς το επίπεδο των ΟΑ και ΟΒ (σχήμα 1.6).

Στο σύνολο $\mathcal{D}$ ορίζεται και το **γινόμενο** $\lambda\boldsymbol{\alpha}$ διανύσματος $\boldsymbol{\alpha}\neq \mathbf{0}$ επί αριθμό $\lambda \in \mathbb{R}^\star = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ως το διάνυσμα που έχει την ίδια διεύθυνση (συγγραμμικό) με το $\boldsymbol{\alpha}$ και είναι: ομόρροπο με το $\boldsymbol{\alpha}$, αν $\lambda > 0$, αντίρροπο με το $\boldsymbol{\alpha}$, αν $\lambda < 0$ και έχει μέτρο $|\lambda\boldsymbol{\alpha}\,| = |\lambda|\,|\boldsymbol{\alpha}|$ (σχήμα 1.6). Αν το $\boldsymbol{\alpha}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα ή αν λ=0 ορίζουμε $\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$ και $0\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$.

Για $\lambda = -1$ το $(-1)\boldsymbol{\alpha}$ έχει το ίδιο μέτρο και διεύθυνση με το $\boldsymbol{\alpha}$ αλλά αντίθετη φορά. Θα το λέμε **αντίθετο** του $\boldsymbol{\alpha}$ και θα το συμβολίζουμε με $-\boldsymbol{\alpha}$, δηλαδή $(-1)\boldsymbol{\alpha} = -\boldsymbol{\alpha}$. Προφανώς αν $\mathbf{AB}$ είναι ένας αντιπρόσωπος του ελεύθερου διανύσματος $\boldsymbol{\alpha}$ τότε το $\mathbf{BA}$ είναι ένας αντιπρόσωπος του $-\boldsymbol{\alpha}$. Έτσι, σύμφωνα με τη σύμβαση που κάναμε για το συμβολισμό, θα γράφουμε $\mathbf{AB} = -\mathbf{BA}$ για τα ελεύθερα διανύσματα.



Σχήμα 1.7:

Παράδειγμα 1.3.1. Αν Α, Β, Γ, Δ είναι σημεία του $\mathcal{E}$ τότε, από τον ορισμό της πρόσθεσης, έπεται αμέσως ότι

$$\mathbf{AB} + \mathbf{B\Gamma} + \mathbf{\Gamma\Delta} = \mathbf{A\Delta} \quad \text{και} \quad \mathbf{B\Gamma} = \mathbf{BA} + \mathbf{A\Gamma} = \mathbf{A\Gamma} - \mathbf{AB}.$$

Παράδειγμα 1.3.2. Σε ένα υλικό σημείο που βρίσκεται, στη θέση Ο ασκούνται τρεις δυνάμεις $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ και $\mathbf{F}_3$.
Αν $\mathbf{R} = (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) + \mathbf{F}_3$ είναι η συνισταμένη τους (σχήμα 1.7), τότε για να μείνει το σημείο ακίνητο, θα πρέπει να δράσει σ' αυτό μία δύναμη ίση με $-\mathbf{R}$.

Από τον ορισμό της πρόσθεσης διανυσμάτων και του πολλαπλασιασμού διανύσματος επί πραγματικό αριθμό και με τη βοήθεια της στοιχειώδους Ευκλείδειας Γεωμετρίας μπορούν να αποδειχτούν οι ιδιότητες:

$$\begin{array}{ll} \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha} & (\kappa + \lambda)\boldsymbol{\alpha} = \kappa\boldsymbol{\alpha} + \lambda\boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\alpha} + (\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma}) = (\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\gamma} & (\kappa\lambda)\boldsymbol{\alpha} = \kappa(\lambda\boldsymbol{\alpha}) \\ \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{0} = \boldsymbol{\alpha} & 1\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\alpha} + (-\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0} & \kappa(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) = \kappa\boldsymbol{\alpha} + \kappa\boldsymbol{\beta}. \end{array} \tag{1.1}$$

για κάθε $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \gamma \in \mathcal{D}$ και $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.
Η προσεταιριστική ιδιότητα δίνει τη δυνατότητα ορισμού αθροίσματος τριών ή περισσότερων (πεπερασμένου πλήθους) διανυσμάτων.

Στη συνέχεια παραθέτουμε δύο γεωμετρικές εφαρμογές.

I Διαίρεση ευθυγράμμου τμήματος σε δοθέντα λόγο λ=κ/μ

Θεωρούμε δύο σημεία Α,Β. *Να βρεθεί σημείο* Μ *της ευθείας* ΑΒ *ώστε να είναι* $\mathbf{AM} = \lambda\mathbf{MB}$ *με* $\lambda \neq -1$.
Λύση. Έστω Ο ένα σημείο του χώρου και $\mathbf{OA} = \mathbf{r}_{\mathrm{A}}$, $\mathbf{OB} = \mathbf{r}_{\mathrm{B}}$ τα διανύσματα θέσης των σημείων Α και Β. Ο προσδιορισμός του σημείου Μ ανάγεται στον προσδιορισμό του διανύσματος θέσης $\mathbf{r}_{\mathrm{M}}$. Έχουμε ότι

$$\mathbf{AM} = \mathbf{r}_{\mathrm{M}} - \mathbf{r}_{\mathrm{A}}, \quad \mathbf{MB} = \mathbf{r}_{\mathrm{B}} - \mathbf{r}_{\mathrm{M}}, \quad \mathbf{AM} = \lambda\,\mathbf{MB}, \qquad \text{οπότε}$$

$$\mathbf{r}_{\mathrm{M}} - \mathbf{r}_{\mathrm{A}} = \lambda(\mathbf{r}_{\mathrm{B}} - \mathbf{r}_{\mathrm{M}}) \text{ και επειδή } \lambda \neq -1, \ \mathbf{r}_{\mathrm{M}} = \frac{\mathbf{r}_{\mathrm{A}} + \lambda\mathbf{r}_{\mathrm{B}}}{\lambda + 1}.$$

Αν $\lambda = \kappa/\mu$ με $\kappa + \mu \neq 0$ τότε η τελευταία σχέση γράφεται

$$\mathbf{r}_{\mathrm{M}} = \frac{\mu \mathbf{r}_{\mathrm{A}} + \kappa \mathbf{r}_{\mathrm{B}}}{\kappa + \mu}. \tag{1.2}$$

Παρατηρούμε επίσης ότι
1) αν $\lambda > 0$ τότε τα $\mathbf{AM}, \mathbf{MB}$ είναι ομόρροπα και επομένως το Μ είναι μεταξύ των Α, Β. Ειδικότερα, αν $\lambda = 1$, τότε

$$\mathbf{r}_{\mathrm{M}} = \frac{\mathbf{r}_{\mathrm{A}} + \mathbf{r}_{\mathrm{B}}}{2} \tag{1.3}$$

και το Μ είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ.
2) αν $\lambda < 0$ τότε τα $\mathbf{AM}, \mathbf{MB}$ είναι αντίρροπα και επομένως το Μ είναι εκτός του τμήματος ΑΒ. Μάλιστα αν $\lambda > -1$ το Μ βρίσκεται αριστερά του Α, ενώ αν $\lambda < -1$ το Μ βρίσκεται δεξιά του Β.

ΙΙ Συγγραμμικότητα τριών σημείων

Τρία σημεία Α, Β, Γ με διανύσματα θέσης ως προς μία αρχή Ο, $\mathbf{r}_A$, $\mathbf{r}_B$, $\mathbf{r}_\Gamma$ *αντίστοιχα, θα είναι συνευθειακά αν και μόνο αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί* l, m, n, *όχι όλοι μηδέν, τέτοιοι ώστε:* $l\mathbf{r}_{\mathrm{A}} + m\mathbf{r}_{\mathrm{B}} + n\mathbf{r}_{\Gamma} = \mathbf{0}$ *και* $l + m + n = 0$.

Απόδειξη. Έστω Α, Β, Γ τρία διάφορα μεταξύ τους σημεία μίας ευθείας (ε). Τότε υπάρχει $\lambda = k/\mu$ τέτοιο ώστε $\boldsymbol{A\Gamma} = \frac{k}{\mu}\boldsymbol{\Gamma B}$. Σύμφωνα με τη σχέση (1.2) θα έχουμε:

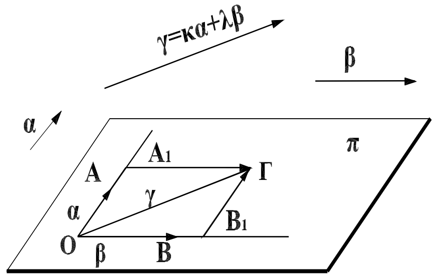
$$(\kappa + \mu)\mathbf{r}_{\Gamma} = \mu \mathbf{r}_{\mathrm{A}} + \kappa \mathbf{r}_{\mathrm{B}} \quad \text{και άρα} \quad \mu \mathbf{r}_{\mathrm{A}} + \kappa \mathbf{r}_{\mathrm{B}} - (\kappa + \mu)\mathbf{r}_{\Gamma} = \mathbf{0}.$$

Επομένως ισχύει μία σχέση της μορφής: $l\mathbf{r}_{\mathrm{A}} + m\mathbf{r}_{\mathrm{B}} + n\mathbf{r}_{\Gamma} = \mathbf{0}$ με $l + m + n = 0$, όπου τουλάχιστον ένας από τους l, m, n, είναι διάφορος του μηδενός.
Αντιστρόφως, έστω ότι υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί l, m, n, που δεν είναι όλοι μηδέν, τέτοιοι ώστε: $l\mathbf{r}_A + m\mathbf{r}_B + n\mathbf{r}_\Gamma = \mathbf{0}$ και $l + m + n = 0$. Επειδή $n = -(l + m)$ έχουμε $l\mathbf{r}_{\mathrm{A}} + m\mathbf{r}_{\mathrm{B}} - (l + m)\mathbf{r}_{\Gamma} = \mathbf{0}$ ή ισοδύναμα: $l(\mathbf{r}_{\mathrm{A}} - \mathbf{r}_{\Gamma}) + m(\mathbf{r}_{\mathrm{B}} - \mathbf{r}_{\Gamma}) = \mathbf{0}$. Είναι όμως $l \neq 0$ ή $m \neq 0$ (αν ήταν $l = 0$ και $m = 0$, θα ήταν και $n = 0$). Έστω $l \neq 0$. Τότε $\mathbf{r}_{\mathrm{A}} - \mathbf{r}_{\Gamma} = -\frac{m}{l}(\mathbf{r}_{\mathrm{B}} - \mathbf{r}_{\Gamma})$ και άρα τα Α, Β, Γ βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία.

1.4 Συγγραμμικά και Συνεπίπεδα διανύσματα

Δύο μη μηδενικά διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ είναι συγγραμμικά αν και μόνο αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\lambda \neq 0$ και $\mu \neq 0$ με $\lambda\boldsymbol{\alpha} + \mu\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$. Πράγματι αν είναι συγγραμμικά τότε υπάρχει $\lambda \neq 0$ με $\boldsymbol{\beta} = \lambda\boldsymbol{\alpha}$ και άρα $\lambda\boldsymbol{\alpha} + (-1)\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$.

Αντιστρόφως αν $\lambda\boldsymbol{\alpha} + \mu\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$ τότε $\boldsymbol{\beta} = -\frac{\lambda}{\mu}\boldsymbol{\alpha}$ και άρα είναι συγγραμμικά.



Σχήμα 1.8:

Θα λέμε ότι τρία διανύσματα είναι **συνεπίπεδα** αν και μόνο αν οι διευθύνσεις τους είναι παράλληλες προς το ίδιο επίπεδο (π). Θα δείξουμε ότι τρία μη μηδενικά διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, γ είναι συνεπίπεδα αν και μόνο αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί κ, λ, μ, όχι όλοι μηδέν, τέτοιοι ώστε: $\kappa\boldsymbol{\alpha}+\lambda\boldsymbol{\beta}+\mu\gamma = \mathbf{0}$. Πράγματι, αν ισχύει η συνθήκη, υποθέτοντας ότι $\mu \neq 0$, θα έχουμε $\boldsymbol{\gamma} = -\frac{\kappa}{\mu}\boldsymbol{\alpha} - \frac{\lambda}{\mu}\boldsymbol{\beta}$. Τότε από τον ορισμό των πράξεων της πρόσθεσης διανυσμάτων και του πολλαπλασιασμού διανύσματος επί αριθμό, έπεται ότι το διάνυσμα $\boldsymbol{\gamma}$ έχει διεύθυνση παράλληλη προς κάθε επίπεδο (π) που είναι παράλληλο προς τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ και άρα είναι συνεπίπεδο με αυτά. Ένα επίπεδο (π) προς το οποίο τα τρία διανύσματα είναι παράλληλα είναι το επίπεδο που διέρχεται από ένα σημείο Ο και είναι παράλληλο προς τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$.

Αντιστρόφως αν τα τρία διανύσματα είναι συνεπίπεδα, (π) είναι ένα επίπεδο προς το οποίο αυτά είναι παράλληλα και $\mathrm{O}, \mathrm{A}, \mathrm{B}$ σημεία του επιπέδου με $\mathbf{OA} = \boldsymbol{\alpha}$, $\mathbf{OB} = \boldsymbol{\beta}$, τότε για το διάνυσμα $\boldsymbol{\gamma}$ που είναι παράλληλο στο (π) θα υπάρχει σημείο Γ του (π) με $\gamma = \mathbf{O\Gamma} = \mathbf{OA}_1 + \mathbf{OB}_1 = \kappa\mathbf{OA} + \lambda\mathbf{OB} = \kappa\boldsymbol{\alpha} + \lambda\boldsymbol{\beta}$ (σχήμα 1.8) για κάποια κ, λ (αφού $\mathbf{OA}_1 // \mathbf{OA}$, $\mathbf{OB}_1 // \mathbf{OB}$). Άρα $\kappa\boldsymbol{\alpha} + \lambda\boldsymbol{\beta} + (-1)\gamma = \mathbf{0}$.

Παρατήρηση 1.4.1. **1)** Όταν δύο διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, αντίστοιχα τρία διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \gamma$, συνδέονται με μία σχέση της μορφής $\lambda\boldsymbol{\alpha}+\mu\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$, αντίστοιχα

$\kappa\boldsymbol{\alpha}+\lambda\boldsymbol{\beta}+\mu\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0}$, χωρίς όλοι οι συντελεστές κ,λ,μ να είναι μηδέν, θα λέγονται **γραμμικώς εξαρτημένα**. Θα λέγονται **γραμμικώς ανεξάρτητα** αν δεν είναι γραμμικώς εξαρτημένα.
2) Είναι προφανές ότι τρία διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, ισοδύναμα μη συνεπίπεδα, αν και μόνο αν κάθε γραμμικός συνδυασμός της μορφής $\kappa\boldsymbol{\alpha}+\lambda\boldsymbol{\beta}+\mu\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0}$ συνεπάγεται ότι $\kappa=\lambda=\mu=0$.

Παράδειγμα 1.4.1. Για οποιαδήποτε διανύσματα $\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\gamma}$ να δειχθεί ότι τα διανύσματα $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\alpha}$ είναι συνεπίπεδα.

Απόδειξη. Ισχύει $1(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+(-1)(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})+1(\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$ χωρίς όλοι οι συντελεστές να είναι μηδέν.
Ισοδύναμα θα μπορούσε κανείς να διακρίνει τις περιπτώσεις:
α) Αν τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\gamma}$ είναι συνεπίπεδα τότε, από τον ορισμό των πράξεων μεταξύ διανυσμάτων, έπεται ότι και τα διανύσματα $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ είναι συνεπίπεδα.
β) Αν τα $\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\gamma}$ δεν είναι συνεπίπεδα και υποθέσουμε ότι ισχύει μία σχέση της μορφής $\kappa\boldsymbol{u}+\lambda\boldsymbol{v}+\mu\boldsymbol{w}=\mathbf{0}$, οπότε $\kappa(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\lambda(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})+\mu(\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$, τότε $(\kappa-\mu)\boldsymbol{\alpha}+(\kappa+\lambda)\boldsymbol{\beta}+(\lambda+\mu)\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0}$ και επειδή τα $\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\gamma}$ δεν είναι συνεπίπεδα θα ισχύει $\kappa-\mu=0,\ \kappa+\lambda=0,\ \lambda+\mu=0$, ισοδύναμα: $\kappa=-\lambda=\mu$, οπότε τα $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ είναι συνεπίπεδα αφού η υπόθεση ισχύει με π.χ. $\kappa=\mu=2$, $\lambda=-2$.

1.5 Βάσεις διανυσμάτων

Θεωρούμε δύο μη συγγραμμικά διανύσματα $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in\mathcal{D}$. Έχουμε δεί ότι για κάθε άλλο διάνυσμα $\boldsymbol{\gamma}$ που είναι συνεπίπεδο με αυτά, υπάρχουν αριθμοί $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε

$$\boldsymbol{\gamma}=\kappa\boldsymbol{\alpha}+\lambda\boldsymbol{\beta}\,. \tag{1.4}$$

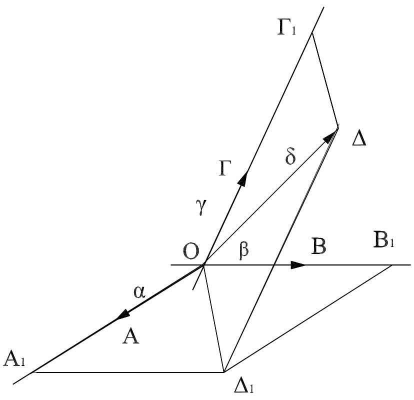
Οι αριθμοί αυτοί είναι μονοσήμαντα καθορισμένοι γιατί αν υποθέσουμε ότι:

$$\boldsymbol{\gamma}=\kappa_1\boldsymbol{\alpha}+\lambda_1\boldsymbol{\beta}=\kappa_2\boldsymbol{\alpha}+\lambda_2\boldsymbol{\beta},\quad \text{τότε}\quad (\kappa_1-\kappa_2)\boldsymbol{\alpha}+(\lambda_1-\lambda_2)\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}.$$

Επειδή όμως τα $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά η σχέση αυτή θα ισχύει αν και μόνο αν $\kappa_1-\kappa_2=0,\ \lambda_1-\lambda_2=0$. Το σύνολο $\{\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta}\}$ θα λέγεται μία **βάση**

στο σύνολο των συνεπίπεδων με τα $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$, διανυσμάτων. Τα διανύσματα $\kappa\boldsymbol{\alpha}$ και $\lambda\boldsymbol{\beta}$ θα λέγονται **συνιστώσες** του γ ως προς τη βάση αυτή. Όταν όμως η βάση θεωρείται δεδομένη εξ αρχής πολλές φορές θα θεωρούμε ως συνιστώσες του γ και τους ίδιους τους αριθμούς κ, λ.
Έστω $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ τρία μη συνεπίπεδα διανύσματα. Τότε για κάθε άλλο διάνυσμα $\boldsymbol{\delta}$ υπάρχουν μονοσήμαντα καθορισμένοι αριθμοί $\kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε

$$\boldsymbol{\delta} = \kappa\boldsymbol{\alpha} + \lambda\boldsymbol{\beta} + \mu\boldsymbol{\gamma} . \qquad (1.5)$$



Σχήμα 1.9:

Πράγματι, θεωρούμε ένα σημείο O του χώρου $\mathcal{E}$, τα διανύσματα $\mathbf{OA} = \boldsymbol{\alpha}$, $\mathbf{OB} = \boldsymbol{\beta}$, $\mathbf{O\Gamma} = \boldsymbol{\gamma}$, $\mathbf{O\Delta} = \boldsymbol{\delta}$ και την ευθεία $\Delta\Delta_1$ παράλληλη προς την ΟΓ (σχήμα 1.9). Τότε

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\delta} &= \mathbf{O\Delta} = \mathbf{O\Delta_1} + \mathbf{O\Gamma_1} = \mathbf{O\Delta_1} \\ &+ \mu\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{OA_1} + \mathbf{OB_1} + \mu\boldsymbol{\gamma} \\ &= \kappa\boldsymbol{\alpha} + \lambda\boldsymbol{\beta} + \mu\boldsymbol{\gamma}, \quad \kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

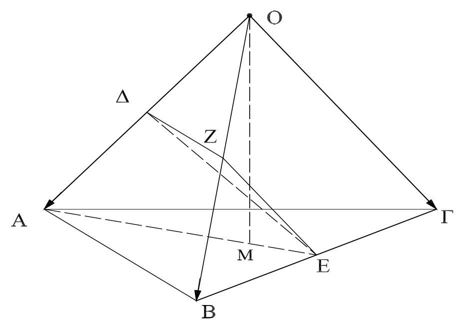
Η έκφραση αυτή του $\boldsymbol{\delta}$ είναι ανεξάρτητη από την επιλογή του σημείου $O \in \mathcal{E}$. Επί πλέον οι αριθμοί κ, λ και μ είναι μονοσήμαντα καθορισμένοι (γιατί;). Ένα σύνολο $B = \{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}\}$ τριών μη συνεπιπέδων διανυσμάτων θα λέγεται **βάση** του $\mathcal{D}$. Όπως και πριν τα διανύσματα $\kappa\boldsymbol{\alpha}$, $\lambda\boldsymbol{\beta}$, $\mu\boldsymbol{\gamma}$ (ή και οι αριθμοί κ, λ, μ) στη σχέση (1.5) θα λέγονται **συνιστώσες** του διανύσματος $\boldsymbol{\delta}$ ως προς τη βάση αυτή. Είναι φανερό ότι μία βάση είναι ένα διατεταγμένο σύνολο διανυσμάτων με την έννοια ότι δίνει μία διατεταγμένη τριάδα συνιστωσών. Έτσι, αν (κ, λ, μ) είναι οι συνιστώσες του $\boldsymbol{\delta}$ ως προς τη βάση $B = \{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}\}$, τότε οι συνιστώσες του ως προς τη βάση $B_1 = \{\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}\}$ είναι οι αριθμοί (λ, κ, μ).

Παράδειγμα 1.5.1. Δίνεται μία βάση $B = \{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}\}$ του $\mathcal{D}$. Να αποδειχθεί ότι και το σύνολο $B_1 = \{\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}\}$, όπου $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} - 2\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{r} = 2\boldsymbol{\beta} + 3\boldsymbol{\gamma}$ είναι επίσης μία βάση του $\mathcal{D}$ και να βρεθούν οι συνιστώσες του διανύσματος $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma}$ ως προς τη βάση B και τη βάση B_1.

Λύση. Έστω ότι υπάρχουν
$\kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{R}: \ \kappa \boldsymbol{p} + \lambda \boldsymbol{q} + \mu \boldsymbol{r} = \mathbf{0}$.
Τότε είναι: $(\kappa+\lambda)\boldsymbol{\alpha}+(\kappa-\lambda+2\mu)\boldsymbol{\beta}+(-2\kappa+3\mu)\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}$.
Επειδή όμως τα $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα η σχέση αυτή ισχύει αν και μόνο αν

$$\kappa+\lambda = 0, \ \kappa-\lambda+2\mu = 0, \ -2\kappa+3\mu = 0.$$

Ισοδύναμα, αν και μόνο αν $\kappa = 0$, $\lambda = 0$, $\mu = 0$. Άρα τα $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}$ δεν είναι συνεπίπεδα και επομένως αποτελούν βάση του $\mathcal{D}$. Από την έκφραση του $\boldsymbol{s}$ φαίνεται αμέσως ότι οι συνιστώσες του ως προς τη βάση B είναι $(1,1,1)$. Αν $\{s_1, s_2, s_3\}$ είναι οι συνιστώσες του $\boldsymbol{s}$ ως προς την B_1 τότε θα είναι:



Σχήμα 1.10:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{s} &= \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma} = s_1\boldsymbol{p} + s_2\boldsymbol{q} + s_3\boldsymbol{r}\\ &= s_1(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} - 2\boldsymbol{\gamma}) + s_2(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}) + s_3(2\boldsymbol{\beta} + 3\boldsymbol{\gamma})\\ &= (s_1 + s_2)\boldsymbol{\alpha} + (s_1 - s_2 + 2s_3)\boldsymbol{\beta} + (-2s_1 + 3s_3)\boldsymbol{\gamma}\ .\end{aligned}$$

Επομένως $s_1 + s_2 = 1$, $s_1 - s_2 + 2s_3 = 1$, $-2s_1 + 3s_3 = 1$, από όπου έπεται: $s_1 = \dfrac{2}{5}, \quad s_2 = \dfrac{3}{5}, \quad s_3 = \dfrac{3}{5}$.

Παράδειγμα 1.5.2. Δίνεται ένα τετράεδρο ΟΑΒΓ. Αν Δ, E είναι τα μέσα των ακμών ΟΑ και ΒΓ αντίστοιχα, να βρεθούν οι συνιστώσες του διανύσματος $\mathbf{\Delta E}$ ως προς τη βάση $\{\mathbf{OA}, \mathbf{OB}, \mathbf{O\Gamma}\}$.

Λύση. Αν Ζ είναι το μέσον του ΟΒ (σχήμα 1.10), τότε:

$$\begin{aligned}\mathbf{\Delta E} &= \mathbf{\Delta Z} + \mathbf{ZE} = \tfrac{1}{2}\mathbf{AB} + \tfrac{1}{2}\mathbf{O\Gamma}\\ &= \tfrac{1}{2}(\mathbf{OB} - \mathbf{OA}) + \tfrac{1}{2}\mathbf{O\Gamma}\\ &= -\tfrac{1}{2}\mathbf{OA} + \tfrac{1}{2}\mathbf{OB} + \tfrac{1}{2}\mathbf{O\Gamma}.\end{aligned}$$

Επομένως οι συνιστώσες του $\mathbf{\Delta E}$ είναι $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$.

Θεωρούμε μία βάση $B = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ του $\mathcal{D}$ και τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}$,$\boldsymbol{\beta}$,$\boldsymbol{\gamma}$ με συνιστώσες α_i, β_i, γ_i, $i = 1, 2, 3$ αντίστοιχα, ως προς τη βάση αυτή, δηλαδή: $\boldsymbol{\alpha} = \alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \alpha_2\boldsymbol{e}_2 + \alpha_3\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{\beta} = \beta_1\boldsymbol{e}_1 + \beta_2\boldsymbol{e}_2 + \beta_3\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{\gamma} = \gamma_1\boldsymbol{e}_1 + \gamma_2\boldsymbol{e}_2 + \gamma_3\boldsymbol{e}_3$. Τότε για την ισότητα $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$ των διανυσμάτων έχουμε:
$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta} \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0} \Leftrightarrow (\alpha_1 - \beta_1)\boldsymbol{e}_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\boldsymbol{e}_2 + (\alpha_3 - \beta_3)\boldsymbol{e}_3 = \mathbf{0} \Leftrightarrow \alpha_i = \beta_i, \quad i = 1, 2, 3$, διότι τα διανύσματα $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ είναι μη συνεπίπεδα (γραμμικώς ανεξάρτητα).
Όμοια οι παρακάτω διανυσματικές σχέσεις ισοδυναμούν με τις αντίστοιχες αλγεβρικές:

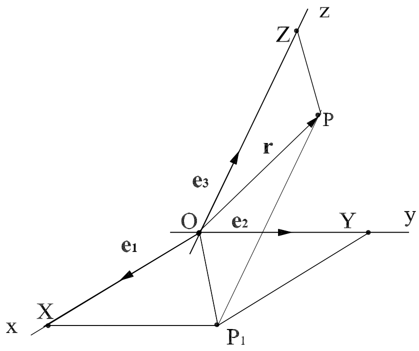
$$\boldsymbol{\alpha} \ = \lambda\boldsymbol{\beta} \ \ \Leftrightarrow \ \alpha_i = \lambda\beta_i. \quad \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \ \ \Leftrightarrow \ \gamma_i = \alpha_i + \beta_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Αντίστοιχες σχέσεις ισχύουν και στην περίπτωση ενός συνόλου συνεπιπέδων διανυσμάτων, όπου φυσικά μία διανυσματική εξίσωση θα ισοδυναμεί με δύο αλγεβρικές. Αν τα διανύσματα της βάσης $B = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ είναι ανά δύο ορθογώνια τότε η βάση λέγεται **ορθογώνια**. Αν επί πλέον τα διανύσματα είναι και μοναδιαία, δηλαδή $|\boldsymbol{e}_i| = 1, \ i = 1, 2, 3$, τότε η βάση λέγεται **ορθοκανονική**. Επισημαίνουμε ότι αν $B = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ είναι μία ορθογώνια βάση τότε το σύνολο $B' = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ με $\varepsilon_i = \frac{\boldsymbol{e}_i}{|\boldsymbol{e}_i|}$, $i = 1, 2, 3$ είναι μία ορθοκανονική βάση που προκύπτει από την B.

1.6 Συστήματα συντεταγμένων

Στην παράγραφο 1.1 είδαμε ότι όταν δοθεί ένα σημείο Ο του χώρου, τότε σε κάθε άλλο σημείο Ρ αντιστοιχεί ακριβώς ένα διάνυσμα, το διάνυσμα θέσης $\boldsymbol{r} = \mathbf{OP}$ του Ρ. Αν επιπλέον δοθεί και μία βάση διανυσμάτων $B = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, τότε στο διάνυσμα $\boldsymbol{r}$ αντιστοιχεί μία διατεταγμένη τριάδα αριθμών, οι συνιστώσες του (x, y, z), έτσι ώστε $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3$. Επομένως όταν δοθεί το σημείο Ο και η βάση B τότε σε κάθε σημείο Ρ του χώρου αντιστοιχεί μία διατεταγμένη τριάδα αριθμών $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Οι αριθμοί στην τριάδα αυτή, που θεωρούνται και οι συνιστώσες του διανύσματος $\boldsymbol{r} = \mathbf{OP}$, ονομάζονται **συντεταγμένες** του σημείου Ρ ως προς το **σύστημα συντεταγμένων** που αποτελείται από το σημείο Ο και τη βάση $B = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ ή

σύντομα $\{\mathrm{O}, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$.
Θα γράφουμε $\mathrm{P}(x, y, z)$ για το σημείο P με συντεταγμένες (x, y, z) και $\mathrm{P}(\boldsymbol{r})$ για το σημείο P με διάνυσμα θέσης $\boldsymbol{r}$. Οι φορείς των εφαρμοστών στο σημείο O διανυσμάτων που εκπροσωπούν τα διανύσματα της βάσης (σχήμα 1.11) λέγονται **άξονες** του συστήματος συντεταγμένων και συμβολίζονται με $x'x$, $y'y$, $z'z$, αντίστοιχα. Ως θετική φορά των αξόνων θεωρούμε τη φορά των αντιστοίχων διανυσμάτων. Σημειώνουμε με $\mathrm{O}x$, $\mathrm{O}y$, $\mathrm{O}z$, αντίστοιχα τις ημιευθείες με τη θετική φορά (**θετικοί ημιάξονες**). Το επίπεδο των $\mathrm{O}x$, $\mathrm{O}y$ συμβολίζουμε με $x\mathrm{O}y$. Αντίστοιχα συμβολίζουμε με $y\mathrm{O}z$, $x\mathrm{O}z$ τα άλλα δύο επίπεδα. Τα επίπεδα αυτά λέγονται **επίπεδα συντεταγμένων**.



Σχήμα 1.11:

Από το σημείο $\mathrm{P}(x, y, z)$ φέρουμε την PP_1 παράλληλη προς τον άξονα $z'z$ μέχρι να τμήσει το επίπεδο $x\mathrm{O}y$ στο σημείο P_1 και τις $\mathrm{P}_1\mathrm{X}//y'y$, $\mathrm{P}_1\mathrm{Y}//x'x$, $\mathrm{PZ}//\mathrm{OP}_1$. Τότε

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} = \mathbf{OP} &= \mathbf{OP_1} + \mathbf{OZ} \\ &= \mathbf{OX} + \mathbf{OY} + \mathbf{OZ}. \end{aligned}$$

Αλλά τα διανύσματα $\mathbf{OX}$, $\mathbf{OY}$, $\mathbf{OZ}$ είναι συγγραμμικά με τα διανύσματα $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ αντίστοιχα, οπότε $\mathbf{OX} = \kappa\boldsymbol{e}_1$, $\mathbf{OY} = \lambda\boldsymbol{e}_2$, $\mathbf{OZ} = \mu\boldsymbol{e}_3$. Επομένως $\boldsymbol{r} = \kappa\boldsymbol{e}_1 + \lambda\boldsymbol{e}_2 + \mu\boldsymbol{e}_3$. Όμως $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3$. Άρα $x = \kappa$, $y = \lambda$, $z = \mu$ και επομένως

$$\mathbf{OX} = x\boldsymbol{e}_1,\ \mathbf{OY} = y\boldsymbol{e}_2,\ \mathbf{OZ} = z\boldsymbol{e}_3.$$

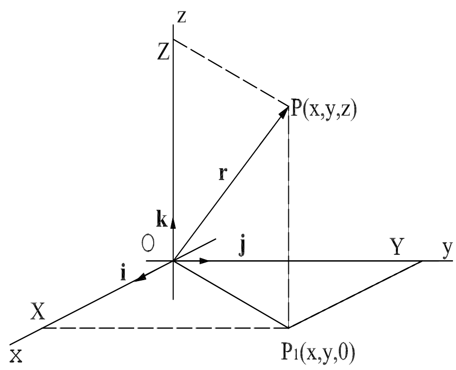
Αν η βάση $B = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ του συστήματος συντεταγμένων είναι ορθοκανονική, τότε το σύστημα συντεταγμένων λέγεται **ορθογώνιο** ή **Καρτεσιανό**. Είναι τότε: $|\boldsymbol{e}_1| = |\boldsymbol{e}_2| = |\boldsymbol{e}_3| = 1$ και άρα $|\mathbf{OX}| = |x|$, $|\mathbf{OY}| = |y|$, $|\mathbf{OZ}| =$

$|z|$, οπότε τα x, y, z είναι οι «προσημασμένες αποστάσεις» του P από τα επίπεδα συντεταγμένων $y\mathrm{O}z$, $x\mathrm{O}z$, $x\mathrm{O}y$, αντίστοιχα (π.χ. το $z = \pm(\mathrm{PP}_1)$ με το « + » να αντιστοιχεί στη περίπτωση που το **OZ** είναι ομόρροπο του $\boldsymbol{e}_3$ και το « - » στη περίπτωση που το **OZ** είναι αντίρροπο του $\boldsymbol{e}_3$).

Ένα καρτεσιανό σύστημα θα συμβολίζεται συνήθως ως $\mathrm{O}xyz$ και η βάση του ως $B = \{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$

Σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (βλέπε σχήμα 1.12) έχουμε:

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{r}| = |\mathbf{OP}| &= \sqrt{(\mathrm{OP}_1)^2 + (\mathrm{P}_1\mathrm{P})^2}\\ &= \sqrt{(\mathrm{OX})^2 + (\mathrm{OY})^2 + (\mathrm{OZ})^2}\\ &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.\end{aligned}$$



Σχήμα 1.12:

Οποιοδήποτε ελεύθερο διάνυσμα $\boldsymbol{\alpha}$ είναι διάνυσμα θέσης ακριβώς ενός σημείου $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ και άρα το μέτρο του είναι: $|\boldsymbol{\alpha}\ | = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}$.

Αν $\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}}$ και $\boldsymbol{r}_{\mathrm{B}}$ είναι τα διανύσματα θέσης δύο σημείων A και B αντίστοιχα, τότε η απόσταση $\mathrm{d}(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ των δύο σημείων είναι:

$$\mathrm{d}(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = |\mathbf{AB}| = |\boldsymbol{r}_{\mathrm{B}} - \boldsymbol{r}_{\mathrm{A}}|\,.$$

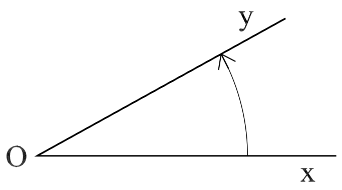
Αν $\mathrm{A}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ και $\mathrm{B}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, ως προς ένα καρτεσιανό σύστημα, τότε $\boldsymbol{r}_{\mathrm{B}} - \boldsymbol{r}_{\mathrm{A}} = (\beta_1 - \alpha_1)\boldsymbol{i} + (\beta_2 - \alpha_2)\boldsymbol{j} + (\beta_3 - \alpha_3)\boldsymbol{k}$ και άρα:

$$\mathrm{d}(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \sqrt{(\beta_1 - \alpha_1)^2 + (\beta_2 - \alpha_2)^2 + (\beta_3 - \alpha_3)^2}. \tag{1.6}$$

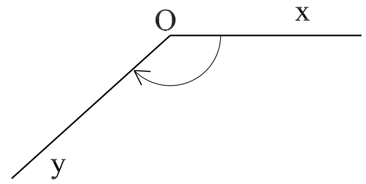
Παρατήρηση 1.6.1. Αν (π) είναι ένα δεδομένο επίπεδο στο χώρο, ένα σύστημα συντεταγμένων, ειδικότερα για τα σημεία του επιπέδου, αποτελείται από ένα σημείο O του επιπέδου και μία βάση $B = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ στο σύνολο των (συνεπιπέδων) διανυσμάτων με διευθύνσεις παράλληλες προς το επίπεδο. Σε κάθε σημείο P του επιπέδου αντιστοιχεί ένα διατεταγμένο ζευγάρι $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, που είναι οι συνιστώσες του διανύσματος θέσης $\boldsymbol{r}$ του σημείου P ως προς τη βάση B, με σημείο αναφοράς το O. Όλα τα περί συστημάτων συντεταγμένων στο χώρο ισχύουν και εδώ με τις αναγκαίες τροποποιήσεις.

1.7 Προσανατολισμός συστήματος συντεταγμένων

Θεωρούμε δύο ημιευθείες Οx και Οy που δεν είναι αντικείμενες. Οι ημιευθείες αυτές ορίζουν ένα επίπεδο. Επιλέγουμε το ένα από τα δύο μέρη (ημίχωροι), στα οποία το επίπεδο χωρίζει το χώρο . Ορίζεται τότε μία μοναδική κυρτή γωνία της οποίας οι πλευρές θεωρούνται διατεταγμένες με πρώτη την Οx και δεύτερη την Οy. Η γωνία αυτή λέγεται **προσανατολισμένη** και συμβολίζεται με $(\widehat{\mathrm{Ox}, \mathrm{Oy}})$. Ας υποθέσουμε ότι η Οx στρέφεται περί το Ο διαγράφοντας το

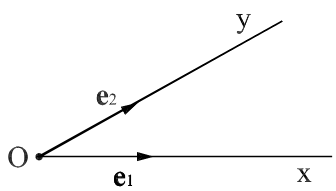


Σχήμα 1.13: θετική γωνία

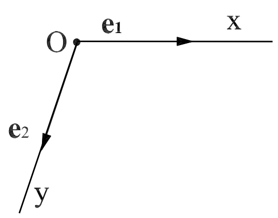


Σχήμα 1.14: αρνητική γωνία

εσωτερικό της γωνίας μέχρι να συμπέσει με την Οy. Αν, για να συμβεί αυτό, η φορά της περιστροφής είναι αντίθετη από τη φορά περιστροφής των δεικτών του ωρολογίου, η γωνία λέγεται **θετική** (σχήμα 1.13) Αν η φορά περιστροφής είναι εκείνη των δεικτών του ωρολογίου, τότε η γωνία λέγεται **αρνητική** (σχήμα 1.14). Η αλγεβρική τιμή της γωνίας $(\widehat{\mathrm{Ox}, \mathrm{Oy}})$ ορίζεται ως η αλγε-



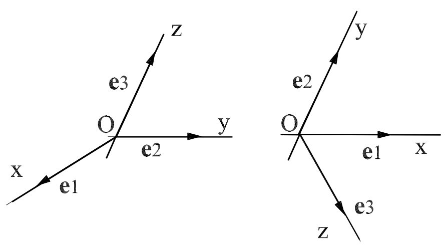
Σχήμα 1.15:



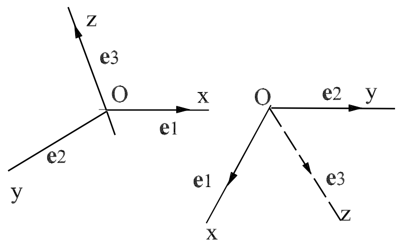
Σχήμα 1.16:

βρική τιμή του αντίστοιχου τόξου προσανατολισμένου κύκλου με κέντρο το

O. Θεωρούμε ότι η γωνία που σχηματίζουν δύο αντικείμενες ημιευθείες είναι θετική. Τότε για την αλγεβρική τιμή θ της προσανατολισμένης γωνίας ισχύει: $-\pi < \theta \leq \pi$. Ως **γωνία** δύο διανυσμάτων $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ ορίζουμε τη γωνία των ημιευθειών OA και OB με $\mathbf{OA} = \mathbf{a}$ και $\mathbf{OB} = \mathbf{b}$ και O τυχαίο σημείο του χώρου. Ο ορισμός αυτός είναι ανεξάρτητος της επιλογής του O. Θεωρούμε ένα σύστημα συντεταγμένων $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ στο επίπεδο. Τα διανύσματα $\mathbf{OA} = \mathbf{e}_1$ και $\mathbf{OB} = \mathbf{e}_2$ δεν είναι συγγραμμικά και άρα $(\widehat{\mathbf{OA}, \mathbf{OB}}) \neq 0$. Το σύστημα θα λέγεται **δεξιόστροφο** αν $(\widehat{\mathbf{OA}, \mathbf{OB}}) > 0$ (σχήμα 1.15) και **αριστερόστροφο** αν $(\widehat{\mathbf{OA}, \mathbf{OB}}) < 0$ (σχήμα 1.16). Έστω $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$



Σχήμα 1.17: δεξιόστροφα



Σχήμα 1.18: αριστερόστροφα

ένα σύστημα συντεταγμένων στον εποπτικό χώρο $\mathcal{E}$. Το σύστημα αυτό θα λέγεται **δεξιόστροφο** (σχήμα 1.17) (αντίστοιχα **αριστερόστροφο**) (σχήμα 1.18) αν το σύστημα συντεταγμένων $\{O, \mathbf{e}_1\, \mathbf{e}_2\}$ του επίπεδου φαίνεται από το πέρας του $\mathbf{e}_3$ ως δεξιόστροφο (αντίστοιχα αριστερόστροφο).

Μία βάση διανυσμάτων $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ του χώρου $\mathcal{D}$ λέγεται **δεξιόστροφη** αντιστοίχως **αριστερόστροφη**, αν για ένα σημείο O του $\mathcal{E}$ το σύστημα συντεταγμένων $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ είναι δεξιόστροφο αντιστοίχως αριστερόστροφο. Ο ορισμός αυτός είναι ανεξάρτητος από το σημείο O.

Θα λέμε ότι ο εποπτικός χώρος $\mathcal{E}$ είναι **θετικά** ή **αρνητικά** προσανατολισμένος, αν το σύστημα συντεταγμένων που έχουμε επιλέξει, είναι δεξιόστροφο ή αριστερόστροφο αντίστοιχα. Όμοια ο χώρος $\mathcal{D}$ των ελευθέρων διανυσμάτων είναι θετικά ή αρνητικά προσανατολισμένος αν η βάση που έχουμε επιλέξει είναι δεξιόστροφη ή αριστερόστροφη αντίστοιχα.

1.8 Εσωτερικό γινόμενο

Με τη βοήθεια της εννοίας του μέτρου ενός διανύσματος και της γωνίας δύο διανυσμάτων μπορεί κανείς να ορίσει την έννοια του εσωτερικού γινομένου στο $\mathcal{D}$. Έστω $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{D}$. Το **εσωτερικό γινόμενό** τους $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ ορίζεται ως ο πραγματικός αριθμός:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \begin{cases} |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\text{συν}(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}), & \text{αν } \mathbf{a} \neq \mathbf{0} \text{ και } \mathbf{b} \neq \mathbf{0} \\ 0, & \text{αν } \mathbf{a} = \mathbf{0} \text{ ή } \mathbf{b} = \mathbf{0} \end{cases} . \tag{1.7}$$

Είναι φανερό ότι αν το $\mathbf{a}$ είναι ορθογώνιο προς το $\mathbf{b}$ (δηλαδή οι διευθύνσεις τους είναι κάθετες) τότε $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$. Αντιστρόφως, αν $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ τότε $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ ή $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ ή το $\mathbf{a}$ είναι ορθογώνιο προς το $\mathbf{b}$. Επομένως

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0} \text{ ή } \mathbf{b} = \mathbf{0} \text{ ή το } \mathbf{a} \text{ είναι ορθογώνιο προς το } \mathbf{b}.$$

Από την (1.7) προκύπτει αμέσως ότι

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{\mathbf{a}^2} \quad \text{και} \quad \text{συν}(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} . \tag{1.8}$$

Οι σχέσεις αυτές φανερώνουν και τον ουσιαστικό χαρακτήρα του εσωτερικού γινομένου: Οι βασικές μετρικές έννοιες του μήκους και της γωνίας μπορούν να δοθούν με τη βοήθειά του και μόνο. Από τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου και με στοιχειώδεις γεωμετρικές μεθόδους αποδεικνύονται οι ιδιότητες:

$$\begin{array}{ll} \textbf{(i)} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \\ \textbf{(ii)} & (\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \\ \textbf{(iii)} & (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \\ \textbf{(iv)} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0. \quad \text{Είναι:} \\ & \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}. \end{array} \tag{1.9}$$

Παραθέτουμε δύο παραδείγματα εφαρμογής του εσωτερικού γινόμενου.

Παράδειγμα 1.8.1. Να δειχθεί ότι σε ένα ισοσκελές τρίγωνο η βάση του και η αντίστοιχη διάμεσος είναι κάθετες.

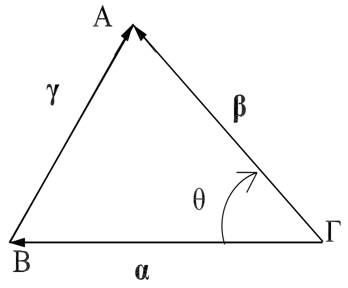
Απόδειξη. Πράγματι, χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.3) είναι:

$$\mathbf{r}\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a}) = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a}) = \frac{1}{2}(|\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2) = 0.$$

Παράδειγμα 1.8.2. (**Ο νόμος του συνημίτονου**):
Στο τρίγωνο ΑΒΓ (σχήμα 1.19) ισχύει: $|\gamma|^2 = |\boldsymbol{\beta}|^2 + |\boldsymbol{\alpha}|^2 - 2|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|\sigma\upsilon\nu\theta$.
Απόδειξη. Από τη σχέση $\gamma = \boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}$ έχουμε: $|\gamma|^2 = \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\gamma} = (\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha})\cdot(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}) = |\boldsymbol{\beta}|^2 + |\boldsymbol{\alpha}|^2 - 2\,\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta} = |\boldsymbol{\beta}|^2 + |\boldsymbol{\alpha}|^2 - 2|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|\sigma\upsilon\nu\theta$.

Στη συνέχεια βρίσκουμε την έκφραση του εσωτερικού γινομένου ως προς μία ορθοκανονική βάση διανυσμάτων. Αν η $\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$ είναι μία ορθοκανονική βάση τότε:

$$\begin{aligned} \mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = 0.\\ \mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1. \end{aligned} \qquad (1.10)$$



Σχήμα 1.19:

Άρα αν $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}$ και $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}$, τότε από τις προηγούμενες σχέσεις προκύπτει:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} &= (a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k})\cdot(b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}) \\ &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3. \end{aligned} \qquad (1.11)$$

και για το μέτρο ενός διανύσματος $\mathbf{a}$ θα έχουμε:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}. \qquad (1.12)$$

Παρατήρηση 1.8.1. Αν η θεωρούμενη βάση δεν είναι ορθοκανονική τότε οι προηγούμενες σχέσεις δεν θα έχουν τόσο απλή μορφή αφού θα περιέχονται και τα γινόμενα μεταξύ των διανυσμάτων της βάσης, δηλαδή τα μέτρα των διανυσμάτων της βάσης καθώς και οι μεταξύ τους γωνίες.

Παρατήρηση 1.8.2. Το β′ μέλος των σχέσεων (1.11), (1.12) εξαρτάται από τη βάση που χρησιμοποιούμε, ενώ το α′ μέλος έχει ορισθεί από τη σχέση

(1.7) και είναι ανεξάρτητο από βάσεις. Επομένως, αν a_i' και b_i', $i = 1, 2, 3$ είναι οι συνιστώσες των διανυσμάτων $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ αντίστοιχα, ως προς μία άλλη ορθοκανονική βάση, τότε θα είναι:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = a_1'b_1' + a_2'b_2' + a_3'b_3', \\ |\mathbf{a}| &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{a_1'^2 + a_2'^2 + a_3'^2}. \end{aligned}$$

Έστω $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{D}$, $\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$, όπου $\mathbf{b_1}$=$\mathrm{Pr}_\mathbf{a}\mathbf{b}$ η ορθή προβολή του $\mathbf{b}$ στο $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}_2 \perp \mathbf{a}$ (σχήμα 1.20). Είναι:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}\cdot\mathrm{Pr}_\mathbf{a}\mathbf{b}\,. \tag{1.13}$$

Άρα: *Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων ισούται με το εσωτερικό γινόμενο του ενός επί την (ορθή) προβολή του άλλου σ΄ αυτό.* Επί πλέον από τη σχέση (1.13) προκύπτει ότι το μέτρο της προβολής του $\mathbf{b}$ στο $\mathbf{a}$ είναι:

$$|\mathrm{Pr}_\mathbf{a}\mathbf{b}| = \frac{|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}. \tag{1.14}$$

Αν θεωρήσουμε, όπως πριν, την ανάλυση του $\mathbf{b}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες, δηλαδή $\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$, όπου $\mathbf{b_1}$=$\mathrm{Pr}_\mathbf{a}\mathbf{b}//\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}_2 \perp \mathbf{a}$ τότε $\mathbf{b}_1 = \lambda\mathbf{a}$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$, οπότε, από (1.13), έχουμε: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \lambda|\mathbf{a}|^2$ και επομένως $\lambda = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|^2}$. Άρα

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a} \quad \text{και} \quad \mathbf{b_2} = \mathbf{b} - \mathbf{b}_1.$$

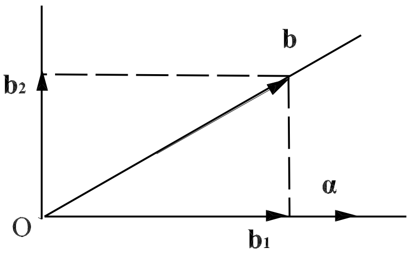
Συνημίτονα διεύθυνσης

Έστω $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ μία ορθοκανονική βάση του $\mathcal{D}$ και $\mathbf{a} \in \mathcal{D}$ με $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$. Αν θέσουμε (σχήμα 1.21) $\theta_1 = (\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{i}})$, $\theta_2 = (\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{j}})$, $\theta_3 = (\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{k}})$ τότε

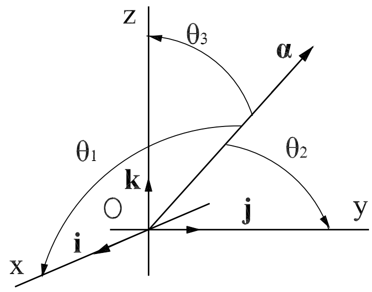
$$a_1 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{i} = |\mathbf{a}|\text{συν}\theta_1,\ a_2 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{j} = |\mathbf{a}|\text{συν}\theta_2,\ a_3 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{k} = |\mathbf{a}|\text{συν}\theta_3$$

Άρα

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (\mathbf{a}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{a}\cdot\mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{a}\cdot\mathbf{k})\mathbf{k} \\ &= |\mathbf{a}|(\text{συν}\theta_1\,\mathbf{i} + \text{συν}\theta_2\,\mathbf{j} + \text{συν}\theta_3\,\mathbf{k}). \end{aligned} \tag{1.15}$$



Σχήμα 1.20:



Σχήμα 1.21:

Προφανώς το διάνυσμα $\sigma\upsilon\nu\theta_1\,\mathbf{i}+\sigma\upsilon\nu\theta_2\,\mathbf{j}+\sigma\upsilon\nu\theta_3\,\mathbf{k}=\dfrac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a}$ είναι μοναδιαίο και παράλληλο προς το $\mathbf{a}$. Άρα

$$\sigma\upsilon\nu^2\theta_1+\sigma\upsilon\nu^2\theta_2+\sigma\upsilon\nu^2\theta_3=1. \tag{1.16}$$

Οι αρθμοί $\lambda_1=\sigma\upsilon\nu\theta_1$, $\lambda_2=\sigma\upsilon\nu\theta_2$, $\lambda_3=\sigma\upsilon\nu\theta_3$ λέγονται **συνημίτονα διεύθυνσης** ή **διευθύνοντα συνημίτονα** του διανύσματος $\mathbf{a}$ ως προς τη βάση $\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$.

1.9 Εξωτερικό γινόμενο

Το **εξωτερικό γινόμενο** δύο διανυσμάτων $\mathbf{a},\mathbf{b}$ είναι ένα διάνυσμα που συμβολίζεται με $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ και ορίζεται ως εξής:

1. Αν τα $\mathbf{a},\mathbf{b}$ είναι μη συγγραμμικά τότε το μέτρο, η διεύθυνση και η φορά του $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ ορίζονται από τις σχέσεις:

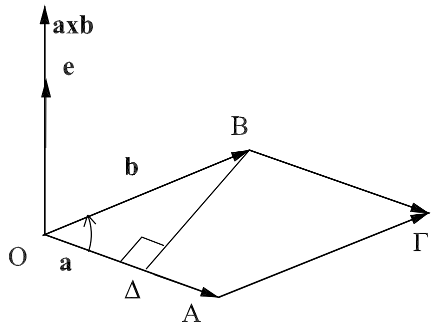
$$\begin{array}{ll}
\textbf{(i)} & |\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=|\mathbf{a}||\mathbf{b}||\eta\mu(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}})|,\\
\textbf{(ii)} & (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\perp\mathbf{a},\quad (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\perp\mathbf{b},\\
\textbf{(iii)} & \text{Η βάση}\quad \{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{a}\times\mathbf{b}\}\quad \text{είναι δεξιόστροφη.}
\end{array}$$

2. Αν τα $\mathbf{a},\mathbf{b}$ είναι μη μηδενικά και συγγραμμικά, ή αν ένα από αυτά είναι μηδέν ορίζουμε ως $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{0}$. Προφανώς μπορούμε να γράψουμε $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=$

$|\mathbf{a}||\mathbf{b}||\eta\mu(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}})|\mathbf{e}$, όπου $\mathbf{e}$ είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα κατά τη φορά του $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$.

Αν ΒΔ είναι το ύψος του παραλληλογράμμου ΟΑΓΒ με βάση την ΟΑ, τότε το εμβαδόν του E είναι (σχήμα 1.22):

$$E = |\mathbf{a}|(\mathrm{B}\Delta) = |\mathbf{a}||\mathbf{b}||\eta\mu(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}})| = |\mathbf{a}\times\mathbf{b}|.$$



Σχήμα 1.22:

Άρα το μέτρο του εξωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων $\mathbf{a},\mathbf{b}$ είναι ίσο με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που έχει ως διαδοχικές πλευρές τις $\mathbf{OA} = \mathbf{a}$ και $\mathbf{OB} = \mathbf{b}$. Άμεση συνέπεια του ορισμού είναι ότι:

$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad ή \quad \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad ή \quad \mathbf{a}//\mathbf{b}$.

Για οποιαδήποτε διανύσματα $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ και $\lambda\in\mathbb{R}$ ισχύουν οι ιδιότητες:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{b}\times\mathbf{a}.\\
&(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c} = \mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}.\\
&\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}.\\
&(\lambda\mathbf{a})\times\mathbf{b} = \mathbf{a}\times(\lambda\mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b}).
\end{aligned}$$

Αν $\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$ είναι μία δεξιόστροφη ορθοκανονική βάση τότε:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{i}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}\times\mathbf{k} = \mathbf{0}.\\
&\mathbf{i}\times\mathbf{j} = \mathbf{k},\ \mathbf{j}\times\mathbf{k} = \mathbf{i},\ \mathbf{k}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}.
\end{aligned}$$

οπότε, αν ως προς τη βάση αυτή είναι: $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}$ και $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}$, θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}\times\mathbf{b} &= (a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k})\times(b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k})\\
&= (a_2b_3-a_3b_2)\mathbf{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\mathbf{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\mathbf{k}\\
&= \begin{vmatrix} a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\mathbf{k}.
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η έκφραση αυτή προκύπτει από το ανάπτυγμα ως προς τα στοιχεία της πρώτης γραμμής της συμβολικής «ορίζουσας»:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \tag{1.18}$$

Η σχέση (1.17), ισοδύναμα η (1.18) είναι η έκφραση του εξωτερικού γινομένου ως προς μία δεξιόστροφη ορθοκανονική βάση.

Παράδειγμα 1.9.1. Αν $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ και $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, ως προς μία δεξιόστροφη ορθοκανονική βάση $\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$, τότε

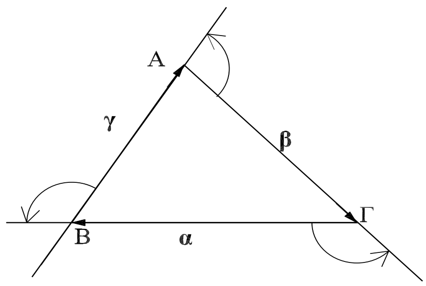
$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -3 & 5 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Παράδειγμα 1.9.2. (Νόμος των ημιτόνων). Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:

$$\frac{\alpha}{\text{ημ}\hat{\text{A}}} = \frac{\beta}{\text{ημ}\hat{\text{B}}} = \frac{\gamma}{\text{ημ}\hat{\Gamma}}.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{\Gamma B}$, $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{A\Gamma}$, $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{BA}$ (σχήμα 1.23). Είναι $\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\beta} = -\boldsymbol{\alpha}$, οπότε $\boldsymbol{\alpha} \times (\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\beta}) = -\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\alpha}$. Επομένως

$$|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|\text{ημ}(\widehat{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}) = |\boldsymbol{\gamma}||\boldsymbol{\alpha}|\text{ημ}(\widehat{\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}}).$$



Σχήμα 1.23:

και άρα

$$\frac{|\boldsymbol{\beta}|}{\text{ημ}(\widehat{\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}})} = \frac{|\boldsymbol{\gamma}|}{\text{ημ}(\widehat{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}})}.$$

Όμως $\text{ημ}(\widehat{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}) = \text{ημ}\hat{\Gamma}$, $\text{ημ}(\widehat{\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}}) = \text{ημ}\hat{\text{B}}$ και θέτοντας για τα μήκη των πλευρών $|\boldsymbol{\beta}| = \beta$, $\quad |\boldsymbol{\gamma}| = \gamma$ έχουμε

$$\frac{\beta}{\text{ημ}\hat{\text{B}}} = \frac{\gamma}{\text{ημ}\hat{\Gamma}}.$$

Όμοια αποδεικνύεται και
$$\frac{\alpha}{\text{ημ}\hat{\text{A}}} = \frac{\gamma}{\text{ημ}\hat{\Gamma}}.$$

Παράδειγμα 1.9.3. Να λυθεί το σύστημα με αγνώστους τα x_1, x_2, x_3:

$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0 \end{aligned}$$

Λύση. Αν θεωρήσουμε τα διανύσματα $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x}$, με συνιστώσες , ως προς μία δεξιόστροφη βάση, τους αριθμούς $a_i, b_i, x_i, \quad i = 1, 2, 3$ αντίστοιχα, τότε το σύστημα γράφεται:
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = 0, \quad \mathbf{b} \cdot \mathbf{x} = 0.$$

Η επίλυση του συστήματος ισοδυναμεί με την εύρεση των διανυσμάτων $\mathbf{x}$ που είναι κάθετα στα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ και άρα συγγραμμικά με το $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Επομένως

$$\mathbf{x} = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}), \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Άρα η λύση του συστήματος είναι:

$$x_1 = \lambda(a_2b_3 - a_3b_2), \quad x_2 = \lambda(a_3b_1 - a_1b_3), \quad x_3 = \lambda(a_1b_2 - a_2b_1).$$

1.10 Μικτό γινόμενο

Το **μικτό γινόμενο** τριών διανυσμάτων $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ είναι ένας αριθμός $(\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}) \in \mathbb{R}$ που ορίζεται από τη σχέση:

$$(\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}). \tag{1.19}$$

Μολονότι το μικτό γινόμενο ορίζεται άμεσα από το εσωτερικό και το εξωτερικό γινόμενο, αξίζει ιδιαίτερης προσοχής λόγω των ιδιοτήτων του και της γεωμετρικής του σημασίας. Από τον ορισμό προκύπτει άμεσα ότι

$$(\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}) = |\mathbf{a}||\mathbf{b}||\mathbf{c}||\text{ημ}\theta|\text{συν}\phi,$$

όπου $\theta = (\widehat{\mathbf{b}, \mathbf{c}})$ και $\phi = (\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}\times\mathbf{c}})$. Αν θεωρήσουμε το παραλληλεπίπεδο με πλευρές $\mathbf{OA} = \mathbf{a}, \mathbf{OB} = \mathbf{b}, \mathbf{O\Gamma} = \mathbf{c}$ (σχήμα 1.24). Ο αριθμός $|B| = |\mathbf{b}||\mathbf{c}|\,|\eta\mu\theta|$ είναι το εμβαδόν της βάσης, δηλαδή του παραλληλογράμμου ΟΒΖΓ. Το ύψος του παραλληλεπιπέδου είναι ο αριθμός $h = |\mathbf{a}|\,|\sigma\upsilon\nu\phi|$. Επομένως ο όγκος του παραλληλεπιπέδου είναι:

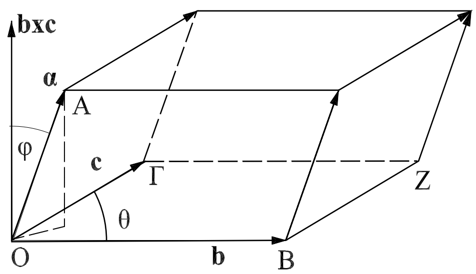
$$V = |B|\,h = |(\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c})|. \tag{1.20}$$

Άρα η απόλυτη τιμή του μικτού γινομένου τριών διανυσμάτων είναι ίση με τον όγκο του παραλληλεπιπέδου που σχηματίζουν.

Από τη σχέση (1.20) προκύπτει ότι τα διανύσματα $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ είναι συνεπίπεδα (γραμμικώς εξαρτημένα) αν και μόνο αν

$$(\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}) = 0.$$

Πράγματι αν είναι συνεπίπεδα τότε $V = 0$ και άρα $(\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}) = 0$. Αντιστρόφως, αν $(\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}) = 0$ τότε: είτε τουλάχιστον ένα από τα $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα είτε το $\mathbf{b}$ είναι συγγραμμικό με το $\mathbf{c}$, είτε το $\mathbf{a}$ είναι κάθετο στο $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$. Σε κάθε περίπτωση τα $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ είναι συνεπίπεδα.



Σχήμα 1.24:

Αν $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ είναι μία δεξιόστροφη ορθοκανονική βάση και $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = c_1\mathbf{i}+c_2\mathbf{j}+c_3\mathbf{k}$, τότε η έκφραση του μικτού γινομένου ως προς τη βάση αυτή είναι (προκύπτει από τις σχέσεις (1.10), (1.17) και (1.19)):

$$(\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{1.21}$$

Από τον ορισμό του μικτού γινομένου ή την έκφραση (1.21) προκύπτουν οι ιδιότητες:

$$(\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}) = (\mathbf{c}\,\mathbf{a}\,\mathbf{b}) = (\mathbf{b}\,\mathbf{c}\,\mathbf{a}) = -(\mathbf{b}\,\mathbf{a}\,\mathbf{c}) = -(\mathbf{c}\,\mathbf{b}\,\mathbf{a}) = -(\mathbf{a}\,\mathbf{c}\,\mathbf{b}). \tag{1.22}$$

Αν τα διανύσματα $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ δεν είναι συνεπίπεδα τότε $(\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}) > 0$ ή $(\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}) < 0$. Είναι $(\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}) > 0$ αν και μόνο αν η βάση $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ είναι δεξιόστροφη.

Πράγματι, επειδή και η $\{\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{b}\times\mathbf{c}\}$ είναι δεξιόστροφη, η $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ θα είναι δεξιόστροφη αν και μόνο αν τα διανύσματα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ βρίσκονται στον ίδιο ημίχωρο που ορίζεται από ένα επίπεδο παράλληλο προς τα $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ από κάποιο σημείο O και από τα $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ (σχήμα 1.24). Αυτό όμως συμβαίνει αν και μόνο αν $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}\times\mathbf{c}}) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, αν και μόνο αν συν$(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}\times\mathbf{c}}) > 0$, αν και μόνο αν $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}) > 0$.

1.11 Γενικά παραδείγματα και εφαρμογές

1. Να αποδειχθεί η επιμεριστική ιδιότητα του εξωτερικού γινομένου:

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\times\mathbf{b} + \mathbf{a}\times\mathbf{c}.$$

Απόδειξη. Έστω $\mathbf{u} = \mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c}) - \mathbf{a}\times\mathbf{b} - \mathbf{a}\times\mathbf{c}$ και $\mathbf{v}$ ένα τυχαίο διάνυσμα. Τότε

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{u} = \mathbf{v}\cdot[\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})] - \mathbf{v}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) - \mathbf{v}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{c}).$$

Αλλά από τη σχέση (1.22) έχουμε $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$, άρα

$$\begin{aligned}\mathbf{v}\cdot\mathbf{u} &= (\mathbf{v}\times\mathbf{a})\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) - (\mathbf{v}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} - (\mathbf{v}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{c} \\ &= (\mathbf{v}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} + (\mathbf{v}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{c} - (\mathbf{v}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} - (\mathbf{v}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{c} = \mathbf{0}.\end{aligned}$$

Επειδή αυτό ισχύει για κάθε διάνυσμα $\mathbf{v}$ έπεται ότι $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ (γιατί;).

2. Το **δις-εξωτερικό γινόμενο** τριών διανυσμάτων $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ ορίζεται ως το διάνυσμα $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$. Να δειχθεί ότι

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}.$$

Απόδειξη. Αν ως προς μία δεξιόστροφη ορθοκανονική βάση $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ τα διανύσματα $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, έχουν συνιστώσες $a_i,\ b_i,\ c_i\ i = 1, 2, 3$ αντίστοιχα, τότε

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_2c_3 - b_3c_2 & b_3c_1 - b_1c_3 & b_1c_2 - b_2c_1 \end{vmatrix} \\
&= (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)\mathbf{b} - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)\mathbf{c} \\
&= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}.
\end{aligned}$$

Από την ταυτότητα αυτή προκύπτουν και οι ταυτότητες:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}. \\
&(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{d})\mathbf{c} - (\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c})\mathbf{d}.
\end{aligned} \tag{1.23}$$

Η πρώτη είναι γνωστή και ως ταυτότητα του Jacobi.

3. Ανάλυση διανύσματος. Δίνονται δύο μη συγγραμμικά διανύσματα $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ και ένα διάνυσμα $\mathbf{d}$ το οποίο θέλουμε να αναλύσουμε σε δύο συνιστώσες, δηλαδή $\mathbf{d} = \mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2$, έτσι ώστε το διάνυσμα $\mathbf{d}_1$ να είναι κάθετο προς ένα επίπεδο που διέρχεται από κάποιο σημείο O και είναι παράλληλο προς τα $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, και το $\mathbf{d}_2$ να είναι παράλληλο προς το επίπεδο αυτό. Αφού $\mathbf{d}_1 \perp \mathbf{a}$, $\mathbf{d}_1 \perp \mathbf{b}$ θα υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $\mathbf{d}_1 = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$. Επομένως $\mathbf{d} = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + \mathbf{d}_2$. Σχηματίζοντας το εσωτερικό γινόμενο της σχέσης αυτής με το διάνυσμα $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ προκύπτει: $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{d} = \lambda\,|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2$ και άρα $\lambda = \dfrac{(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{d}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2} = \dfrac{(\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{d})}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2}$. Επομένως

$$\mathbf{d}_1 = \frac{(\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{d})}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}), \quad \mathbf{d}_2 = \mathbf{d} - \mathbf{d}_1.$$

4. Αν $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ είναι τρία μη συνεπίπεδα διανύσματα να δειχθεί ότι για κάθε άλλο διάνυσμα $\mathbf{d}$ ισχύει

$$\mathbf{d} = \frac{(\mathbf{d}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c})}{(\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c})}\mathbf{a} + \frac{(\mathbf{a}\,\mathbf{d}\,\mathbf{c})}{(\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c})}\mathbf{b} + \frac{(\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{d})}{(\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c})}\mathbf{c}.$$

Η σχέση αυτή δίνει τις συνιστώσες του $\mathbf{d}$ ως προς τη βάση $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$.

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας τη δεύτερη από τις ταυτότητες (1.23) και τις σχέσεις (1.22) έχουμε:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) &= -(\mathbf{c} \times \mathbf{d}) \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) \times (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \\
&= (\mathbf{c}\,\mathbf{d}\,\mathbf{a})\mathbf{b} - (\mathbf{c}\,\mathbf{d}\,\mathbf{b})\mathbf{a},
\end{aligned}$$

οπότε $\quad (\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{d})\mathbf{c}-(\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c})\mathbf{d}=(\mathbf{c}\,\mathbf{d}\,\mathbf{a})\mathbf{b}-(\mathbf{c}\,\mathbf{d}\,\mathbf{b})\mathbf{a}=-(\mathbf{a}\,\mathbf{d}\,\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{d}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c})\mathbf{a}.$
Από την τελευταία προκύπτει η αποδεικτέα σχέση.

5. Έστω $\mathbf{a},\mathbf{b}$ γνωστά διανύσματα του $\mathcal{D}$ και η εξίσωση

$$\mathbf{x}+\mathbf{x}\times\mathbf{a}=\mathbf{b} \tag{1.24}$$

(i) Να δειχθεί ότι αν η εξίσωση έχει λύση αυτή θα είναι μοναδική.
(ii) Να λυθεί η εξίσωση.
Απόδειξη. (i) Έστω ότι η εξίσωση έχει δύο λύσεις $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$. Τότε είναι

$$\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_1\times\mathbf{a}=\mathbf{b}, \qquad \mathbf{x}_2+\mathbf{x}_2\times\mathbf{a}=\mathbf{b}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις αυτές έχουμε: $\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2+(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)\times\mathbf{a}=\mathbf{0}$. Πολλαπλασιάζοντας την τελευταία εσωτερικά επί $\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2$ προκύπτει $|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|^2=0$, απ' όπου έπεται $\mathbf{x}_1=\mathbf{x}_2$.
(ii) Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση (1.24) εξωτερικά από δεξιά με $\mathbf{a}$:

$$\mathbf{x}\times\mathbf{a}+(\mathbf{x}\times\mathbf{a})\times\mathbf{a}=\mathbf{b}\times\mathbf{a} \;\Rightarrow\; \mathbf{x}\times\mathbf{a}-|\mathbf{a}|^2\mathbf{x}+(\mathbf{x}\cdot\mathbf{a})\mathbf{a}=\mathbf{b}\times\mathbf{a}. \tag{1.25}$$

Επίσης η (1.24) γράφεται $\mathbf{x}\times\mathbf{a}=\mathbf{b}-\mathbf{x}$, οπότε πολλαπλασιάζοντας εσωτερικά με $\mathbf{a}$ έχουμε:

$$(\mathbf{x}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{a}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}-\mathbf{x}\cdot\mathbf{a} \;\Rightarrow\; \mathbf{x}\cdot\mathbf{a}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}. \tag{1.26}$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (1.25) τα $\mathbf{x}\times\mathbf{a}$ και $\mathbf{x}\cdot\mathbf{a}$ (1.26) έχουμε:

$$\begin{aligned}\mathbf{b}-\mathbf{x}+(\mathbf{b}\cdot\mathbf{a})\mathbf{a}-|\mathbf{a}|^2\mathbf{x}=\mathbf{b}\times\mathbf{a} \;&\Rightarrow\; (1+|\mathbf{a}|^2)\mathbf{x}=(\mathbf{b}\cdot\mathbf{a})\mathbf{a}-\mathbf{b}\times\mathbf{a}+\mathbf{b}\\ &\Rightarrow \mathbf{x}=\frac{1}{1+|\mathbf{a}|^2}\left[\mathbf{b}+(\mathbf{b}\cdot\mathbf{a})\mathbf{a}+\mathbf{a}\times\mathbf{b}\right],\end{aligned}$$

η οποία είναι λύση, αφού επαληθεύει την εξίσωση.

1.12 Ασκήσεις

1. Δίνεται κανονικό πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ. Να βρεθούν οι συνιστώσες των διανυσμάτων **ΑΓ**, **ΑΔ** ως προς τη βάση $\{$**ΑΒ**, **ΑΕ**$\}$.

2. Αν τα διανύσματα $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ δεν είναι συνεπίπεδα, να αποδειχθεί ότι και τα διανύσματα $\mathbf{u} = 2\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{v} = \mathbf{a} + 2\mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{w} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + 2\mathbf{c}$ δεν είναι συνεπίπεδα.

3. Να αποδειχθεί ότι τα σημεία $\mathrm{A}(1,2,-1)$, $\mathrm{B}(0,1,5)$, $\Gamma(-1,2,1)$ και $\Delta(2,1,3)$ βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο.

4. Να υπολογισθούν οι γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ αν $\mathbf{AB} = 2\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$, $\mathbf{A\Gamma} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j}$, όπου $\{\mathbf{i},\ \mathbf{j}\}$ είναι μία ορθοκανονική βάση.

5. Να δειχθεί με τη βοήθεια καταλλήλων διανυσμάτων ότι τα ύψη ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.

6. Αν $\mathbf{a},\ \mathbf{b}$ είναι δύο μη συγγραμμικά διανύσματα, να βρεθούν οι συνιστώσες ενός διανύσματος $\mathbf{c}$ ως προς τη βάση $\{\mathbf{a},\ \mathbf{b}\}$ με τη βοήθεια των εσωτερικών γινομένων $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}$, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$, $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}$, $\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}$.

7. Να αποδειχθεί ότι:

(i) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) = (\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c})^2$.

(ii) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\,(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}) - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})\,(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$.

(iii) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})^2 + (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2\mathbf{b}^2$.

(iv) Αν $\mathbf{a} = \mathbf{b}\times\mathbf{c}$, $\mathbf{b} = \mathbf{c}\times\mathbf{a}$, $\mathbf{c} = \mathbf{a}\times\mathbf{b}$, να δειχθεί ότι τα $\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c}$ είναι ανά δύο κάθετα και μοναδιαία.

8. Να αποδειχθούν οι ταυτότητες (1.23).

9. Να υπολογισθεί ο όγκος του τετραέδρου ΟΑΒΓ, όπου $\mathbf{OA} = 3\mathbf{i}+4\mathbf{j}$, $\mathbf{OB} = -3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ και $\mathbf{O\Gamma} = 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$.

10. Δύο βάσεις διανυσμάτων $A = \{\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \mathbf{a}_3\}$ και $B = \{\mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2,\ \mathbf{b}_3\}$ λέγονται **αμοιβαίες** (reciprocal) αν $\mathbf{a}_i\cdot\mathbf{b}_j = \delta_{ij}$, $i,j = 1,2,3$, όπου $\delta_{ij} = 1$, αν $i = j$ και $\delta_{ij} = 0$, αν $i \neq j$. (Το δ_{ij} λέγεται **δέλτα του Kronecker**). Να αποδειχθεί ότι αν $V = (\mathbf{a}_1\,\mathbf{a}_2\,\mathbf{a}_3)$, οι βάσεις A, B είναι αμοιβαίες αν και μόνο αν ισχύει:

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\mathbf{a}_2\times\mathbf{a}_3}{V}, \quad \mathbf{b}_2 = \frac{\mathbf{a}_3\times\mathbf{a}_1}{V}, \quad \mathbf{b}_3 = \frac{\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2}{V}.$$

11. Αν $A = \{\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \mathbf{a}_3\}$, $B = \{\mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2,\ \mathbf{b}_3\}$ είναι δύο αμοιβαίες βάσεις, $\mathbf{r}$ τυχαίο διάνυσμα και $V = (\mathbf{a}_1\,\mathbf{a}_2\,\mathbf{a}_3)$, να αποδειχθεί ότι:

1. $V' = (\mathbf{b}_1\,\mathbf{b}_2\,\mathbf{b}_3) = {}^1\!/_V$
2. $\mathbf{r} = (\mathbf{r}\cdot\mathbf{b}_1)\mathbf{a}_1 + (\mathbf{r}\cdot\mathbf{b}_2)\mathbf{a}_2 + (\mathbf{r}\cdot\mathbf{b}_3)\mathbf{a}_3$.

12. Να βρεθεί ένα διάνυσμα $\mathbf{x}$ τέτοιο ώστε: $\mathbf{x} \times \mathbf{a} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{c} = \lambda$, όπου $\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c}$, γνωστά διανύσματα με $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \neq 0$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ γνωστός αριθμός.

13. Να λυθεί ως προς $\mathbf{x}$ η εξίσωση: $\mathbf{a} \times \mathbf{x} = \mathbf{b}$, όπου $\mathbf{a},\ \mathbf{b}$ γνωστά διανύσματα με $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$.

14. Θεωρούμε τετράεδρο ΑΒΓΔ με έδρες E_1, E_2, E_3, E_4. Αν $\boldsymbol{\varepsilon_1},\ \boldsymbol{\varepsilon_2},\ \boldsymbol{\varepsilon_3},\ \boldsymbol{\varepsilon_4}$, είναι αντίστοιχα τα κάθετα στις έδρες αυτές διανύσματα, με μέτρα ίσα προς τα αντίστοιχα εμβαδά των εδρών και φορά προς το εξωτερικό του τετραέδρου, να αποδειχθεί ότι είναι: $\boldsymbol{\varepsilon_1} + \boldsymbol{\varepsilon_2} + \boldsymbol{\varepsilon_3} + \boldsymbol{\varepsilon_4} = \mathbf{0}$.

15. Θεωρούμε ν σημεία του χώρου $A_i(\mathbf{r}_i),\ i = 1, 2, ..., \nu$. Να αποδειχθεί ότι η σχέση $\lambda_1\mathbf{r}_1 + \lambda_2\mathbf{r}_2 + \cdots + \lambda_\nu\mathbf{r}_\nu = \mathbf{0}$ είναι ανεξάρτητη από την επιλογή της αρχής Ο, αν και μόνο αν $\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_\nu = 0$. Να δοθεί μία γεωμετρική ερμηνεία για $\nu = 2, 3$.

16. Θεωρούμε τα ν σημεία του χώρου $A_1,\ A_2, ..., A_\nu$ και τους αντίστοιχους προς αυτά αριθμούς $m_1,\ m_2,\ \ldots, m_\nu$ με $\sum\limits_{i=1}^{\nu} m_i = M \neq 0$. (Π.χ. ο αριθμός m_i να είναι η μάζα υλικού σημείου που είναι στη θέση A_i). Ορίζουμε το **βαρύκεντρο** του συνόλου των ζευγών $A = \{(A_1, m_1),\ (A_2, m_2), ..., (A_\nu, m_\nu)\}$ ως το ζεύγος (G, M), όπου G το σημείο που ορίζεται από τη σχέση $\sum\limits_{i=1}^{\nu} m_i\mathbf{GA}_i = \mathbf{0}$. Να αποδειχθεί ότι:

(i) Το σημείο G, όπως ορίστηκε πιο πάνω, είναι μοναδικό.

(ii) Αν είναι $A_i(\mathbf{r}_i)$, ως προς κάποια αρχή, τότε το διάνυσμα θέσης $\mathbf{g}$ του G είναι:

$$\mathbf{g} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \cdots + m_\nu\mathbf{r}_\nu}{M}.$$

(iii) Αν το σύνολο A έχει βαρύκεντρο (G, M), το σύνολο ζευγών $A' = \{(A_i, cm_i), i = 1, ..., \nu\}$, όπου c σταθερά, έχει βαρύκεντρο (G, cM).

(iv) Αν S είναι ένα υποσύνολο του A με βαρύκεντρο (G_S, M_S) (με άθροισμα των αντίστοιχων αριθμών, τον αριθμό M_S), τότε το βαρύκεντρο του συνόλου $(B \setminus S) \cup \{(\mathrm{G}_S, M_S)\}$ είναι επίσης το (G, M). Δηλαδή, το βαρύκεντρο ενός συνόλου ζευγών δεν μεταβάλλεται αν κάποια από τα ζεύγη του συνόλου αντικατασταθούν με το βαρύκεντρό τους.