Εργασία 2 Γραμμική Αλγεβρα και Αναλυτική Γεωμετρία ΧΗΜ. ΜΗΧ. 2014

Παράδοση μέχρι 25/2/14 (κρατείστε ένα αντίγραφο για να το συγκρίνετε με τις λύσεις)

1. Δίνονται οι πίνακες: $\Gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\Delta = \begin{bmatrix} 7 & 1 & -5 & 0 \end{bmatrix}$. α) Να υπολογίσετε τους πίνακες $\Gamma\Delta$, $\Delta\Gamma$ και Γ^T, Δ^T. β) Να επαληθεύσετε τη σχέση: $(\Gamma\Delta)^T = \Delta^T\Gamma^T$.

2. α) Να δειχθεί ότι δεν υπάρχουν τετραγωνικοί πίνακες Α,Β ώστε ΑΒ-ΒΑ=Ι. **β)** Αν ο Α ικανοποιεί τη σχέση $A^\nu + A^{\nu-1} + ... + A + I = 0$, να δειχθεί ότι $A^{-1} = A^\nu$.

3. Με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss να βρείτε, αν υπάρχουν, τις λύσεις των συστημάτων:

α) $\left\{\begin{array}{l} x + 2y - z = 5 \\ 3x - y + 2z = 2 \\ 2x + 11y - 7z = -2 \end{array}\right\}$ **β)** $\left\{\begin{array}{l} x + 2y + z = 1 \\ x + y - z = 3 \\ x - y - z = 5 \\ 2x + 3y + 8z = 0 \end{array}\right\}$

4. Δίνεται το σύστημα (Σ): $\begin{array}{r} y - 2z + 3w = 1 \\ x - 3y + 2z + w = 0 \\ x - y - 2z + 7w = 2 \\ x \quad - 4z + 10w = 2 + k \end{array}$

α) Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου k για τις οποίες το σύστημα (Σ) έχει λύση.

β) Να λύσετε το σύστημα για τις τιμές του k που βρήκατε στο ερώτημα α).

5. Έστω $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. Να βρείτε μια διαγωνοποίηση του Α. Να συμπεράνετε ότι ο Α αντιστρέφεται και να βρείτε μια διαγωνοποίηση του πίνακα A^{-1}. Ποια είναι χαρακτηριστικά ποσά του A^{-1} (Δεν χρειάζεται να υπολογίσετε τον A^{-1}).

6. Με τη βοήθεια του θεωρήματος Cayley - Hamilton, να δείξετε ότι ίσχυει: $A^3 = A$, όπου. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

κατόπιν να υπολογίσετε τον πίνακα $B = 3A^{513} - 2A$ Β = 3Α513 − 2Α .

7. Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ a & -2 & 1 \end{bmatrix}$. Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου α ώστε ο πίνακας Α να έχει ως ιδιοδιάνυσμα το $\mathrm{X} = \begin{bmatrix} 2, & 1, & -2 \end{bmatrix}^T$. Κατόπιν να βρείτε μια διαγωνοποίηση του A^2 .

8. Δίνεται η καμπύλη (γ) $z = 4 - (x^2 + y^2),\ 2y + z = 4$.

Α. Να δειχθεί ότι η προβολή (γ΄) της (γ) στο επίπεδο $z=0$ είναι ένα κύκλος και να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα του.

Β. Να βρεθεί μια παραμετρική παράσταση της (γ΄) και στη συνέχεια της (γ).

Γ. Να γίνουν τα σχετικά σχήματα.

9. Δίνεται η σφαίρα (Σ): $(x-1)^2+y^2+(z-2)^2=4$, και το επίπεδο (π): $x+z=1$.

Α. Να βρεθεί η προβολή του κέντρου της σφαίρας στο επίπεδο (π).

Β) Να δειχθεί ότι το επίπεδο τέμνει τη σφαίρα.

Γ) Να βρεθούν το κέντρο και η ακτίνα του κύκλου που ορίζεται από την τομή της σφαίρας με το επίπεδο.

Δ) Να γραφεί ο ίδιος κύκλος ως τομή κυλίνδρου (ελλειπτικού) με άξονα παράλληλο στον άξονα $z'z$ και επιπέδου. Να γίνουν τα σχετικά σχήματα.

Ε) Να βρεθεί μια παραμετρική παράσταση του παραπάνω κύκλου.

10. Δίνεται η καμπύλη (γ) $z=4-(x^2+y^2),\ 2y+z=4$.

Α. Να δειχθεί ότι η προβολή (γ΄) της (γ) στο επίπεδο $z=0$ είναι ένα κύκλος και να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα του. **Β.** Να βρεθεί μια παραμετρική παράσταση της (γ΄) και στη συνέχεια της (γ). **Γ.** Να γίνουν τα σχετικά σχήματα.

11. Χρησιμοποιώντας την μέθοδο των τομών με επίπεδα παράλληλα προς τα επίπεδα των συντεταγμένων, να γίνει σχεδίαση σε διαφορετικά σχήματα, των επιφανειών με εξισώσεις (βλ. σελ. 113-122 βιβλίου):

α) $z=-4+(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16})$, **β)** $\frac{z^2}{16}-\frac{y^2}{25}=1+\frac{x^2}{36}$ **γ)** $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}=1+\frac{z^2}{36}$

12. Να βρείτε ποιά από τα παρακάτω σύνολα είναι διανυσματικοί υπόχωροι των αντιστοίχων χώρων $\mathbb{R}^n$:

Α) $U=\{(x,y):x^2+y^2=1\}\subset\mathbb{R}^2$, $V=\{(x,y):x\le y\}\subset\mathbb{R}^2$,

Β) $U=\{(x,y,z):2x+y-z=1\}\subset\mathbb{R}^3$, $V=\{(x,y,z):x+y-z=0,\ 5x-y-z=0\}\subset\mathbb{R}^3$

Γ) $E=\{(x,y,z,w):x+y=y+z=z+w=0\}\subset\mathbb{R}^4$

13. Για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ το $(1,-2,\lambda)\in\mathbb{R}^3$ είναι στοιχείο της θήκης $[(3,\ 0,\ -2),\ (2,\ -1,\ -5)]$. Να δοθεί γεωμετρική ερμηνεία.

14. Να εξεταστεί αν ισχύει: $[(3,\ 0,\ -2),\ (2,\ -1,\ -5)]=[(5,\ -1,\ -7),\ (8,\ -1,\ -9)]$.

15. Δίνονται οι διανυσματικοί υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$

$V_1=\{(x,y,z):x+y-z=0\}\subset\mathbb{R}^3$, $V_2=\{(x,y,z):5x-y-z=0\}$ Να βρεθεί μια βάση και η διάστασή των υπόχωρων $V_1, V_2, V_1\cap V_2$.