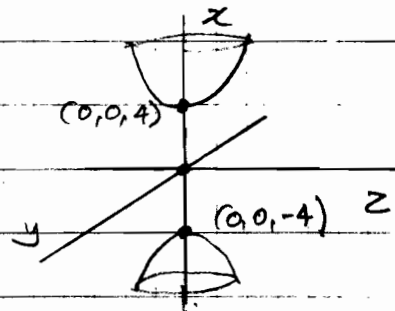
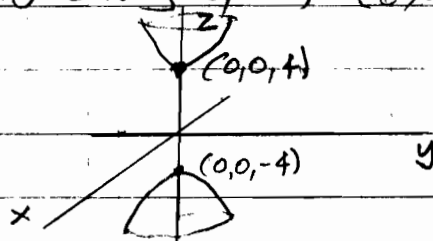
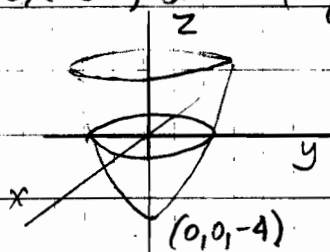


Απαντήσεις (πολύ σύντομες) στην Εργασία 2

4 -

1. α) Τομές με επίπεδα $z=c=\text{σταθ}$ είναι οι ελλείψεις: $z=c, \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = c+4$
ενώ τομές με επίπεδα $x=k=\text{σταθ}$ είναι οι παραβολές $z=(\frac{k^2}{4}+4) + \frac{y^2}{16}, z=k$
όμοια για τομές με επίπεδα $y=l=\text{σταθ}$.

Επίσης παρατηρούμε ότι $z+4 \geq 0 \Rightarrow z \geq -4$. Άρα όλα τα γράμματα της επιφάνειας βρίσκονται 'πάνω' από το επίπεδο $z=-4$. Η επιφάνεια είναι ένα ε>επιπλά παρορθοχονδές (αχ. α). Με παρόμοιο συλλογισμό βρίσκουμε ότι η β) παρίστα δίχωνο υπερβολοειδές (βιβλ. 68, 114 & 431) (προσέξτε ότι για σταθ (x,y,z) της επιφάνειας ικανοποιούμε $|z| \geq 4$) (αχ. β) και η γ) το ίδιο όπως η β) (αχ. γ).



α) ε>. παρθοχονδές. β) δίχωνο υπερβ/δές γ) δίχωνο υπερβολοειδές
!! Προσέξτε τη θέση των αξόνων ειδικά στο αχ. β και αχ. γ.

2. Α) Η (Σ) έχει κέντρο $K(1,0,2)$ και ακτίνα $R=2$

Η προβολή k του K στο (π) είναι η τομή του (π) με κάθετη (β) στο (π) που διέρχεται από το K . Για κάθετο στο (π)

δίνουμε $\vec{n}=(1,0,1) \Rightarrow (β): x=1+t, y=0+t=0, z=2+t \xrightarrow{(\pi)}$
 $(1+t)+(2+t)=1 \Rightarrow 2t=-2 \Rightarrow t=-1 \Rightarrow K_1(0,0,1)$

Β) $(KK_1)=d(K, K_1)=\sqrt{2} < 2=R \Rightarrow$ το (π) τέμνει την (Σ)

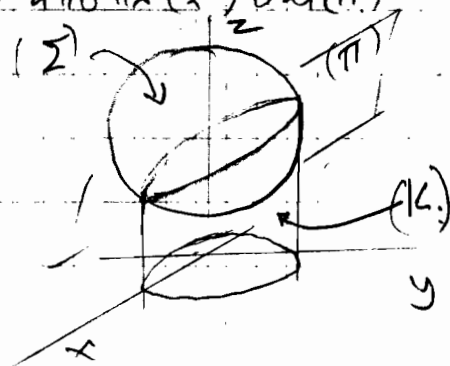
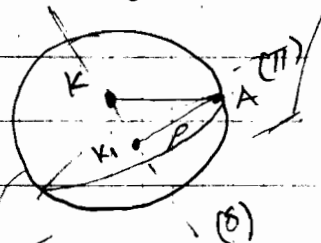
Γ) Κέντρο κύκλου $K_1(0,0,1)$. Ακτίνα κύκλου $\rho=\sqrt{(KA)^2-(KK_1)^2}=\sqrt{R^2-4}=\sqrt{2}$

Δ) Ο κύλινδρος έχει γενέτειρες παράλληλες με τον $z'z$ άξ (να δοθεί πώς είναι εξισωμένη η εξίσωσή του προκύπτει με απλούς, του Z από την (Σ) και (π))
οπότε είναι $(x+1)^2+y^2+(x+1)^2=4 \Rightarrow 2x^2+y^2=2$

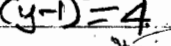
Άρα ο κύλινδρος γράφεται: $\begin{cases} 2x^2+y^2=2 & (K) \\ x+z=1 & (\pi) \end{cases}$

Ε) Μια παρ.μ. παρ.κάμνα

$$\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sqrt{2}\sin t \\ z=1-\cos t \end{cases}$$



$x^2 + (y-1)^2 = 4$



f) $x = 2 \cos t, y = 1 + 2 \sin t, z = 2(1 + 2 \sin t) + 3 = 4 \sin t + 5$

Δ) $r(u,v)=(2\cos u, 1+2\sin u, 4\sin u+5)+v(0,0,1)$ άρα $x=2\cos u, y=1+2\sin u, z=5+4\sin u=v$, στη συνέχεια απαλ. τα u, v για να βρεθεί η καρτεσιανή μορφή.

4.

A) $(0,0) \notin V \Rightarrow V$ δεν είναι δ.χ. B) $(1,2) \in V$ αλλιώς $(-1)(1,2) = (-1, -2) \notin V$ αφού $-1 > -2$.

B) $(0,0,0) \notin V$ άρα το V δεν είναι δ.χ.

Με άλλη μέθοδο επαλήθευσα ή με το βλεπίζω ότι είναι δυο επίπεδα που τέμνονται και το $(0,0,0)$ ανήκει και στα δύο. Άρα η τομή τους είναι ευθεία που διέρχεται από την αρχή και άρα διαν. υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.

Γ) $E = \{(x,y,z,w) : x=z, y=w\} = \{(x,y,x,y), x,y \in \mathbb{R}\}$
 $= \{(x,0,x,0) + (0,y,0,y)\} = \{x(1,0,1,0) + y(0,1,0,1)\}$
 $= [(1,0,1,0), (0,1,0,1)]$ άρα είναι διαν. χώρος.
 ως 2-διάστατο συνόχο.

5.

A) Έστω $u_1 = t^3 + t^2 - 1, u_2 = t^2 + 2t + 1, u_3 = 2t^3 + 3t^2 + 2t - 1$ και $u_4 = t^3 + 3t^2 + 4t + 1$ οπότε $S = [u_1, u_2, u_3, u_4]$
 Ελέγχουμε αν είναι γραμ. ανεξάρτητα: Έστω $\kappa u_1 + \lambda u_2 + \mu u_3 + \nu u_4 = 0$
 Η σχέση αυτή οδηγεί στο σύστημα
 $\kappa + 2\mu + \nu = 0, \kappa + \lambda + 3\mu + 3\nu = 0, 2\lambda + 2\mu + 4\nu = 0, -\kappa + \lambda - \mu + \nu = 0$
 το οποίο με Gauss δίνει την λύση
 $(\kappa, \lambda, \mu, \nu) = \mu(-2, -1, 1, 0) + \nu(-1, -2, 0, 1)$
 Η λύση $\kappa = -2, \lambda = -1, \mu = 1, \nu = 0$ δίνει τη σχέση $u_3 = 2u_1 + u_2$
 ενώ η λύση $\kappa = -1, \lambda = -2, \mu = 0, \nu = 1$ δίνει την $u_4 = u_1 + 2u_2$.
 Άρα.

$$S = [u_1, u_2, 2u_1 + u_2, u_1 + 2u_2] = [u_1, u_2]$$

Ελέγχουμε αν τα u_1, u_2 είναι γραμ. ανεξ. : $\alpha u_1 + \beta u_2 = 0$
 $\Rightarrow \alpha t^3 + (\alpha + \beta)t^2 + 2\beta t + \beta - \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0$.

Άρα $\dim S = 2$ και μια βάση του είναι $\{u_1, u_2\}$

$$B) A^T = -A \Leftrightarrow a_{ij} = -a_{ji} \text{ Άρα } a_{ii} = 0 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \alpha \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Άρα $\dim S_2 = 3$

Με όμοιο τρόπο $\dim S_1 = 6$. $S_1 \cap S_2 = \{A \in \Pi : A = A^T \text{ και } A = -A^T\} = \{0\}$

6.

$$\begin{aligned}
 V_1 &= \{(x, y, z) : z = x + y\} = \{(x, y, x+y), x, y \in \mathbb{R}\} = \\
 &= \{(x, 0, x) + (0, y, y), x, y \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 0, 1) + y(0, 1, 1), x, y \in \mathbb{R}\} \\
 &= [(1, 0, 1), (0, 1, 1)] \text{ είναι γρ. ανεξ. άρα βάση, } \dim V_1 = 2 \\
 V_2 &: \text{ ομοίως } \dim V_2 = 2 \\
 V_1 \cap V_2 &= \{(x, y, z) : x+y=z, 5x-y=z\} = \\
 &= \{(x, y, z) : x = \frac{1}{3}z, y = \frac{2}{3}z\} = \{z(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1)\} \\
 &\quad z \in \mathbb{R} \\
 \text{Άρα } \dim V_1 \cap V_2 &= 1
 \end{aligned}$$

7.

Ζητούμε λ, μ, ν ώστε $(1, -2, 2) = \mu(3, 0, -2) + \nu(2, -1, 5)$
 από όπου $\lambda = -8, \mu = -1, \nu = 2$.

8.

Εξετάζω αν γα. στοιχεία που παράχουν του A ανήκουν
 στον B : $(3, 0, -2) = k(5, -1, -7) + \lambda(8, -1, -9)$
 $\Rightarrow \lambda = 1, k = -1$ άρα $(3, 0, -2) \in B$ Επίσης
 $(2, -1, -5) = \mu(5, -1, -7) + \nu(8, -1, -9) \Rightarrow \mu = 2, \nu = -1$
 Άρα $(2, -1, -5) \in B$. Επομένως $A \subseteq B$.
 Ομοίως αποδεικνύεται ότι $B \subseteq A$. Άρα $A = B$.
2ος τρόπος γα. στοιχεία που παράχουν τους A, B είναι γρ. ανεξ.
 Άρα $A \subseteq B$ και $\dim A = 2 = \dim B \Rightarrow A = B$
3ος τρόπος Οι A και B είναι επίπεδα που διέρχονται από την
 αρχή και έχουν κάθετα διανύσματα:
 $\bar{n}_1 = (3, 0, -2) \times (2, -1, -5) = (-2, -11, -3)$
 $\bar{n}_2 = (5, -1, -7) \times (8, -1, -9) = (2, 11, 3)$ } $\Rightarrow \bar{n}_1 \parallel \bar{n}_2$
 Άρα γα. επίπεδα συμπίπτουν.

9.

$$S_1 \cap S_2 = \{0\} \Rightarrow \pi_2 = S_1 \oplus S_2$$