

Δύοτομα & Παράτη6ες Εργασίας 1

$$1) \quad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (1, -5, 1), \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 + 0 - 3 = -1$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = -2$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{2}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{14}, \quad \vec{b} \times \vec{c} = (4, -2, -2), \quad \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (-2, -2, -2)$$

Αρα:

A) $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = 27 \Rightarrow$ η απόδειξη γίνεται: $27 + (-1)^2 = 2 \cdot 14$
που είναι αληθές

B) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (1, 0, -1) \times (4, -2, -2) = (-2, -2, -2)$

$$\left. \begin{aligned} (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} &= -2(2, 1, 3) \\ (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c} &= -1(2, 0, 4) \end{aligned} \right\} \Rightarrow (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c} = (-2, -2, -2)$$

αφ' ου η απόδειξη αληθές.

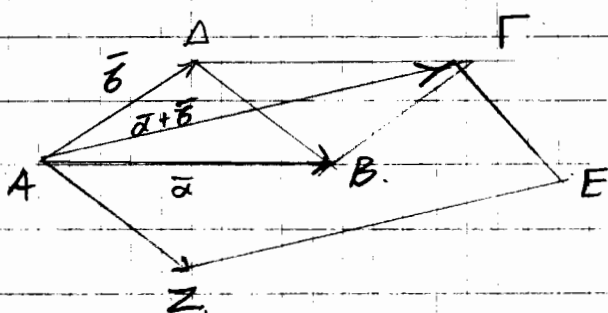
$$2) \quad (\vec{a} \times \vec{b} \quad \vec{b} \times \vec{c} \quad \vec{c} \times \vec{a}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot [(\vec{b} \times \vec{c}) \times (\vec{c} \times \vec{a})]$$

$$= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot [((\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}) \vec{c} - ((\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{c}) \vec{a}] =$$

$$= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot [(\vec{a} \cdot \vec{b} \vec{c}) \vec{c} - 0] = (\vec{a} \cdot \vec{b} \vec{c}) (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{b} \vec{c})^2$$

$$3) \quad (\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b}) = (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{a} - (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{b} =$$

$$= \vec{a} \times \vec{a} + \vec{b} \times \vec{a} - \vec{a} \times \vec{b} - (\vec{b} \times \vec{b}) = -2(\vec{a} \times \vec{b}) = -(2, -4, -4)$$



$$\vec{A\Gamma} = \vec{a} + \vec{b}, \quad \vec{A\bar{B}} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{A\bar{Z}}$$

$$(AB\Gamma\Delta) = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

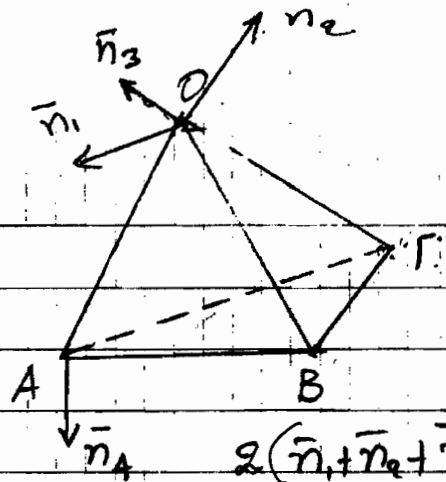
$$(A\Gamma\bar{E}ZA) = |\vec{A\bar{Z}} \times \vec{A\Gamma}| = |\vec{A\Gamma} \times \vec{A\bar{Z}}|$$

$$= |(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})| = |-2(\vec{a} \times \vec{b})|$$

$$= 2|\vec{a} \times \vec{b}| = 2(AB\Gamma\Delta)$$

4) Αμεση εφαρμογή των ορισμών των $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{a} \cdot \vec{b}$

5)



Είναι (αξιοποιούμε) :

$$2\vec{n}_1 = \vec{OA} \times \vec{OB}$$

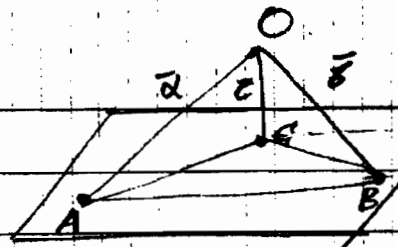
$$2\vec{n}_2 = \vec{OB} \times \vec{OG}$$

$$2\vec{n}_3 = \vec{OG} \times \vec{OA}$$

$$2\vec{n}_4 = \vec{AB} \times \vec{AG}$$

$$\begin{aligned} 2(\vec{n}_1 + \vec{n}_2 + \vec{n}_3 + \vec{n}_4) &= \vec{OA} \times \vec{OB} + \vec{OB} \times \vec{OG} + \vec{OG} \times \vec{OA} + \vec{AB} \times \vec{AG} \\ &= \vec{OA} \times \vec{OB} + \vec{OB} \times \vec{OG} + \vec{OG} \times \vec{OA} + (\vec{OG} - \vec{OA}) \times (\vec{OB} - \vec{OA}) \\ &= \vec{OA} \times \vec{OB} + \vec{OB} \times \vec{OG} + \vec{OG} \times \vec{OA} + \vec{OG} \times \vec{OB} + \vec{OA} \times \vec{OA} - \vec{OG} \times \vec{OA} - \vec{OA} \times \vec{OB} \\ &= \vec{OB} \times \vec{OG} + \vec{OG} \times \vec{OB} = \vec{0} \end{aligned}$$

6)



A) Αρκεί να δείξουμε ότι :

$$\vec{n} \cdot \vec{AB} = \vec{n} \cdot \vec{AC} = 0$$

πρώτη κρούση :

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \vec{AB} &= \vec{n} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{n} \cdot \vec{b} - \vec{n} \cdot \vec{c} = \\ &= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} + (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{b} + (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} - (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} - (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{c} - (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{c} \\ &= (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} - (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \cdot \vec{c} \cdot \vec{a}) - (\vec{c} \cdot \vec{a} \cdot \vec{b}) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Ομοίως } \vec{n} \cdot \vec{AC} = \vec{n} \cdot (\vec{c} - \vec{a}) = \dots = 0$$

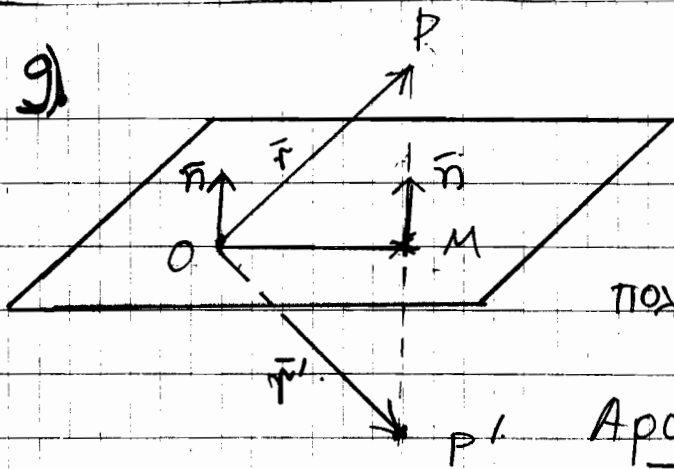
$$\begin{aligned} \text{B) } F &= \frac{1}{2} (ABDC) = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| \cdot |\vec{b} - \vec{a}| \cdot |\vec{c} - \vec{a}| = \\ &= |\vec{b} \times \vec{c} - \vec{b} \times \vec{a} - \vec{a} \times \vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a}| = |\vec{n}| \end{aligned}$$

$$\text{Γ) Αρκεί } (\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \epsilon = 2$$

Εκκινώντας από το γεγονός ότι είναι το $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \dots$

$$\begin{aligned} \text{8) } \text{Εστω } \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}, \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j &= 0 \quad \forall i \neq j \\ \text{Εστω } k\vec{e}_1 + \lambda\vec{e}_2 + \mu\vec{e}_3 &= \vec{0} \Rightarrow k\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 + \lambda\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 + \mu\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 = 0 \\ \Rightarrow k|\vec{e}_1|^2 &= 0 \Rightarrow k = 0 \quad (\text{δίδει } \vec{e}_i \neq \vec{0}) \\ \text{Ομοίως } \lambda = \mu &= 0 \Rightarrow \text{γφ. ανεξάρτητων} \end{aligned}$$

9)



$$\text{Ισχύει: } \frac{\vec{r} + \vec{r}'}{2} = \vec{O \cdot M} \quad (1)$$

Ομωσ

$$\vec{OM} = \vec{PM} - \vec{PO} = \lambda \vec{n} + \vec{r} \quad (2)$$

πολ/ζουμε επι $\vec{n}$

$$\vec{n} \cdot \vec{OM} = 0 = \lambda |\vec{n}|^2 + \vec{r} \cdot \vec{n} = \lambda + \vec{r} \cdot \vec{n}$$

$$\text{Αρα: } \lambda = -\vec{r} \cdot \vec{n} \text{ οπότε από (2)} \\ \vec{OM} = \vec{r} - (\vec{r} \cdot \vec{n}) \vec{n} \quad (3)$$

Τότε η (1) γίνεται: $\vec{r} + \vec{r}' = 2\vec{r} - 2(\vec{r} \cdot \vec{n}) \vec{n}$
απο όπου προκύπτει η ζητούμενη.

Επίσης:

$$\text{Sym}_{\pi}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2) = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 - 2((\vec{r}_1 + \vec{r}_2) \cdot \vec{n}) \vec{n} \\ = \vec{r}_1 - 2(\vec{r}_1 \cdot \vec{n}) \vec{n} + \vec{r}_2 - 2(\vec{r}_2 \cdot \vec{n}) \vec{n}.$$

Ομοία. αποδεικνύεται και η β).

10) α) Έστω $A(0, 2, 0) \in (E_2)$ τότε $(E_3):$ $x = x_0 + t$
 $y = 1 + 3t$
 $z = 4t$

Αρα το $\pi \perp \vec{n} = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = (2, 2, 1) \times (2, 3, 4)$
όπου $\vec{u}_1 \parallel E_1$ και $\vec{u}_2 \parallel E_2$. Αρα $(\pi): 5x - 6y + 2z + 6 = 0$

β) Έστω $B(1, 2, 3) \in (E_1)$ τότε $B\Gamma: x = 1 + 5t, y = 2 - 6t, z = 3 + 2t$
 $\xrightarrow{(\pi)} t = -1/3 \Rightarrow \Gamma(8/13, 32/13, 37/13).$

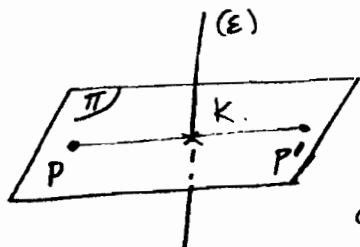
γ) $\Gamma\kappa: x = 8/13 + 3t, y = 32/13 + 3t, z = 37/13 + 4t$
Απο αυτήν και την (E_2) προκύπτει το $\kappa(-14/13, -1/13, -7/13)$

δ) $\kappa\lambda: x = -14/13 + 5\lambda, y = -1/13 - 6\lambda, z = -7/13 + 2\lambda$
Απο αυτήν και την (E_1) προκύπτει $\lambda(-9/13, -7/13, -5/13)$

Τα σημεία κ, λ καθορίζουν την κοινή κάθετη γ δε απόσταση $d = (\kappa\lambda)$.

Οι ευθείες δεν είναι παράλληλες αφού δεν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$ με
 $(2, 3, 4) = \lambda(2, 2, 1)$ και δεν τέμνονται αφού το σύστημα των
7 εξισώσεων εξισώσεων (E_1) και (E_2) δεν έχει λύση.

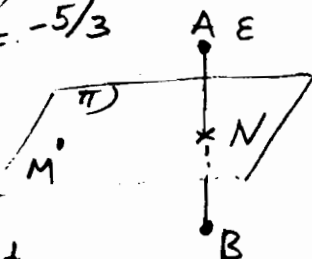
11) Η (Ε) έχει παρ. παράγωγη: $x = -t, y = t, z = t$



Για την εύρεση του σημείου τομής Κ με το επίπεδο αντικαθιστούμε τις εξισώσεις κιν. στην εξίσωση του (π) που διέρχεται από το Ρ και είναι κάθετο στην (Ε) δηλαδή στην (π): $(x-1)(-1) + (y-0) \cdot 1 + (z-3) \cdot 1 = 0$

για (π) $-x + y + z - 2 = 0$ οπότε $3t = 2 \Rightarrow t = 2/3$
 Άρα $K(-2/3, 2/3, 2/3)$. Αν $P'(x', y', z')$ και το Κ μέσο του $PP' \Rightarrow \overline{PP'} = 2\overline{PK} \Rightarrow x' - 1 = 2(-2/3 - 1), y' - 0 = 2(2/3 - 0)$ και $z' - 3 = 2(2/3 - 3) \Rightarrow x' = -7/3, y' = 4/3, z' = -5/3$

12) Αρκεί να βρούμε την απόσταση (ΜΝ) όπου Ν το σημείο τομής της ΑΒ με το επίπεδο (π) που διέρχεται από το Μ και είναι κάθετο στην ΑΒ.



$\overline{AB} = (1, 2, 2)$, $AB: x = 4 + t, y = 3 + 2t, z = 8 + 2t$
 $\Rightarrow (π): (x+3) \cdot 1 + (y-2) \cdot 2 + (z+1) \cdot 2 = 0 \Rightarrow (π): x + 2y + 2z + 1 = 0$
 Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις της ΑΒ στην (π): $9t + 27 = 0 \Rightarrow t = -3$
 Άρα $N(1, -3, 2)$, οπότε $d(M, E) = d(M, N) = \sqrt{50}$

13) $E_1 // \vec{u}_1 = (1, -1, -1), E_2 // \vec{u}_2 = (1, -1, -1)$
 Επιστρώ το σημείο $(0, 0, 0) \in (E_1)$ και $(0, 0, 0) \notin (E_2) \Rightarrow E_1 // E_2$
 Το τυχόν σημείο Μ της (E_1) είναι $M(t, -t, -t)$
 και το τυχόν σημείο Ν της (E_2) είναι $N(1+\lambda, 1-\lambda, 4-\lambda)$
 Ζητούμε να τυχόν ώστε το $\overline{MN}$ να είναι κάθετο και στις δύο. Άρα $\overline{MN} \cdot (1, -1, -1) = 0 \Leftrightarrow 3\lambda - 3t = 4$
 Κάθε ζεύγος (t, λ) που ικανοποιεί αυτή την εξίσωση ορίζει ένα ζεύγος σημείων Μ και Ν. Επιλέγω $t = 0$
 οπότε $\lambda = 4/3$. Άρα $M_0(0, 0, 0), N_0(7/3, -1/3, 8/3)$
 οπότε $d = (M_0 N_0) = \frac{\sqrt{114}}{3}$

Το επίπεδο ορίζεται από τα M_0, N_0 και $N_1(1, 1, 4) \in (E_2)$.
 Άρα έχει εξίσωση $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 7/3 & -1/3 & 8/3 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \dots$