ΣΤ. ΜΑΡΚΑΤΗΣ

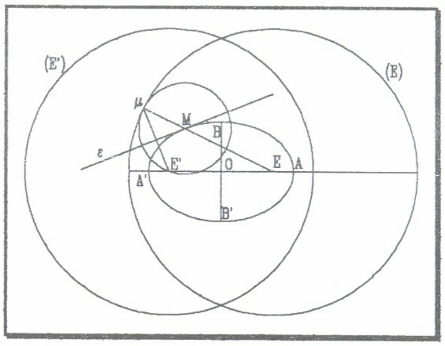
Επίκ. Καθηγητής Ε. Μ. Π.

ΠΡΟΒΟΛΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΑΘΗΝΑ 1994

8. ΕΛΛΕΙΨΗ

α') ΟΡΙΣΜΟΣ Ονομάζουμε έλλειψη τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων Μ κύκλων, οι οποίοι διέρχονται δια σταθερού σημείου Ε' και εφάπτονται δοθέντος κύκλου (Ε,2α) εσωτερικά, (Σχ.1). Ο κύκλος (Ε) ή (Ε,2α) λέγεται διευθύνων κύκλος και τα σημεία Ε, Ε΄ λέγονται εστίες και η ευθεία ΕΕ΄ λέγεται εστιακός άξονας της έλλειψης.



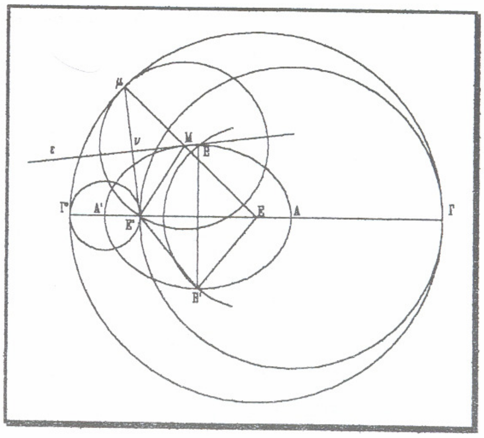
Σχ. 8-1

β') ΘΕΩΡΗΜΑ. Το άθροισμα των αποστάσεων του τυχόντος σημείου Μ έλλειψης από τις εστίες Ε και Ε' ισούται με 2α.

Αν Μ είναι τυχόν σημείο της έλλειψης, (Σχ.1), τότε αυτό είναι κέντρο κύκλου, ο οποίος εφάπτεται του διευθύνοντος κύκλου (Ε) στο σημείο μ και διέρχεται δια του σημείου Ε'. Η διάκετρος ΕΜ των δύο κύκλων διέρχεται δια του σημείου επαφής μ των δύο κύκλων. Επίσης, τα τμήματα Μμ και ΜΕ' είναι ίσα, ως ακτίνες του ίδιου κύκλου. Εχουμε λοιπόν:

$$ME+ME' = ME+M\mu = 2\alpha.$$

γ') ΟΡΙΣΜΟΙ Τα σημεία Α και Α' της έλλειψης, τα οποία κείνται επί του εστιακού άξονα ορίζουν τον μεγάλο ή πρωτεύοντα άξονα της έλλειψης, (Σχ.2). Ο κύκλος με διάμετρο τον μεγάλο άξονα ΑΑ' της έλλειψης λέγεται πρωτεύων κύκλος της έλλειψης, (Σχ.3).



Σχ. 8-2

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ Οι κορυφές Α και Α' της έλλειψης, ορίζονται ως εξής:

Το σημείο Α είναι το μέσον του τμήματος Ε'Γ, διότι είναι κέντρο κύκλου, ο οποίος διέρχεται διά του Ε' και έχει ως σημείο επαφής με τον διευθύνοντα κύκλο το σημείο Γ. Επομένως: Ε'Α = ΑΓ, (Σχ.2). Το σημείο Α' είναι το μέσον του τμήματος Ε'Γ', διότι είναι κέντρο κύκλου, ο οποίος διέρχεται δια του Ε' και έχει ως σημείο επαφής με τον διευθύνοντα κύκλο στο σημείο Γ'. Επομένως: Ε'Α' = Α'Γ', (Σχ. 2).

δ') ΘΕΩΡΗΜΑ. Ο μεγάλος άξονας ΑΑ' της έλλειψης ισούται με 2α.

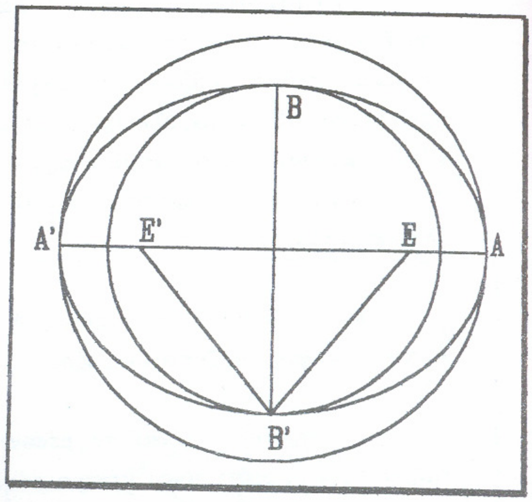
Εχουμε:

$$4\alpha = \Gamma\Gamma' = \Gamma A + AE' + E'A' + A'\Gamma' = 2(AE' + E'A') = 2\, AA'$$

Επομένως:

$$AA' = 2\alpha.$$

ε') ΟΡΙΣΜΟΙ. Το μέσον Ο του τμήματος ΑΑ' λέγεται κέντρο της έλλειψης, (Σχ.2,3). Το σημείο Ο είναι μέσον και του τμήματος ΕΕ', (να αποδειχθεί ως άσκηση). Επί της μεσοκαθέτου του εστιακού άξονα υπάρχουν δύο σημεία Β και Β' της έλλειψης. Το τμήμα ΒΒ' λέγεται δευτερεύων ή μικρός άξονας της έλλειψης και το μήκος του συμβολίζεται με 2β. Ο κύκλος με διάμετρο το τμήμα ΒΒ' λέγεται δευτερεύων κύκλος της έλλειψης. Το μήκος του τμήματος ΕΕ' λέγεται εστιακή απόσταση και συμβολίζεται με 2γ.



Σχ. 8-3

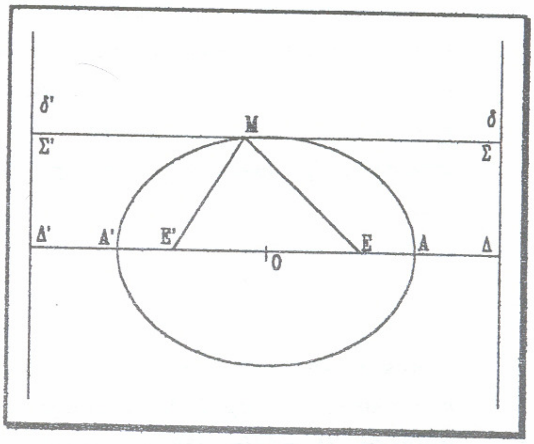
στ') ΘΕΩΡΗΜΑ. Ισχύει: $\alpha^2 = \beta^2+\gamma^2$.

Το σημείο Β, ως σημείο της μεσοκαθέτου του τμήματος ΕΕ', ισαπέχει από τα άκρα της Ε και Ε'. Επίσης, το άθροισμα των αποστάσεων του σημείου Β από τις εστίες της έλλειψης ισούται με 2α, (Σχ.3). Επομένως:

$$2\alpha = BE+BE' = 2\,BE.$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΒΕ προκύπτει: $\alpha^2 = \beta^2+\gamma^2$.

ζ') ΘΕΩΡΗΜΑ. Αν Δ και Δ' είναι τα σημεία τομής των διευθετουσών της έλλειψης με τον εστιακό άξονα, τότε ΟΔ = ΟΔ' = α^2/γ.



Σχ. 8-4

Είναι γνωστό ότι ο λόγος ΜΕ:ΜΣ των αποστάσεων ΜΕ και ΜΣ του τυχόντος σημείου Μ της έλλειψης από τη̃ν εστία Ε και την αντίστοιχη διευθετούσα δ είναι σταθερός και ισούται με την εκκεντρότητα ε, (Σχ.4). Το ίδιο λόγο ε έχουν και οι αποστάσεις ΜΕ' και ΜΣ' του τυχόντος σημείου Μ της έλλειψης από την άλλη εστία Ε' και την αντίστοιχη διευθετούσα δ'. Η ιδιότητα αυτή ισχύει και για τις κορυφές Α και Α' της έλλειψης. Εχουμε λοιπόν, (Σχ.4):

Επομένως:

$$\varepsilon = \frac{ΕΑ}{ΑΔ} = \frac{Α'Ε}{Α'Δ} = \frac{Α'Ε - ΕΑ}{Α'Δ - ΑΔ} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

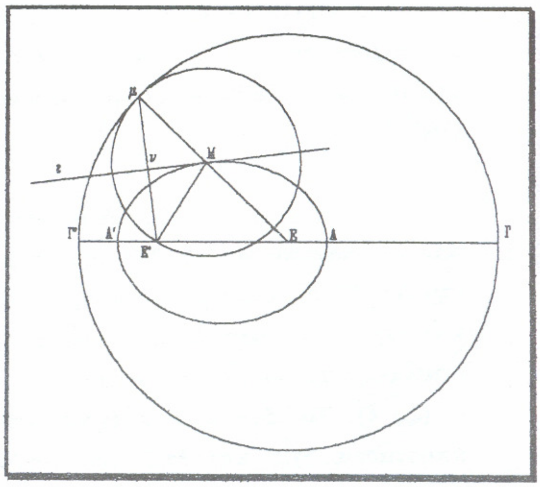
Επομένως:

$$ΑΔ = ΕΑ\frac{\alpha}{\gamma}\_ΟΔ = \frac{\alpha^2}{\gamma}$$

η') ΘΕΩΡΗΜΑ. Τά συμμετρικά σημεία εστίας έλλειψης ως προς τις εφαπτόμενες αυτής κείνται στον δευθύνοντα κύκλο που έχει κέντρο την άλλη εστία.

Θεωρούμε ότι η έλλειψη ορίζεται με τον διευθύνοντα κύκλο (Ε) και την εστία Ε'. Εάν μ είναι το τυχόν σημείο του κύκλου (Ε), τότε η μεσοκάθετος του τμήματος Ε'μ τέμνει την Εμ στο σημείο Μ. Αρα:

$$M\mu = ME'.$$



Σχ. 8-5

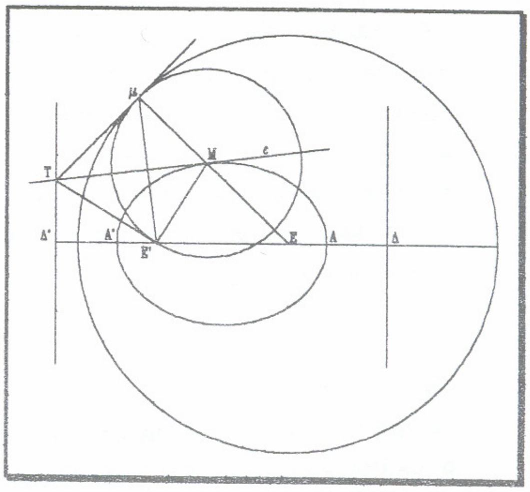
Ο κύκλος (Μ,ΜΕ') εφάπτεται του (Ε) στο μ. Επομένως, το σημείο Μ είναι σημείο της κωνικής. Η ευθεία μΜ, ως μεσοκάθετος του Ε'μ, διχοτομεί την γωνία της κορυφής του ισοσκελούς τριγώνου μΜΕ', δηλαδή διχοτομεί (εξωτερικά) την γωνία των εστιακών ακτίνων του Μ, γων(ΜΕ,ΜΕ'), συνεπώς η νΜ είναι εφαπτομένη, (Σχ.5). Τέλος, επειδή η νΜ είναι μεσοκάθετος του Ε'μ, συνεπάγεται ότι τα σημεία Ε' και μ είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία νΜ, η οποία είναι εφαπτομένη της έλλειψης στο σημείο Μ.

θ') ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ. Κατασκευή σημείων έλλειψης.

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της προηγουμένης παραγράφου, (Σχ.5), μπορούμε νά κατασκευάσουμε σημεία της έλλειψης και τις εφαπτόμενες σ' αυτά τα σημεία ως εξής: Γράφουμε την τυχούσα ακτίνα Εμ του διευθύνοντος κύκ λου (Ε). Κατασκευάζουμε την μεσοκάθετη ευθεία ε στο τμήμα μΕ', η οποία είναι εφαπτομένη της έλλειψης στο σημείο Μ, όπου Μ το σημείο τομής της εφαπτομένης ε με την ακτίνα Εμ του διευθύνοντος κύκλου (Ε).

ι') ΘΕΩΡΗΜΑ. Εστω Μ τυχόν σημείο έλλειψης, κείμενο επί της ακτίνας Εμ του διευθύνοντος κύκλου Ε. Η εφαπτομένη του κύκλου (Ε) στο μ και η εφαπτομένη της κωνικής στο Μ τέμνονται επί της διευθετούσας.

Εστω Τ, (Σχ.6), το σημείο τομής της εφαπτομένης του κύκλου (Ε) στο μ και της εφαπτομένης της κωνικής στο Μ. Επειδή η ευθεία ΤΜ είναι μεσοκάθετος του τμήματος Ε'μ, έχουμε ότι Τμ = ΤΕ' που συνεπάγεται $Τμ^2 = ΤΕ'^2$. Επομένως, οι δυνάμεις του σημείου Τ ως προς τους κύκλους (Ε, 2α) καί (Ε', 0) είναι ίσες, θεωρώντας το σημείο Ε' ως κύκλο μηδενικής ακτίνας. Η κάθετος απο το σημείο Τ προς την διάκεντρο ΕΕ' των κύκλων (Ε, 2α) και (Ε', 0) είναι ο ριζικός άξονας αυτών και έστω ότι τέμνει την ΕΕ' σε σημείο Δ'. Τα σημεία του ριζικού άξονα, εξ ορισμού, έχουν ίσες δυνάμεις ως προς τους δύο κύκλους των οποίων είναι ριζικός άξονας. Για το Δ', που είναι σημείο του ριζικού άξονα έχουμε:



Σχ. 8-6

$$\Delta'\mathrm{E}^2 - (2\alpha)^2 = \Delta'\mathrm{E}'^2 \_$$

$$(\Delta'\mathrm{E} - \Delta'\mathrm{E}')(\Delta'\mathrm{E} + \Delta'\mathrm{E}') = 4\alpha^2 \_$$

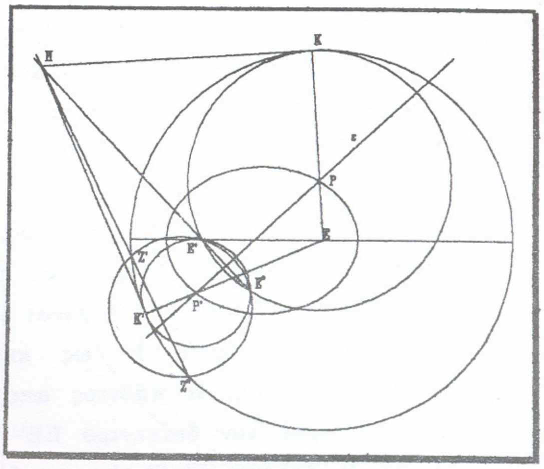
$$\Delta'\mathrm{E} + \Delta'\mathrm{E}' = \frac{2\alpha^2}{\gamma} \_$$

$$\Delta'\mathrm{O} = \frac{\alpha^2}{\gamma}$$

Επομένως, η κάθετος από το σημείο Τ στον εστιακό άξονα είναι η διευθετουσα της έλλειψης, (Σχ.6).

ια') ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ. Δίδονται ευθεία ε και έλλειψη με τον διευθύνοντα κύκλο (Ε,2α) και την εστία της Ε'. Ζητείται να κατασκευασθούν τα σημεία τομής της ευθείας ε και της έλλειψης.

Τα σημεία τομής της ευθείας και της έλλειψης θα είναι κέντρα κύκλων, κείμενα επί της ευθείας ε, οι οποίοι εφάπτονται του πρωτεύοντος κύκλου (Ε) και διέρχονται διά της εστίας Ε'. Το πρόβλημα αυτό είναι γνωστό ως ένα από τα Απολλώνια προβλήματα και η λύση του έχει ως εξής:



Σχ. 8-7

Εάν P είναι το ζητουμενο σημείο, είναι δηλαδή σημείο της ευθείας ε και κέντρο κύκλου (P) διερχομένου διά του Ε' ο οποίος εφάπτεται του κύκλου (Ε,2α), τότε η ευθεία ε είναι άξονας συμμετρίας του κύκλου (P) επειδή διέρχεται δια του κέντρου P. Επομένως το σημείο Ε΄΄, συμμετρικό του Ε' ως προς την ευθεία ε, κείται επί του κύκλου (P).

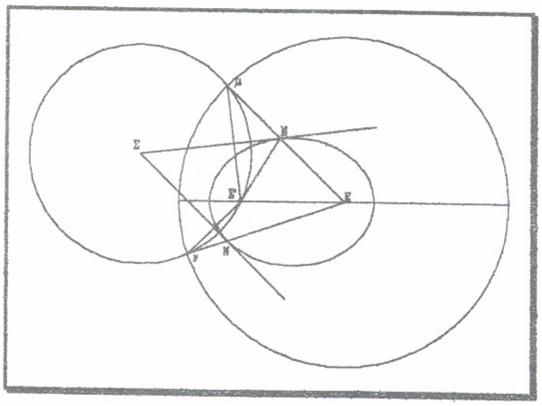
Τώρα, ζητείται να κατασκευασθεί κύκλος, ο οποίος διέρχεται δια των σημείων Ε' καί Ε΄΄ και εφάπτεται του κύκλου (Ε). Για να λύσουμε το πρόβλημα αυτό, γράφουμε τυχόντα κύκλο, διερχόμενο δια των σημείων Ε' και Ε΄΄, ο οποίος τέμνει τον κύκλο (Ε) στα σημεία Ζ' και Ζ΄΄, έστω δε Η το σημείο τομής των ευθειών Ζ'Ζ΄΄ και Ε'Ε΄΄. Τότε:

$$HE'.HE'' = HZ'.HZ'' = HK'^2 = HK^2$$

Η δύναμη, δηλαδή, του σημείου Η ως προς τον κύκλο (Ε) είναι ίση με την δύναμη του σημείου Η ως προς τον τυχόντα κύκλο που διέρχεται δια των σημείων Ε' και Ε΄΄ και αυτή ισούται με το τετράγωνο του τμήματος της εφαπτομένης ΗΚ ή ΗΚ', (Σχ. 7), που άγεται από το σημείο Η προς τον κύκλο (Ε). Επομένως, από την δέσμη των κύκλων που διέρχονται δια των σημείων Ε' και Ε΄΄, εκείνοι που διέρχονται δια των σημείων Κ και Κ' εφάπτονται του κύκλου (Ε) στα σημεία Κ και Κ' αντίστοιχα. Τα σημεία τομής της ευθείας ε με την έλλειψη, P και P', είναι τα κέντρα των κύκλων που διέρχονται δια των σημείων (Ε',Ε΄΄,Κ) και (Ε',Ε΄΄,Κ').

ιβ') ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ. Να κατασκευασθούν οι εφαπτόμενες έλλειψης που άγονται δια δοθέντος σημείου Σ.

Εστω ΣΜ εφαπτομένη έλλειψης στο σημείο Μ, η οποία άγεται δια του σημείου Σ. Ως γνωστό, το σημείο μ, συμμετρικό του Ε' ως προς την εφαπτομένη ΣΜ, κείται επί του διευθύνοντος κύκλου (Ε). Αρα η ευθεία ΣΜ είναι μεσοκάθετος του τμήματος Ε'μ. Επομένως ΣΕ' = Σμ.

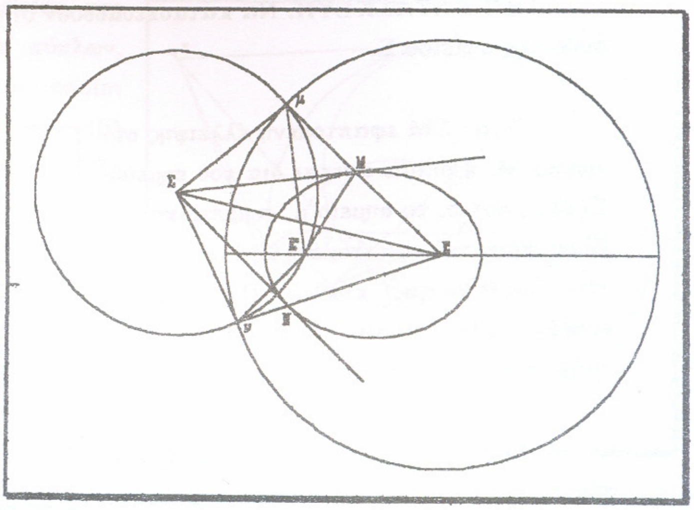


Σχ. 8-8

Γράφουμε κύκλο (Σ,ΣΕ'), ο οποίος τέμνει τον κύκλο (Ε) στα σημεία μ και ν. Οι κάθετες ευθείες από το Σ προς τα ευθύγραμμα τμήματα Ε'μ καί Ε'ν, άρα και μεσοκάθετες, εφάπτονται της έλλειψης. Τα σημεία επαφής Μ καί Ν είναι τα σημεία τομής των εφαπτομένων και των ακτίνων Εμ και Εν αντίστοιχα.

Οι εφαπτόμενες έλλειψης, που άγονται από σημείο Σ, είναι δύο μία ή καμμία καθ' όσον οι κύκλοι (Ε) και (Σ,ΣΕ') τέμνονται σε δύο διακεκριμμένα σημεία ή έχουν ένα κοινό σημείο (εφάπτονται) ή δεν έχουν κοινό σημείο.

ιγ') ΘΕΩΡΗΜΑ. Εάν οι ευθείες ΣΜ και ΣΝ εφάπτονται έλλειψης στα σημεία Μ και Ν αντίστοιχα, τότε η ευθεία ΣΕ διχοτομεί την γωνία των εστιακών ακτίνων των σημείων επαφής, (ΕΜ,ΕΝ).



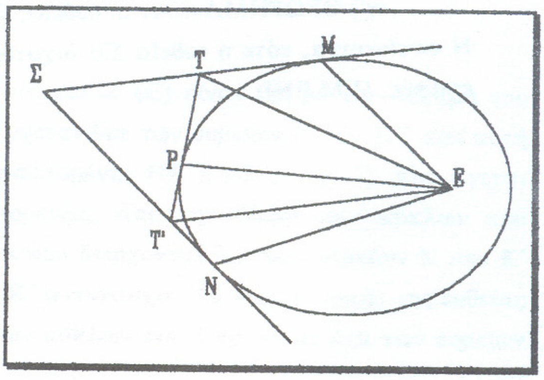
Σχ. 8-9

Σύμφωνα με την προηγούμενη κατασκευή, η ευθεία ΣΕ, (Σχ.9), είναι διάκεντρος των κύκλων (Ε,2α) και (Σ,ΣΕ') και επομένως διχοτομεί τις γωνίες που έχουν ως κορυφές τα κέντρα των δύο κύκλων και πλευρές διερχόμενες δια των κοινών σημείων των δύο κύκλων. Δηλαδή, η ευθεία ΣΕ διχοτομεί τις γωνίες (Σμ,Σν) και (Εμ,Εν). Επομένως, η ευθεία ΣΕ διχοτομεί την γωνία (ΕΜ,ΕΝ), διότι τα σημεία Μ και Ν κείνται επί των ακτίνων Εμ και Εν αντίστοιχα.

ιδ') ΘΕΩΡΗΜΑ. Το τμήμα μεταβλητής εφαπτομένης έλλειψης, το οποίο περιλαμβάνεται μεταξύ δύο σταθερών εφαπτομένων, φαίνεται από τις εστίες υπό σταθερή γωνία, ίση με το μισό της γωνίας υπό την οποία φαίνονται από την εστία τα δύο σημεία επαφής των σταθερών εφαπτομένων.

Θεωρούμε, (Σχ.10), δύο σταθερές εφαπτόμενες ΣΜ και ΣΝ έλλειψης στα σημεία Μ και Ν αυτής και έστω ΤΤ' το τμήμα μεταβλητής εφαπτομένης της έλλειψης στο σημείο της Ρ, το οποίο αποτέμνεται μεταξύ των εφαπτομένων ΣΜ και ΣΝ. Σύμφωνα με το προηγούμενο Θεώρημα,

2 γων(ΕΤ',ΕΡ) = γων(ΕΝ,ΕΡ)



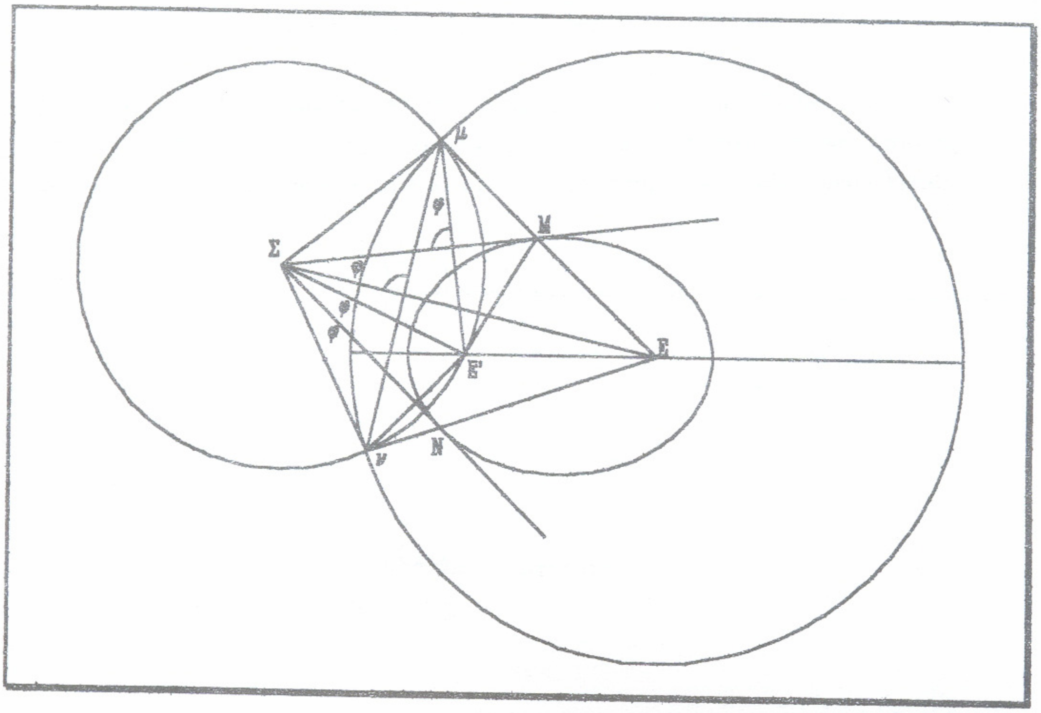
Σχ. 8-10

2 γων(ΕΡ ,ΕΤ) = γων(ΕΡ,ΕΜ)

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:

2 γων(ΕΤ',ΕΤ) = γων(ΕΝ,ΕΜ).

ιε') ΘΕΩΡΗΜΑ. Εάν οι ευθείες ΣΜ και ΣΝ εφάπτονται έλλειψης στα σημεία Μ και Ν, τότε οι γωνίες που σχηματίζουν οι εφαπτόμενες ΣΜ και ΣΝ με τις εστιακές ακτίνες ΣΕ και ΣΕ' του κοινού σημείου των εφαπτομένων είναι ίσες.



Σχ. 8-11

Ο κύκλος κέντρου Σ και ακτίνας ΣΕ', (Σχ. 11), τέμνει τον διευθύνοντα κύκλο (Ε) στα σημεία μ και ν. Οι ευθείες ΣΜ και ΣΝ, μεσοκάθετες στις ακτίνες Ε'μ και Ε'ν, είναι εφαπτόμενες της έλλειψης στα σημεία Μ και Ν. Επομένως:

2 γων(ΣΜ,ΣΕ') = γων(Σμ,ΣΕ').

Επίσης,

$$2\ \gamma\omega\nu(\nu\mu,\nu E') = \gamma\omega\nu(\Sigma\mu,\Sigma E')$$

ως εγγεγραμμένη και επίκεντρη στον κύκλο (Σ,ΣΕ'), που βλέπουν το ίδιο τόξο. Τέλος,

$$\gamma\omega\nu(\Sigma N,\Sigma E) = \gamma\omega\nu(\nu\mu,\nu E')$$

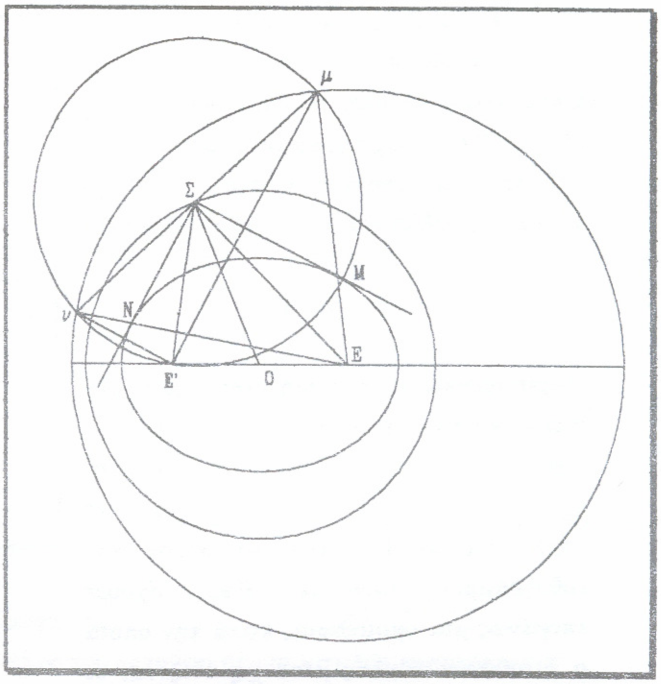
ως έχουσες τις πλευρές τους κάθετες μία προς μία. Αρα:

$$\gamma\omega\nu(\Sigma M,\Sigma E') = \gamma\omega\nu(\Sigma N,\Sigma E).$$

ις') ΘΕΩΡΗΜΑ. Ο γεωμετρικός τόπος της κορυφής ορθής γωνίας, της οποίας οι πλευρές εφάπτονται έλλειψης, είναι κύκλος ομόκεντρος αυτής, με ακτίνα ρ την υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου που έχει κάθετες πλευρές μήκους α και β, δηλαδή:

$$\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

Αν οι εφαπτόμενες ΣΜ και ΣΝ έλλειψης σχηματίζουν ορθή γωνία, τότε και οι ευθείες Ε'μ και Ε'ν σχηματίζουν επίσης ορθή γωνία, διότι είναι κάθετες μία προς μία. Η γωνία (Ε'μ,Ε'ν) είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο (Σ,ΣΕ'), επομένως, ως ορθή βλέπει ημικύκλιο. Αρα, γων(Σμ,Σν) = π. Δηλαδή, η χορδή μν του διευθύνοντος κύκλου είναι διάμετρος του κύκλου (Σ,ΣΕ') και το σημείο Σ είναι μέσον του τμήματος μν. Η ευθεία ΕΣ είναι μεσοκάθετη στην χορδή μν του κύκλου (Ε). Εχουμε λοιπόν:



$$ΣΕ^2+ΣΕ'^2 = ΣΕ^2+Σμ^2 = Εμ^2 = 4α^2.$$

Σχ. 8-12

Επίσης έχουμε:

$$ΣΕ^2+ΣΕ'^2 = 2γ^2+2ΣΟ^2.$$

Επομένως:

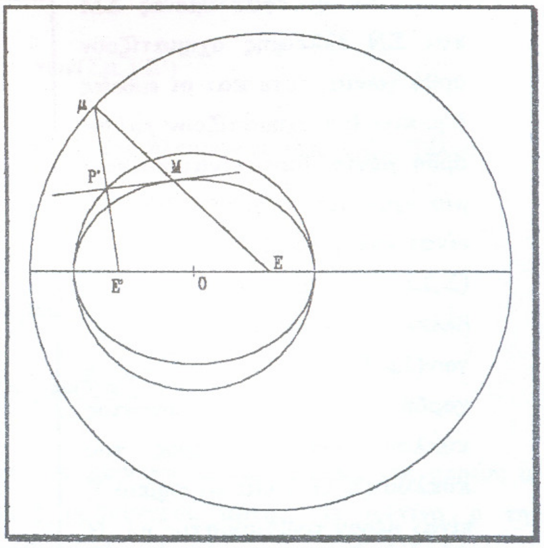
$$ΣΟ^2 = 2α^2-γ^2 = α^2+β^2.$$

ιζ') ΘΕΩΡΗΜΑ. Οι προβολές των εστιών επί των εφαπτομένων έλλειψης κείνται στον πρωτεύοντα κύκλο της έλλειψης.

Εστω P' η προβολή της εστίας E' στην τυχούσα εφαπτομένη ε της έλλειψης. Οπως είναι γνωστό, το συμμετρικό μ της εστίας E' ως προς της εφαπτομένη ε κείται επί του διευθύνοντος κύκλου που έχει κέντρο την άλλη εστία. Επομένως έχουμε:

$$E'\mu = 2\ E'P'.$$

Παρατηρούμε ότι η σχέση αυτή ορίζει μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των σημείων μ του διευθύνοντος κύκλου (E) και των σημείων P', κατά την οποία το τυχόν σημείο P' είναι το μέσον του ευθυγράμμου τμήματος E'μ. Έχουμε επομένως μία ομοιοθεσία, κατά την οποία ο διευθύνων κύκλος μετασχηματίζεται σε κύκλο, με κέντρο το σημείο O, μέσον του ευθυγράμμου τμήματος E'E και ακτίνα α, το μισό της ακτίνας του διευθύνοντος κύκλου.



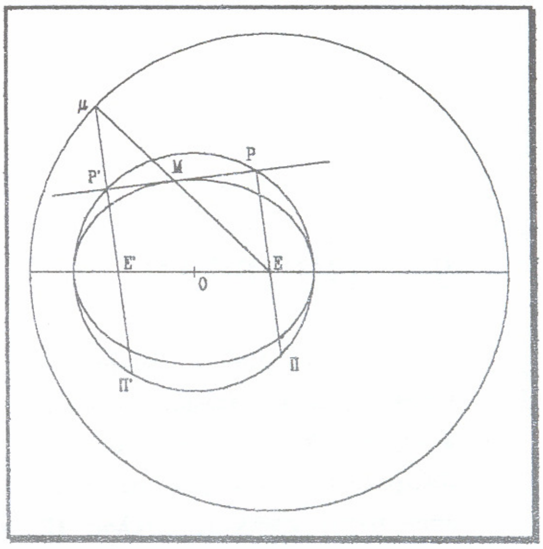
Σχ. 8-13

ιη') ΘΕΩΡΗΜΑ. Το γινόμενο των αποστάσεων των εστιών έλλειψης από την τυχούσα εφαπτομένη της είναι ίσο με β.

Η δύναμη του σημείου Ε' ως προς τον πρωτεύοντα κύκλο είναι:

$$Ε'Ρ'.Ε'Π' = α^2 - ΟΕ'^2 = α^2 - γ^2 = β^2.$$

Λόγω της συμμετρίας του σχήματος, το τμήμα Ε'Π' είναι ίσο προς το τμήμα ΕΠ. Επομένως, ισχύει: $Ε'Ρ'.ΕΠ = β^2$.



Σχ. 8-14

8.1. ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

1. Να κατασκευασθεί η έλλειψη της οποίας δίδονται τα άκρα του μεγάλου άξονα και μία εφαπτομένη.

2. Να κατασκευασθεί η έλλειψη της οποίας δίδονται το κέντρο Ο, το μήκος του μεγάλου άξονα και δύο εφαπτόμενες.

3. Να κατασκευασθεί η έλλειψη της οποίας δίδονται μία εστία, μία εφαπτομένη, η διεύθυνση του μεγάλου άξονα και το μήκος αυτού.

4. Να κατασκευασθεί η έλλειψη της οποίας δίδονται μία εστία και τρείς εφαπτόμενες.

5. Να κατασκευασθεί η έλλειψη της οποίας δίδονται μία εστία, δύο εφαπτόμενες και ένα σημείο.

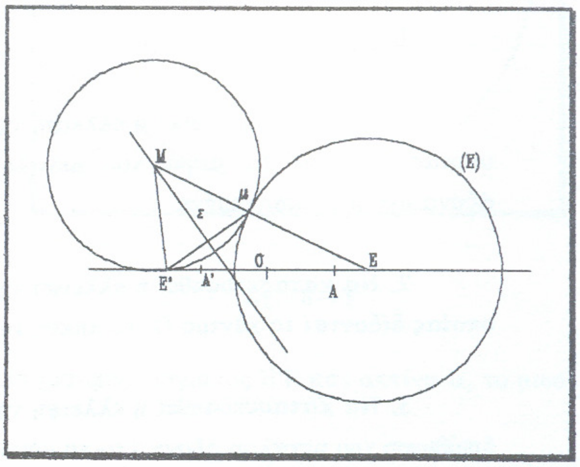
6. Να κατασκευασθεί η έλλειψη της οποίας δίδονται μία εστία και τρία σημεία.

7. Να κατασκευασθεί η έλλειψη της οποίας δίδονται μία εστία μία εφαπτομένη και δύο σημεία.

8. Να κατασκευασθεί η έλλειψη της οποίας δίδονται μία εστία, δύο εφαπτόμενες και το σημείο επαφής μιάς από αυτές.

9. ΥΠΕΡΒΟΛΗ

α') ΟΡΙΣΜΟΙ. Θεωρούμε την υπερβολή ως τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων Μ κύκλων, οι οποίοι διέρχονται δια σταθερού σημείου Ε' και εφάπτονται δοθέντος κύκλου (Ε,2α) εξωτερικά, (Σχ.1). Ο κύκλος (Ε,2α) ή (Ε) λέγεται διευθύνων κύκλος, τα σημεία Ε, Ε΄ εστίες και η ευθεία ΕΕ΄ εστιακός άξονας της έλλειψης. Υπάρχουν δύο διευθύνοντες κύκλοι: (Ε,2α) και (Ε΄,2α).



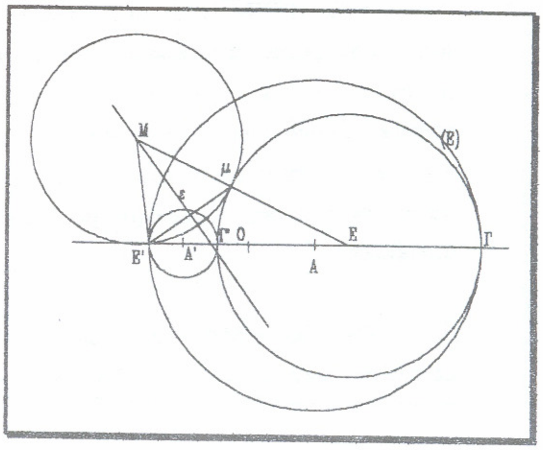
Σχ. 9-1

β') ΘΕΩΡΗΜΑ. Η διαφορά των αποστάσεων του τυχόντος σημείου Μ υπερβολης από τις εστίες Ε και Ε' ισούται με 2α.

Αν Μ είναι τυχόν σημείο υπερβολής, (Σχ.1), τότε αυτό είναι κέντρο κύκλου, ο οποίος εφάπτεται του διευθύνοντος κύκλου (Ε) στο σημείο μ και διέρχεται δια του σημείου Ε'. Η διάκεντρος ΕΜ των δύο κύκλων διέρχεται δια του σημείου επαφής μ αυτών. Επομένως τα τμήματα Μμ και ΜΕ' είναι ίσα ως ακτίνες του ίδιου κύκλου. Εχουμε λοιπόν:

$$ME - ME' = ME - M\mu = 2\alpha.$$

γ') ΟΡΙΣΜΟΙ. Τα σημεία Α και Α' της υπερβολής, τα οποία κείνται επί του εστιακού άξονα, ορίζουν τον μεγάλο ή πρωτεύοντα άξονα της υπερβολής. Ο κύκλος με διάμετρο τον μεγάλο άξονα ΑΑ' της υπερβολής λέγεται πρωτεύων κύκλος της υπερβολής, (Σχ.2,3).



Σχ. 9-2

Τα σημεία Α και Α' της υπερβολής, ορίζονται ως εξής:

Το σημείο Α είναι το μέσον του τμήματος Ε'Γ, διότι είναι κέντρο κύκλου, ο οποίος διέρχεται διά του Ε' και έχει ως σημείο επαφής με τον διευθύνοντα κύκλο το σημείο Γ. Επομένως: Ε'Α = ΑΓ, (Σχ.2). Το σημείο Α' είναι το μέσον του τμήματος Ε'Γ', διότι είναι κέντρο κύκλου, ο οποίος διέρχεται δια του Ε' και έχει ως σημείο επαφής με τον διευθύνοντα κύκλο στο σημείο Γ'. Επομένως: Ε'Α' = Α'Γ', (Σχ. 2).

δ') ΘΕΩΡΗΜΑ. Ο μεγάλος άξονας ΑΑ' της υπερβολής ισούται με 2α.

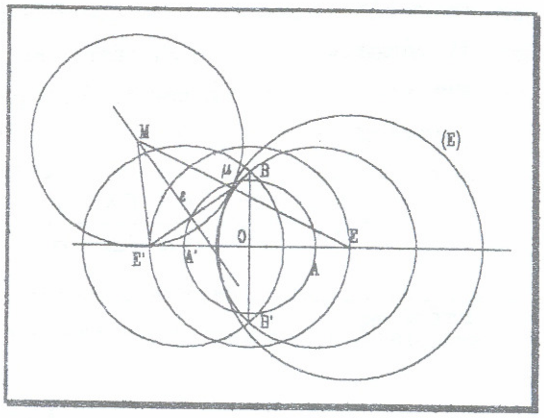
Εχουμε:

$4α=ΓΓ'=ΓΑ+ΑΕ'+Ε'Α'+Α'Γ'=$

$=2(ΑΕ'+Ε'Α')=2\ ΑΑ'$

Επομένως:

$ΑΑ' = 2α.$



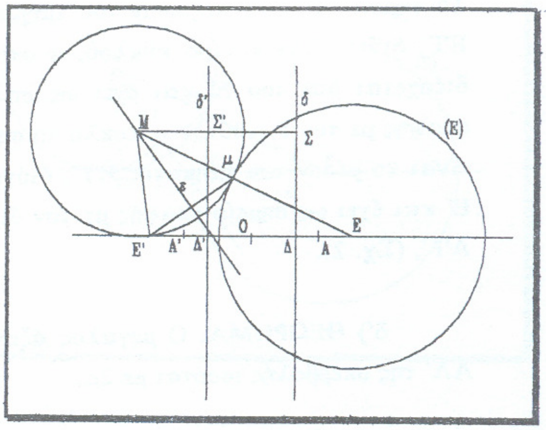
Σχ. 9-3

ε') ΟΡΙΣΜΟΙ. Το μήκος του τμήματος ΕΕ' λέγεται εστιακή απόσταση και συμβολίζεται με 2γ. Το μέσον Ο του τμήματος ΑΑ' λέγεται κέντρο της υπερβολής, (Σχ.2,3). Το σημείο Ο είναι, επίσης, μέσον και του τμήματος ΕΕ', (να αποδειχθεί ως άσκηση).

στ') ΟΡΙΣΜΟΙ. Η μεσοκάθετος του εστιακού άξονα ΕΕ' δεν τέμνει την υπερβολή, διότι η διαφορά των αποστάσεων των σημείων της μεσοκαθέτου από τις εστίες είναι ίση με μηδέν. Επί αυτής της μεσοκαθέτου ορίζονται δύο σημεία Β και Β', συμμετρικά ως προς τον εστιακό άξονα και σε απόσταση ΟΒ = -ΟΒ' = 2β από το κέντρο Ο, έτσι ώστε να ισχύει: $\gamma^2 = \beta^2+\alpha^2$. Το τμήμα ΒΒ' λέγεται δευτερεύων ή μικρός άξονας της υπερβολής, κατ' αναλογία προς την έλλειψη. Ο κύκλος με διάμετρο το τμήμα ΒΒ' λέγεται δευτερεύων κύκλος της υπερβολής.

ζ') ΘΕΩΡΗΜΑ. Αν Δ και Δ' είναι τα σημεία τομής των διευθετουσών της υπερβολής με τον εστιακό άξονα, τότε ΟΔ = ΟΔ' = α^2/γ.

Είναι γνωστό ότι ο λόγος ΜΕ:ΜΣ των αποστάσεων ΜΕ και ΜΣ του τυχόντος σημείου Μ της υπερβολής από την εστία Ε και την αντίστοιχη διευθετούσα δ είναι σταθερός και ισούται με την εκκεντρότητα ε, (Σχ.4). Τον ίδιο λόγο ε έχουν και οι αποστάσεις ΜΕ' και ΜΣ' του τυχόντος σημείου Μ της υπερβολής από την άλλη εστία Ε' και την αντίστοιχη διευθετούσα δ'. Η ιδιότητα αυτή ισχύει και για τις κορυφές Α και Α' της υπερβολής. Εχουμε λοιπόν, (Σχ.4):



Σχ. 9-4

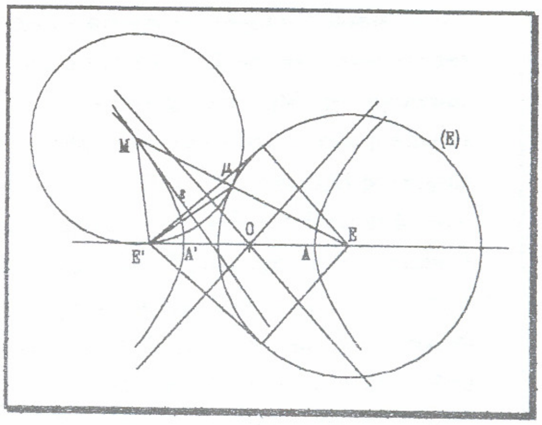
$$\varepsilon = \frac{ΕΑ}{ΑΔ} = \frac{Α'Ε}{Α'Δ} = \frac{Α'Ε - ΕΑ}{Α'Δ - ΑΔ} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

Επομένως:

$$ΑΔ = ΕΑ\frac{\alpha}{\gamma} \_ ΟΔ = \frac{\alpha^2}{\gamma}$$

η') ΘΕΩΡΗΜΑ. Τά συμμετρικά σημεία εστίας υπερβολής ως προς τις εφαπτόμενες αυτής κείνται στον δευθύνοντα κύκλο που έχει κέντρο την άλλη εστία.

Εστω ότι η υπερβολή ορίζεται με τον διευθύνοντα κύκλο (E,2α) και την εστία E'. Εάν μ είναι το τυχόν σημείο του κύκλου (E), τότε η μεσοκάθετος του τμήματος E'μ τέμνει την Eμ στο σημείο M. Αρα:



Σχ. 9-5

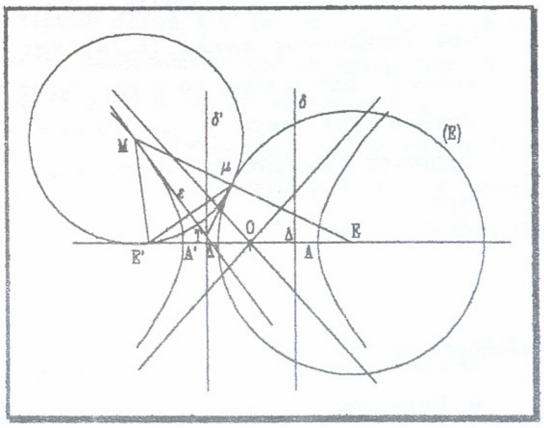
$$M\mu = ME'.$$

O κύκλος (M,ME') εφάπτεται του (E) στο μ. Επομένως, το σημείο M είναι σημείο της κωνικής. H ευθεία μM, ως μεσοκάθετος του E'μ, διχοτομεί την γωνία της κορυφής του ισοσκελούς τριγώνου μME', δηλαδή διχοτομεί (εξωτερικά) την γωνία (ME,ME') των εστιακών ακτίνων του M, συνεπώς η μM είναι εφαπτομένη, (Σχ.5). Τέλος, επειδή η μM είναι μεσοκάθετος του E'μ, συνεπάγεται ότι τα σημεία E' και μ είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία μM, η οποία είναι εφαπτομένη της υπερβολής στο σημείο M.

θ') ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΣΗΜΕΙΩΝ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ. Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα αυτή, (Σχ.5), μπορούμε νά κατασκευάσουμε σημεία της υπερβολής και τις εφαπτόμενες σ' αυτά τα σημεία ως εξής: Γράφουμε την τυχούσα ακτίνα Eμ του διευθύνοντος κύ κλου (E). Κατασκευάζουμε την μεσοκάθετη ευθεία ε στο τμήμα μE', η οποία είναι εφαπτομένη της υπερβολής στο σημείο M, όπου M το σημείο τομής της εφαπτομένης ε με την ακτίνα Eμ του διευθύνοντος κύ κλου (E).

ι') ΘΕΩΡΗΜΑ. Εστω M τυχόν σημείο υπερβολής, κείμενο επί της ακτίνας Eμ του διευθύνοντος κύκλου (E,2α). H εφαπτομένη του κύκλου (E) στο μ και η εφαπτομένη της κωνικής στο M τέμνονται επί της διευθετούσας.

Εστω Τ, (Σχ.6), το σημείο τομής της εφαπτομένης του κύκλου (Ε) στο μ και της εφαπτομένης Μμ της κωνικής στο Μ. Επειδή η ευθεία μΜ είναι μεσοκάθετος του τμήματος Ε'μ, έχουμε ότι Τμ = ΤΕ'. Τούτο συνεπάγεται ότι $Τμ^2 = ΤΕ'^2$. Επομένως, οι δυνάμεις του σημείου Τ ως προς τους κύκλους (Ε,2α) καί (Ε',0) είναι ίσες, θεωρώντας το σημείο Ε' ως κύκλο μηδενικής ακτίνας. Η κάθετος απο το σημείο Τ προς την διάκεντρο ΕΕ' των κύκλων (Ε,2α) και (Ε',0) είναι ο ριζικός άξονας αυτών και έστω ότι τέμνει την ΕΕ' σε σημείο Δ'. Τα σημεία του ριζικού άξονα δύο κύκλων, εξ ορισμού, έχουν ίσες δυνάμεις ως προς τους δύο κύκλους. Για το Δ', που είναι σημείο του ριζικού άξονα έχουμε:



Σχ. 9-6

$$Δ'Ε^2 - (2α)^2 = Δ'Ε'^2 \_$$

$$(Δ'Ε - Δ'Ε')(Δ'Ε + Δ'Ε') = 4α^2 \_$$

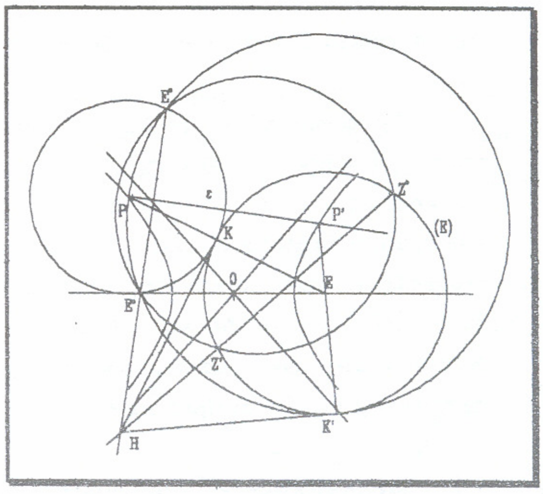
$$Δ'Ε + Δ'Ε' = \frac{2α^2}{γ} \_$$

$$Δ'Ο = \frac{α^2}{γ}$$

Επομένως η κάθετος που άγεται δια του σημείου Τ στον εστιακό άξονα είναι η διευθετούσα της υπερβολής, (Σχ.6).

ια') ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΣΗΜΕΙΩΝ ΤΟΜΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΚΑΙ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ Δίδονται ευθεία ε και υπερβολή με τον διευθύνοντα κύκλο (Ε,2α) και την εστία της Ε'. Ζητείται να κατασκευασθούν τα σημεία τομής της ευθείας ε και της υπερβολής.

Τα σημεία αυτά είναι κέντρα κύκλων, κείμενα επί της ευθείας ε, οι οποίοι εφάπτονται του διευθύνοντος κύκλου (Ε) και διέρχονται διά της εστίας Ε'. Το πρόβλημα αυτό είναι γνωστό ως ένα από τα Απολλώνια προβλήματα.



Σχ. 9-7

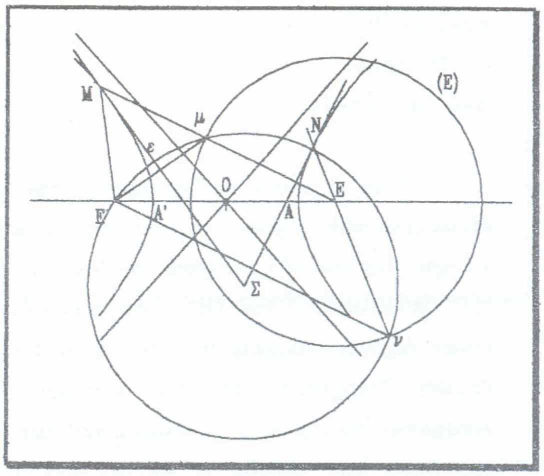
Εάν Ρ είναι το ζητουμένο σημείο, είναι δηλαδή σημείο της ευθείας ε και κέντρο κύκλου (Ρ) διερχομένου διά του Ε' και εφαπτομένου του (Ε), τότε η ευθεία ε είναι άξονας συμμετρίας του κύκλου (Ρ) επειδή διέρχεται δια του κέντρου Ρ. Επομένως το σημείο Ε΄΄, συμμετρικό του Ε' ως προς την ευθεία ε, κείται επί του κύκλου (Ρ). Ζητείται, τώρα, να κατασκευασθεί κύκλος, ο οποίος διέρχεται δια των σημείων Ε' καί Ε΄΄ και εφάπτεται του κύκλου (Ε). Για να λύσουμε το πρόβλημα αυτό, γράφουμε τυχόντα κύκλο, διερχόμενο δια των σημείων Ε' και Ε΄΄, ο οποίος τέμνει τον κύκλο (Ε) στα σημεία Ζ' και Ζ΄΄, έστω δε Η το σημείο τομής των ευθειών Ζ'Ζ΄΄ και Ε'Ε΄΄. Τότε:

$$HE'.HE''=HZ'.HZ''=HK_1.HK_2$$

Η δύναμη, δηλαδή, του σημείου Η ως προς τον κύκλο (Ε) είναι ίση με την δύναμη του σημείου Η ως προς τον τυχόντα κύκλο που διέρχεται δια των σημείων Ε' και Ε΄΄ και αυτή ισούται με το τετράγωνο του τμήματος της εφαπτομένης ΗΚ ή ΗΚ' που άγεται από το σημείο Η προς τον κύκλο (Ε). Επομένως, από την δέσμη των κύκλων που διέρχονται δια των σημείων Ε' και Ε΄΄, εκείνοι που διέρχονται δια των σημείων Κ και Κ', εφάπτονται του κύκλου (Ε) στα σημεία Κ και Κ' αντίστοιχα. Τα σημεία τομής της ευθείας ε με την υπερβολή, Ρ και Ρ', είναι τα κέντρα των κύκλων που διέρχονται δια των σημείων (Ε',Ε΄΄,Κ) και (Ε',Ε΄΄, Γ').

ιβ') ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΩΝ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ. Εστω ΣΜ εφαπτομένη υπερβολής στο σημείο Μ, η οποία άγεται δια του σημείου Σ. Ως γνωστό, το σημείο μ, συμμετρικό του Ε' ως προς την εφαπτομένη ΣΜ, κείται επί του διευθύνοντος κύκλου (Ε). Αρα η ευθεία ΣΜ είναι μεσοκάθετος του τμήματος Ε'μ. Επομένως ΣΕ' = Σμ.

Γράφουμε κύκλο (Σ,ΣΕ') ο οποίος τέμνει τον κύκλο (Ε) στα σημεία μ και ν. Οι κάθετες ευθείες από το Σ προς τα ευθύγραμμα τμήματα Ε'μ καί Ε'ν, άρα και μεσοκάθετες, εφάπτονται της ὓπερβολής. Τα σημεία επαφής Μ καί Ν είναι τα σημεία τομής των εφαπτομένων και των ακτίνων Εμ και Εν αντίστοιχα.

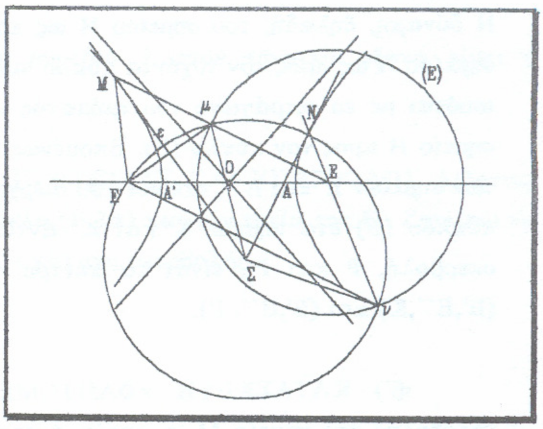


Οι εφαπτόμενες υπερβολής που άγονται από σημείο Σ είναι δύο μία ή καμμία καθ'όσον οι κύκλοι (Ε,2α) και (Σ,ΣΕ') τέμνονται σε δύο διακεκριμμένα σημεία ή έχουν ένα κοινό σημείο (εφάπτονται) ή δεν έχουν κοινό σημείο.

Σχ. 9-8

ιγ') ΘΕΩΡΗΜΑ. Εάν οι ευθείες ΣΜ και ΣΝ εφάπτονται υπερβολής στα σημεία Μ και Ν αντίστοιχα, τότε η ευθεία ΣΕ διχοτομεί, (εξωτερικά) την γωνία των εστιακών ακτίνων των σημείων επαφής, (ΕΜ,ΕΝ).

Σύμφωνα με την προηγούμενη κατασκευή, η ευθεία ΣΕ είναι διάκεντρος των κύκλων (Ε,2α) και (Σ,ΣΕ') και επομένως, διχοτομεί τις γωνίες που έχουν ως κορυφές τα κέντρα των δύο κύκλων και πλευρές διερχόμενες δια των κοινών σημείων των δύο κύκλων. Δηλαδή, η ευθεία ΣΕ διχοτομεί τις γωνίες (Σμ,Σν) και (Εμ,Εν). Επομένως, η ευθεία ΣΕ διχοτομεί την γωνία (ΕΜ,ΕΝ), διότι τα



Σχ. 9-9

σημεία Μ και Ν κείνται επί των ακτίνων Εμ και Εν αντίστοιχα.

ιδ') ΘΕΩΡΗΜΑ. Το τμήμα μεταβλητής εφαπτομένης υπερβολής, το οποίο περιλαμβάνεται μεταξύ δύο σταθερών εφαπτομένων, φαίνεται από τις εστίες υπό σταθερή γωνία, ίση με το μισό της γωνίας υπό την οποία φαίνονται από την εστία τα δύο σημεία επαφής των σταθερών εφαπτομένων.

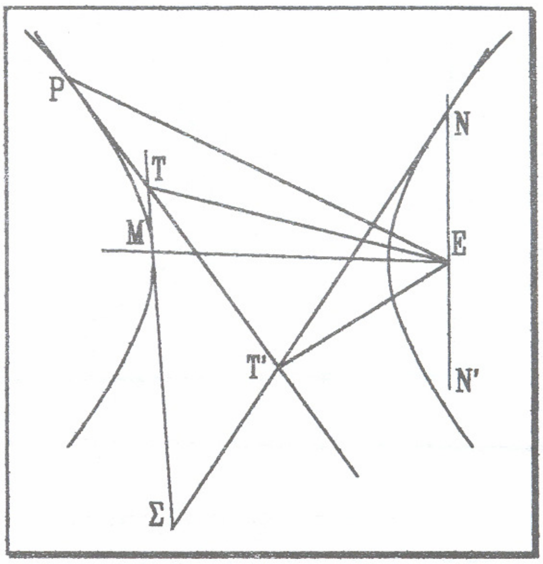
Εστωσα ΣΜ και ΣΝ δύο σταθερές εφαπτόμενες υπερβολής στα σημεία Μ και Ν αυτής και επί της εφαπτομένης της υπερβολής στο τυχόν σημείο Ρ αποτέμνεται τμήμα ΤΤ' μεταξύ των εφαπτομένων ΣΜ και ΣΝ. Σύμφωνα με το προηγούμενο Θεώρημα,

2 γων(ΕΤ',ΕΡ) = γων(ΕΝ,ΕΡ)

2 γων(ΕΡ ,ΕΤ) = γων(ΕΡ,ΕΜ)

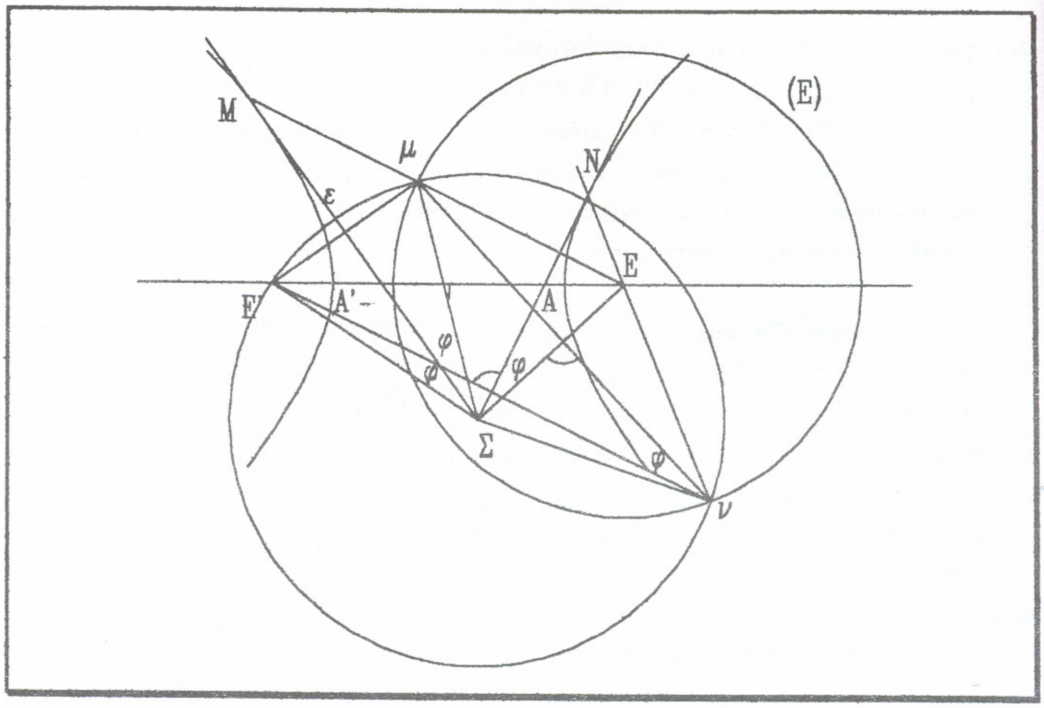
Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:

2 γων(ΕΤ',ΕΤ) = γων(ΕΝ,ΕΜ).



Σχ. 9-10

ιε') ΘΕΩΡΗΜΑ. Εάν οι ευθείες ΣΜ και ΣΝ εφάπτονται υπερβολής στα σημεία Μ και Ν, τότε οι γωνίες που σχηματίζουν οι εφαπτόμενες ΣΜ και ΣΝ με τις εστιακές ακτίνες ΣΕ και ΣΕ' του κοινού σημείου των εφαπτομένων είναι ίσες.



Σχ. 9-11

Ο κύκλος κέντρου Σ και ακτίνας ΣΕ' τέμνει τον διευθύνοντα κύκλο (Ε) στα σημεία μ και ν. Οι ευθείες ΣΜ και ΣΝ, μεσοκάθετες στις ακτίνες Ε'μ και Ε'ν, εφάπτονται της υπερβολής στα σημεία Κ και Ν. Επομένως:

$$2\ \gamma\omega\nu(\Sigma M,\Sigma E') = \gamma\omega\nu(\Sigma\mu,\Sigma E').$$

Επίσης,

$$2\ \gamma\omega\nu(\nu\mu,\nu E') = \gamma\omega\nu(\Sigma\mu,\Sigma E')$$

ως εγγεγραμμένη και επίκεντρη στον κύκλο (Σ,ΣΕ'), που βλέπουν το ίδιο τόξο. Τέλος,

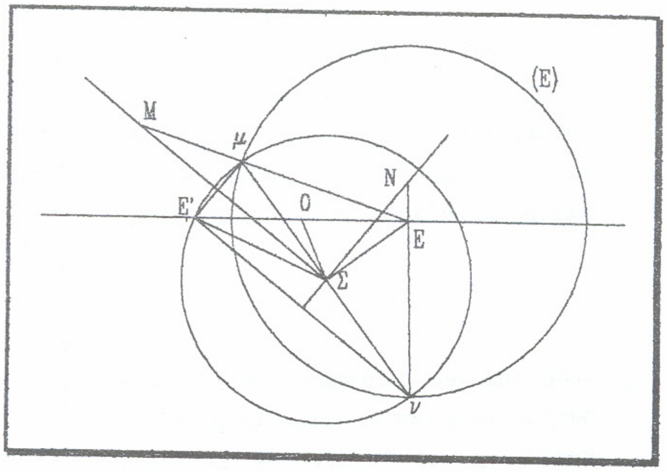
$$\gamma\omega\nu(\Sigma N,\Sigma E) = \gamma\omega\nu(\nu\mu,\nu E')$$

ως έχουσες τις πλευρές τους κάθετες μία προς μία. Αρα:

γων(ΣΜ,ΣΕ') = γων(ΣΝ,ΣΕ).

ις') ΘΕΩΡΗΜΑ. Ο γεωμετρικός τόπος της κορυφής ορθής γωνίας, της οποίας οι πλευρές εφάπτονται υπερβολής, είναι κύκλος ομόκεντρος της κωνικής, με ακτίνα ρ την πλευρά ορθογωνίου τριγώνου που έχει υποτείνουσα μήκους α και μία κάθετη πλευρά μήκους β, δηλαδή: $\rho = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$

Αν οι εφαπτόμενες ΣΜ και ΣΝ υπερβολής σχηματίζουν ορθή γωνία, (Σχ.12), τότε και οι ευθείες Ε'μ και Ε'ν σχηματίζουν επίσης ορθή γωνία διότι είναι κάθετες μία προς μία. Η γωνία (Ε'μ,Ε'ν) είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο (Σ,ΣΕ'), επομένως βλέπει ημικύκλιο διότι είναι ορθή. Αρα, γων(Σμ,Σν) = π. Δηλαδή, η χορδή μν του διευθύνοντος κύκλου είναι διάμετρος του κύκλου (Σ,ΣΕ') και το σημείο Σ είναι μέσον του τμήματος μν. Η ευθεία ΕΣ είναι μεσοκάθετη στην χορδή μν του κύκλου (Ε). Εχουμε λοιπόν:



Σχ. 9-12

$$ΣE^2+ΣE'^2 = ΣE^2+Σμ^2 = Eμ^2 = 4α^2.$$

Επίσης έχουμε:

$$ΣE^2+ΣE'^2 = 2γ^2+2ΣO^2.$$

Επομένως:

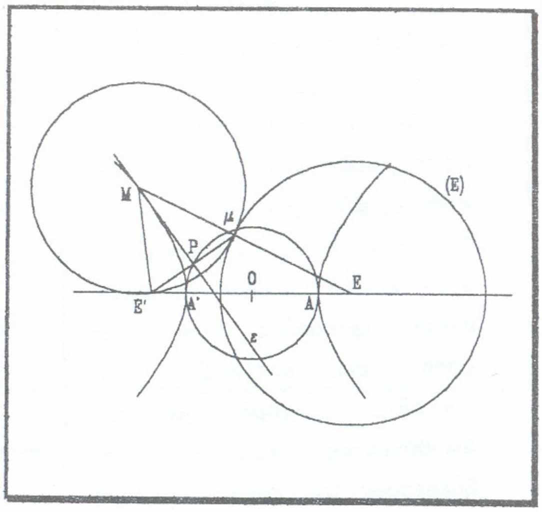
$$ΣO^2 = 2α^2-γ^2 = α^2-β^2.$$

Είναι προφανές ότι το πρόβλημα έχει πραγματική λύση όταν α>β. Αν α=β η υπερβολή καλείται ισοσκελής και τότε ο τόπος εφυλίζεται σε σημείο, το οποίο ταυτίζεται με το κέντρο της υπερβολής. Τέλος, άν α<β το πρόβλημα δεν επιδέχεται πραγματική λύση.

ιζ') ΘΕΩΡΗΜΑ. Οι προβολές των εστιών επί των εφαπτομένων υπερβολής κείνται στον πρωτεύοντα κύκλο της υπερβολής.

Εστω Ρ η προβολή της εστίας Ε' στην τυχούσα εφαπτομένη ε της υπερβολής. Όπως είναι γνωστό, το συμμετρικό μ της εστίας Ε' ως προς της εφαπτομένη ε κείται επί του διευθύνοντος κύκλου που έχει κέντρο την άλλη εστία. Επομένως έχουμε:

$$E'\mu = 2\ E'P.$$



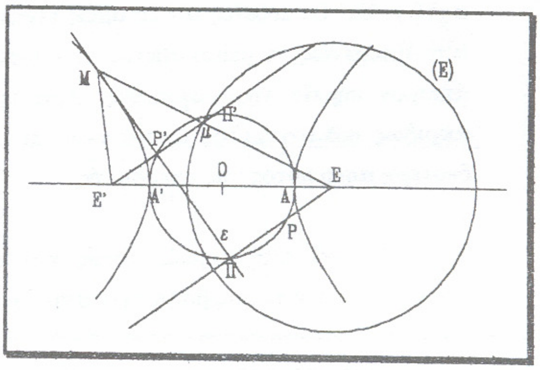
Σχ. 9-13

Παρατηρούμε ότι η σχέση αυτή ορίζει μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των σημείων μ του διευθύνοντος κύκλου (Ε) και των σημείων Ρ, κατά την οποία το τυχόν σημείο Ρ είναι το μέσον του ευθυγράμμου τμήματος Ε'μ. Εχουμε επομένως μία ομοιοθεσία κατά την οποία ο διευθύνων κύκλος μετασχηματίζεται σε κύκλο, με κέντρο το σημείο Ο, μέσον του ευθυγράμμου τμήματος Ε'Ε και ακτίνα α, το ήμισυ της ακτίνας του διευθύνοντος κύκλου.

ιη') **ΘΕΩΡΗΜΑ.** Το γινόμενο των αποστάσεων των εστιών υπερβολής από την τυχούσα εφαπτομένη ισούται με β.

Η δύναμη του σημείου Ε' ως προς τον πρωτεύοντα κύκλο, (Σχ.14), είναι:

$$E'P'.E'\Pi' = OE'^2 - \alpha^2 = \gamma^2 - \alpha^2 = \beta^2.$$



Σχ. 9-14

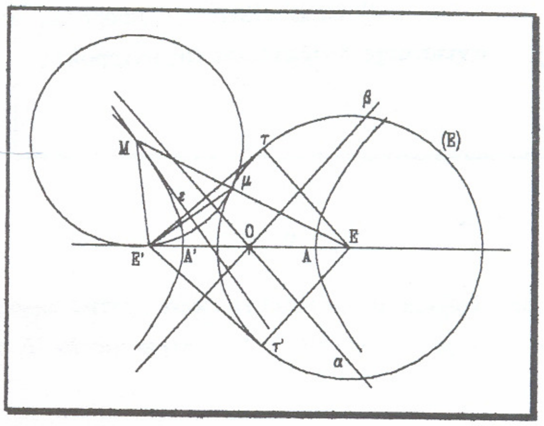
Λόγω της συμμετρίας του σχήματος, το τμήμα Ε'Π' είναι ίσο προς το τμήμα ΕΠ. Επομένως, ισχύει:

$$E'P'.E\Pi = \beta^2.$$

ιθ') **ΟΡΙΣΜΟΣ.** Ασύμπτωτοι υπερβολής λέγονται οι εφαπτόμενες στα επ' άπειρον σημεία της καμπύλης.

κ') **ΘΕΩΡΗΜΑ.** Η υπερβολή έχει δύο επ' άπειρον σημεία και δύο ασυμπτώτους, συμμετρικές ως προς τον μεγάλο άξονα της υπερβολής, οι οποίες διέρχονται διά του κέντρου της.

Για κάθε σημείο μ του διευθύνοντος κύκλου (Ε), (Σχ.15), κατασκευάζουμε το σημείο Μ της υπερβολής, ως το σημείο τομής της ακτίνας Εμ και της εφαπτομένης ε της υπερβολής στο Μ, η οποία είναι μεσοκάθετος του τμήματος Ε'μ. Επειδή το σημείο Ε' είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου (Ε), υπάρχουν δύο εφαπτόμενες προς τον κύκλο (Ε) οι οποίες άγονται από το σημείο Ε' και έστωσαν τ και τ' τα σημεία επαφής. Θεωρούμε ότι το σημείο μ λαμβάνει την θέση των σημείων τ ή τ' του κύκλου (Ε). Η μεσοκάθετος του τμήματος



Σχ. 9-15

Ε'τ εφάπτεται της υπερβολής στο σημείο κατά το οποίο η εφαπτομένη τέμνεται με την ακτίνα Ετ. Οι ευθείες αυτές όμως είναι παράλληλες, διότι είναι κάθετες προς την ευθεία Ε'τ. Επομένως, η μεσοκάθετος του τμήματος Ε'τ είναι εφαπτομένη της υπερβολής σε επ' άπειρον σημείο της καμπύλης. Αρα είναι ασύμπτωτος της υπερβολής. Με τους ίδιους ακριβώς συλλογισμούς αποδεικνύεται ότι και η μεσοκάθετος του τμήματος Ε'τ' είναι η δεύτερη ασύμτωτος της υπερβολής.

Επειδή από σημείο εκτός κύκλου άγονται δύο ακριβώς εφαπτόμενες προς τον κύκλο, γι' αυτό η υπερβολή έχει ακριβώς δύο ασυμπτώτους.

κα') ΘΕΩΡΗΜΑ. Οι ασύπτωτοι υπερβολής διέρχονται διά του κέντρου της υπερβολής.

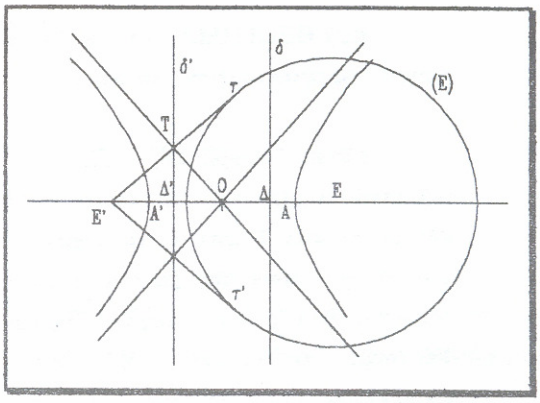
Παρατηρούμε ότι η ασύμπτωτος α της υπερβολής διέρχεται διά του μέσου της πλευράς Ε'τ, (Σχ.15), του τριγώνου ΕΕ'τ και είναι παράλληλη προς την πλευρά Ετ. Επομένως, διέρχεται διά του μέσου Ο της τρίτης πλευράς Ε'τ του τριγώνου ΕΕ'τ. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι και η δεύτερη ασύμπτωτος β διέρχεται δια του σημείου Ο. Αρα, οι ασύμπτωτοι υπερβολής διέρχονται δια του κέντρου αυτής και είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα της υπερβολής.

κβ') ΟΡΙΣΜΟΣ. Γωνία των ασυμπτώτων λέγεται η κυρτή γωνία αυτών εντός της οποίας περιέχεται η υπερβολή.

κγ') ΘΕΩΡΗΜΑ. Οι προβολές εκάστης εστίας επί των ασυμπτώτων κείνται στην αντιστοίχο διευθετούσα της υπερβολής.

Αν Τ είναι το μέσον του τμήματος Ε'τ, και Δ' η προβολή του σημείου αυτού επί του εστιακού άξονα, τότε, (Σχ.16):

$$Ο\Delta' = \frac{ΟΤ^2}{ΟΕ'} = \frac{Ε\tau^2}{4ΟΕ'} = \frac{\alpha^2}{\gamma}$$



Σχ. 9-16

κδ') ΘΕΩΡΗΜΑ. Η κάθε διευθετούσα είναι ο ριζικός άξονας της αντίστοιχης εστίας, θεωρουμένης ως κύκλος μηδενικής ακτίνας και του διευθύνοντος κύκλου με κέντρο την άλλη εστία. Το σημείο Τ, (Σχ.16), είναι σημείο της διευθετούσας δ' και ισχύει $Τε'^2=Τ\tau^2$.

κε') ΘΕΩΡΗΜΑ. Οι προβολές των σημείων τομής των ασυμπτώτων με τον κύκλο διαμέτρου ΕΕ' επί του εστιακού άξονα είναι οι κορυφές Α και Α' της υπερβολής.

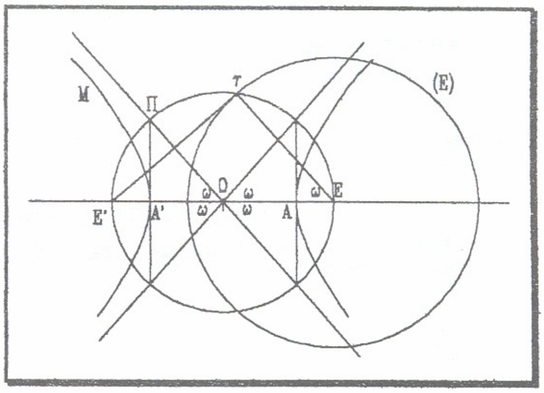
Εάν καλέσουμε ω την γωνία (Ετ,ΕΕ'), (Σχ.17), τότε έχουμε την ισότητα:

γων(Ετ,ΕΕ') = γων(ΟΕ',ΟΠ) = ω,

διότι έχουν πλευρές παράλληλες μία προς μία.

Επίσης:

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{2\alpha}{2\gamma}\_\eta\mu\omega = \frac{\beta}{\gamma}\_\varepsilon\varphi\omega = \frac{\beta}{\alpha}$$

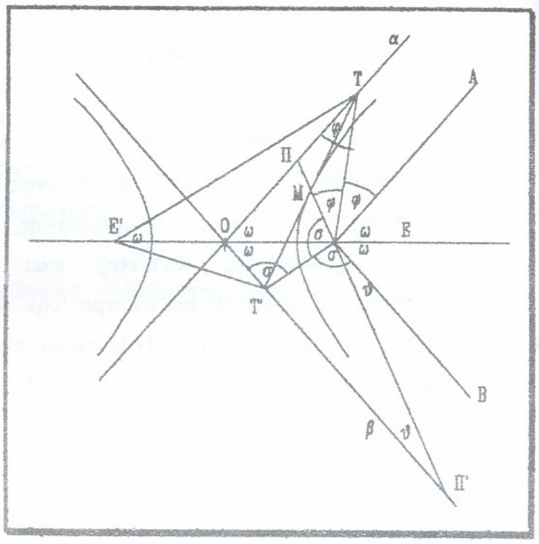


Σχ. 9-17

επομένως, στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΠΑ', έχουμε ΟΠ=γ, γων(ΟΠ,ΟΑ')=ω. Η προβολή του σημείου Π στον εστιακό άξονα είναι σημείο Α' τέτοιο ώστε ΟΑ' = ΟΠ.συνω, άρα ΟΑ'=α και Α'Π=β.

κς') ΘΕΩΡΗΜΑ. Το σημείο επαφής τυχούσας εφαπτομένης υπερβολής διχοτομεί το τμήμα της εφαπτομένης, το οποίο αποτέμνεται μεταξύ των ασυμπτώτων της υπερβολής.

Εστω υπερβολή, (Σχ.18), με ασυμπτώτους Οα και Οβ, εστίες Ε και Ε', κέντρο Ο και Τ και Τ' τα σημεία τομής των ασυμπτώτων της με την εφαπτομένη της υπερβολής στο τυχόν σημείο Μ. Φέρνουμε τις ευθείες ΕΑ και ΕΒ, παράλληλες προς τις ασυμπτώτους α και β της υπερβολής και την ΕΜ, η οποία τέμνει τις ασυμπτώτους στα σημεία Π και Π'. Η ευθεία ΕΒ είναι η εστιακή ακτίνα του επ' άπειρον σημείου της υπερβολής στο οποίο εφάπτεται η ασύμπτωτος Οβ. Επομένως, η ευθεία ΕΤ' διχοτομεί την γωνία (ΕΒ,ΕΜ). Το τρίγωνο ΕΠ'Τ' είναι ισοσκελές, διότι γων(Τ'Ε,Τ'Ο)=γων(ΕΒ,ΕΤ')=γων(ΕΤ',ΕΜ) και επομένως:



Σχ. 9-18

$$Π'Τ' = Τ'Ε.$$

Με ανάλογο συλλογισμό αποδεικνύεται ότι η ευθεία ΕΤ διχοτομεί την γωνία (ΕΑ,ΕΠ) και ότι το τρίγωνο ΠΕΤ είναι ισοσκελές. Επομένως:

$$ΠΤ = ΠΕ.$$

Η ευθεία ΟΕ είναι διχοτόμος του τριγώνου ΟΠΠ'. Επομένως, από το Θεώρημα της διχοτόμου, έχουμε:

$$\frac{ΟΠ'}{ΟΠ} = \frac{Π'Ε}{ΕΠ} = \frac{Π'Τ'}{ΤΠ}$$

Τέλος, από το τρίγωνο ΟΤΤ', με διατέμνουσα την ΠΠ', έχουμε:

$$\frac{\text{ΟΠ}'}{\text{Π}'\text{Τ}'}\cdot\frac{\text{Τ}'\text{Μ}}{\text{ΜΤ}}\cdot\frac{\text{ΤΠ}}{\text{ΠΟ}}=1$$

Αντικαθιστώντας στην σχέση αυτή από τις προηγούμενες ισότητες, προκύπτει:

$$\text{ΤΜ} = \text{ΜΤ}'.$$

κζ') ΘΕΩΡΗΜΑ. Το τετράπλευρο με κορυφές τις εστίες Ε και Ε' και τα σημεία τομής Τ και Τ' της τυχούσας εφαπτομένης με τις ασυμπτώτους υπερβολής είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

Η γωνία (ΕΤ,ΕΤ') υπό την οποία φαίνεται από την εστία Ε, (Σχ.18), το τμήμα ΤΤ' μεταβλητής εφαπτομένης, το οποίο αποτέμνεται μεταξύ των ασυμπτώτων, είναι σταθερή και ίση με το μισό της γωνίας υπό την οποία φαίνονται τα σημεία επαφής των σταθερών εφαπτομένων, (των ασυμπτώτων). Δηλαδή, έχουμε:

$$(\text{ΕΤ},\text{ΕΤ}')=\frac{1}{2}(2\phi+2\sigma)=\phi+\sigma=\pi-\omega$$

διότι:

$$2\varphi+2\sigma+2\omega=2\pi$$

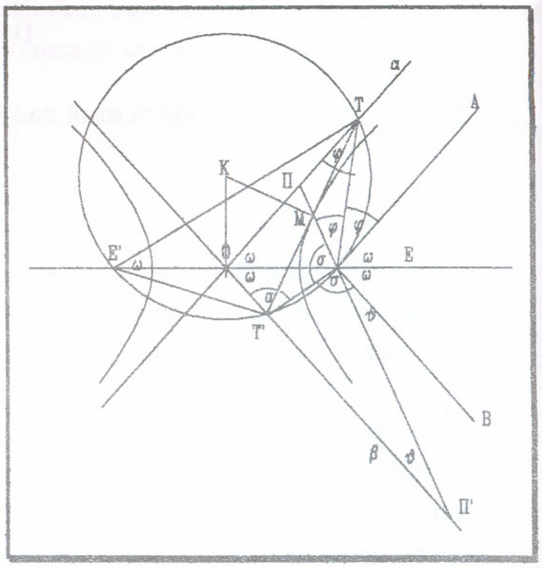
όπως προκύπτει από το άθροισμα των γωνιών στο σημείο Ε. Αλλά και η γωνία (Ε'Τ,Ε'Τ') είναι, γιά τον ίδιο λόγο, ίση με το μισό της γωνίας των ασυμπτώτων. Δηλαδή, έχουμε:

$$(\text{Ε}'\text{Τ},\text{Ε}'\text{Τ}') = \omega.$$

Παρατηρούμε δηλαδή, ότι στο τετράπλευρο ΕΤΕ'Τ' δύο απέναντι γωνίες, οι Ε και Ε', έχουν άθροισμα δύο ορθές. Επομένως, είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

κη') ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΕΣΤΙΩΝ. Κατασκευή εστιών υπερβολής, όταν δίδονται μία εφαπτομένη και οι ασύμπτωτες της υπερβολής.

Το προηγούμενο Θεώρημα μας δίνει την δυνατότητα κατασκευής των εστιών Ε και Ε' υπερβολής, όταν δίδονται οι ασύμπτωτοι και μία εφαπτομένη.



Σχ. 9-19

Ο κύκλος ο περιγεγραμμένος περί το τετράπλευρο ΕΤΕ'Τ', (Σχ.19), έχει κέντρο Κ το οποίον είναι το σημείο τομής των μεσοκαθέτων των χορδών ΕΕ' και ΤΤ'.

Κατασκευάζουμε την μεσοκάθετο του τμήματος ΕΕ', η οποία είναι η εξωτερική διχοτόμος της γωνίας των εστιακών ακτίνων, διότι τα σημεία Ε και Ε' είναι συμμετρικά ως προς το κέντρο Ο της υπερβολής. Η τομή αυτής της ευθείας με την μεσοκάθετο του τμήματος ΤΤ' προσδιορίζει το κέντρο Κ του κύκλου. Με κέντρο το σημείο Κ γράφουμε κύκλο διερχόμενο διά των σημείων Τ και Τ'. Ο κύκλος αυτός τέμνει τον εστιακό άξονα, ο οποίος είναι η διχοτόμος των εστιακών ακτίνων, στα σημεία Ε και Ε', τις εστίες της υπερβολής.

κθ') ΘΕΩΡΗΜΑ. Το εμβαδόν του τριγώνου που έχει πλευρές τις ασυμπτώτους και μία τυχούσα εφαπτομένη της υπερβολής, είναι σταθερό.

Τα μέτρα των γωνιών του τριγώνου ΟΤ'Ε είναι ω, φ και επομένως η τρίτη έχει μέτρο σ, διότι ω+φ+σ=π, (Σχ.19).

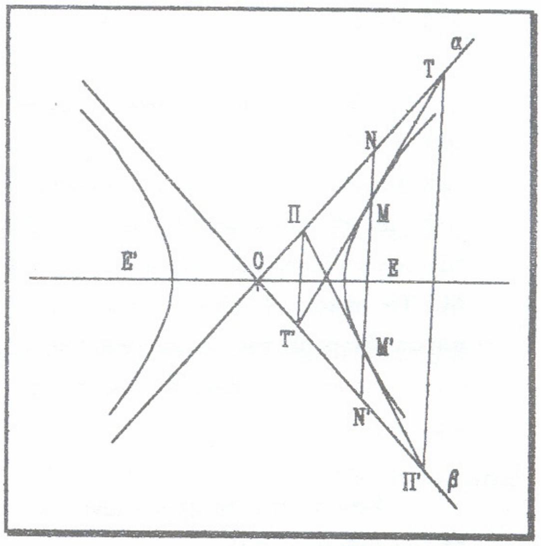
Επίσης, από την σχέση γων(ΕΟ,ΕΤ)+σ+ω=π προκύπτει, επίσης, ότι γων(ΕΟ,ΕΤ) = φ. Αρα, οι γωνίες του τριγώνου ΟΕΤ έχουν μέτρα ω, φ, σ και επομένως, τα τρίγωνα ΟΤ'Ε και ΟΕΤ είναι όμοια. Από την ομοιότητα αυτή προκύπτει η σχέση:

$$\frac{OT}{OE}=\frac{OE}{OT'}\_\,OT.OT'=OE^2=\gamma^2$$

Επομένως, το εμβαδόν (ΟΤΤ') του τριγώνου ΟΤΤ' είναι:

$$(\text{ΟΤΤ}') = \frac{1}{2}\text{ΟΤ}.\text{ΟΤ}'.\eta\mu 2\omega = \frac{1}{2}\gamma^2 \eta\mu 2\omega = \alpha\beta .$$

λ') ΘΕΩΡΗΜΑ. Τα μεταξύ υπερβολής και των ασυμτώτων της αποτεμνόμενα τμήματα απο τυχούσα χορδή τηε υπερβολής είναι ίσα.

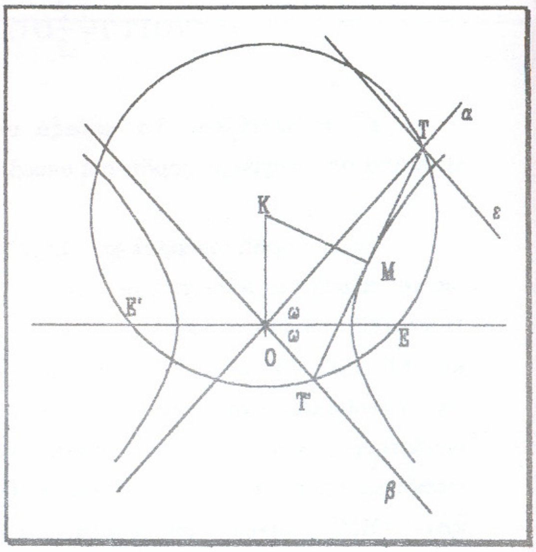


Σχ. 9-20

Εστω χορδή υπερβολής, (Σχ.20), η οποία τέμνει τις ασυμπτώτους στα σημεία Ν και Ν' και την υπερβολή στα σημεία Μ και Μ'. Εάν ΤΤ' και ΠΠ' οι εφαπτόμενες της υπερβολής στα σημεία Μ και Μ' αντίστοιχα, τότε, από το προηγούμενο Θεώρημα προκύπτει, ότι τα τρίγωνα ΟΤΤ' και ΟΠΠ' είναι ισοδύναμα. Τούτο συνεπάγεται ότι, αν αφαιρέσουμε το κοινό τρίγωνο ΟΠΤ', οι ευθείες ΤΠ' και ΠΤ' είναι παράλληλες, διότι τα τρίγωνα ΠΤΤ' και ΠΠ'Τ' έχουν ίσα εμβαδά και κοινή βάση, άρα και ίσα ύψη. Η ευθεία ΜΜ' διέρχεται διά των μέσων των διαγωνίων του τραπεζίου ΤΠΤ'Π', άρα, ως μεσοπαράλληλος του τραπεζίου διέρχεται διά των μέσων Ν και Ν' των πλευρών ΤΠ και Τ'Π'. Τέλος, τα τμήματα ΜΝ και Μ'Ν' είναι, και τα δύο, ίσα προς το μισό της πλευράς ΠΤ', διότι είναι παράλληλα προς αυτήν και διέρχονται διά των μέσων των πλευρών των τριγώνων ΤΠΤ' και Π'ΠΤ'. Αρα είναι: ΝΜ=Μ'Ν'.

λα') ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ. Κατασκευή υπερβολής όταν δίδονται οι ασύμπτωτοι Οα και Οβ και ένα σημείο Μ ή μία εφαπτομένη ΤΤ' της υπερβολής.

Η τυχούσα διά του Μ ευθεία τέμνει τις Οα καί Οβ στα σημεία Ν και Ν'. Το σημείο Μ' δια το οποίο ΜΝ = Ν'Μ' είναι σημείο της υπερβολής, σύμφωνα με το προηγούμενο Θεώρημα. Με αυτήν την μέθοδο κατασκευάζουμε σημεία της υπερβολής.



Σχ. 9-21

Εάν προσδιορίσουμε ευθύγραμμο τμήμα ΤΜΤ', με τα άκρα Τ, Τ' κείμενα επί των ασυμπτώτων α, β και το σημείο Μ να είναι μέσον του τμήματος ΤΤ', τότε έχουμε την εφαπτομένη της υπερβολής στο σημείο Μ. Το σημείο Τ είναι η τομή της μιάς ασυμπτώτου με την συμμετρική της άλλης ασυμπτώτου, με κέντρο συμμετρίας το σημείο Μ.

Εάν δίδεται η εφαπτομένη ΤΤ' της υπερβολής, τότε το σημείο επαφής είναι το μέσον Μ του τμήματος ΤΤ'.

Ετσι, η λύση του προβλήματος αυτού ανάγεται σε προηγούμενη κατασκευή, κατά την οποία δίδονται οι ασύμπτωτοι της υπερβολής και μία εφαπτομένη αυτής.

9.1. ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

1. Να κατασκευασθεί η υπερβολή της οποίας δίδονται τα άκρα του μεγάλου άξονα και μία εφαπτομένη.

2. Να κατασκευασθεί η υπερβολή της οποίας δίδονται το κέντρο Ο, το μήκος του μεγάλου άξονα και δύο εφαπτόμενες.

3. Να κατασκευασθεί η υπερβολή της οποίας δίδονται μία εστία, μία εφαπτομένη, η διεύθυνση του μεγάλου άξονα και το μήκος αυτού.

4. Να κατασκευασθεί η υπερβολή της οποίας δίδονται μία εστία και τρείς εφαπτόμενες.

5. Να κατασκευασθεί η υπερβολή της οποίας δίδονται μία εστία, δύο εφαπτόμενες και ένα σημείο.

6. Να κατασκευασθεί η υπερβολή της οποίας δίδονται μία εστία και τρία σημεία.

7. Να κατασκευασθεί η υπερβολή της οποίας δίδονται μία εστία μία εφαπτομένη και δύο σημεία.

8. Να κατασκευασθεί η υπερβολή της οποίας δίδονται μία εστία, δύο εφαπτόμενες και το σημείο επαφής μιάς από αυτές.

9. Να κατασκευασθεί η υπερβολή της οποίας δίδονται οι ασύμπτωτοι και το μήκος 2α ή 2γ.

10. Να κατασκευασθεί η υπερβολή της οποίας δίδονται μία εστία, μία ασύμπτωτος και ένα σημείο ή μία εφαπτομένη.

11. Να κατασκευασθεί η υπερβολή της οποίας δίδονται μία εστία, μία ασύμπτωτος και το μήκος 2α ή 2γ.

12. Να κατασκευασθεί η υπερβολή της οποίας δίδονται μία ασύμπτωτος και τρία σημεία.

13. Να κατασκευασθεί η υπερβολή της οποίας δίδονται μία ασύμπτωτος, δύο σημεία και μία εφαπτομένη σ' ένα εξ αυτών.

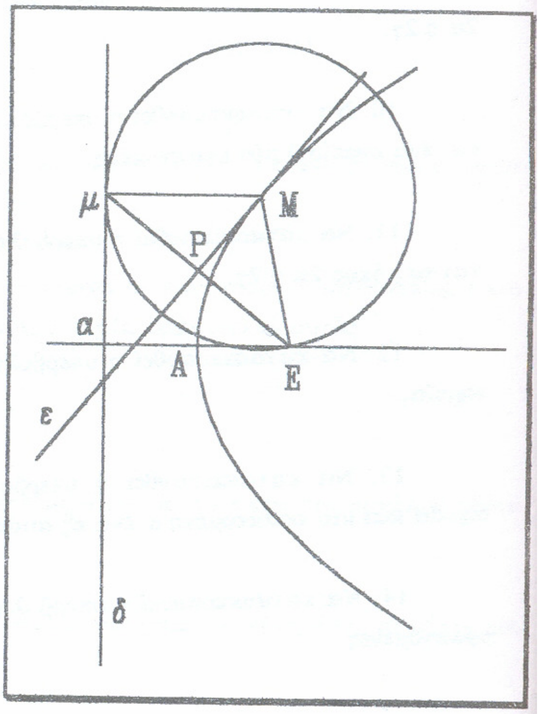
14. Να κατασκευασθεί η υπερβολή της οποίας δίδονται μία ασύμπτωτος και τρεις εφαπτόμενες.

10. ΠΑΡΑΒΟΛΗ

α') ΟΡΙΣΜΟΣ. Θεωρούμε την παραβολή ως τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου, τα οποία είναι κέντρα κύκλων εφαπτόμενοι σταθερής ευθείας δ και διερχόμενοι διά σταθερού σημείου Ε. Η ευθεία δ λέγεται διευθετούσα και το σημείο Ε λέγεται εστία της παραβολής. Η ευθεία που διέρχεται διά της εστίας Ε και είναι κάθετος προς την διευθετούσα λέγεται άξονας της παραβολής.

β') ΘΕΩΡΗΜΑ. Τα σημεία της παραβολής ισαπέχουν από σημείο και ευθεία.

Εάν Μ είναι το τυχόν σημείο της παραβολής, (Σχ.1), επειδή, σύμφωνα με τον ορισμό, αυτό είναι κέντρο κύκλου, ο οποίος εφάπτεται στην διευθετούσα και διέρχεται διά της εστίας Ε, γι' αυτό το σημείο Μ ισαπέχει από την διευθετούσα και την εστία.



Σχ. 10-1

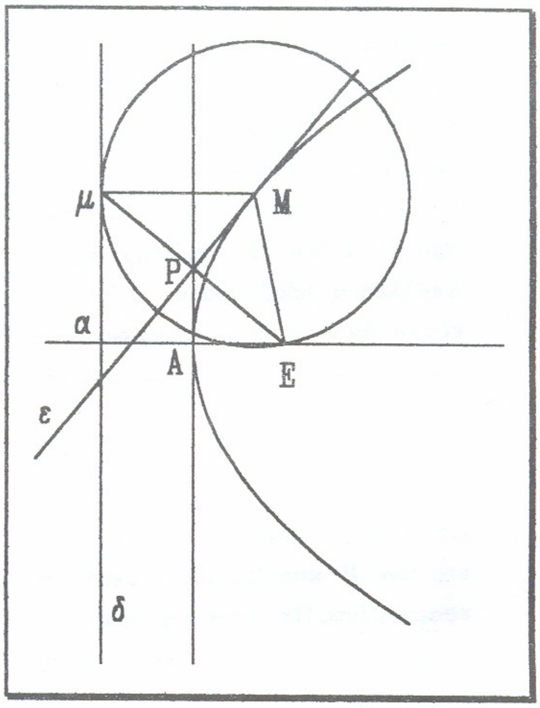
γ') ΘΕΩΡΗΜΑ. Τα συμμετρικά σημεία της εστίας παραβολής ως προς τις εφαπτόμενες αυτής κείται στην διευθετούσα.

Θεωρούμε την παραβολή, η οποία δίδεται ~~με~~ με την εστία Ε και την διευθετούσα δ, (Σχ.1). Εάν μ είναι το τυχόν σημείο της διευθετούσας της παραβολής, τότε η κάθετος προς την διευθετούσα στο σημείο μ και η μεσοκάθετος του τμήματος Εμ τέμνονται στο σημείο Μ. Το σημείο Μ είναι σημείο της παραβολής, διότι η απόσταση του σημείου Μ από την εστία Ε είναι ίση με την απόσταση του σημείου Μ και από την διευθετούσα δ. Η μεσοκάθετος ευθεία του τμήματος Εμ είναι η εφαπτομένη της παραβολής διότι είναι διχοτόμος της γωνίας (ΜΕ,Μμ).

δ') ΘΕΩΡΗΜΑ. Εάν α είναι το σημείο τομής του άξονα παραβολής με την διευθετούσα δ αυτής, (Σχ.1), τότε το μέσον Α του τμήματος Εα είναι σημείο της παραβολής, διότι αυτό ισαπέχει από την εστία και την διευθετούσα.

ε΄) ΟΡΙΣΜΟΣ. Το σημείο Α λέγεται κορυφή της παραβολής.

ς΄) ΘΕΩΡΗΜΑ. Οι προβολές της εστίας στις εφαπτόμενες της παραβολής κείνται στην κορυφαία εφαπτομένη της παραβολής.



Σχ. 10-2

Γιά κάθε σημείο Μ της παραβολής, ισχύει 2.ΕΡ = Εμ, (Σχ.2). Η σχέση αυτή ορίζει μία ομοιοθεσία μεταξύ των σημείων μ και Ρ. Επειδή δε το σημείο μ κείται επί της ευθείας δ, έπεται ότι το αντίστοιχο σημείο Ρ κείται σε ευθεία παράλληλη προς την διευθετούσα, διερχόμενη δια του σημείου Α, το οποίο είναι μέσον του τμήματος Εα. Επομένως, είναι η εφαπτομένη στην κορυφή Α της παραβολής.

ζ΄) ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΣΗΜΕΙΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΩΝ. Το Θεώρημα της παραγράφου γ' παρέχει την δυνατότητα να κατασκευάζουμε σημεία και εφαπτόμενες της παραβολής. Για τον σκοπό αυτό, (Σχ.2), θεωρούμε την τυχούσα ακτίνα που διέρχεται δια του σημείου Ε, η οποία τέμνει την διευθετούσα στο σημείο μ. Κατασκευάζουμε την μεσοκάθετο στο τμήμα Εμ και έχουμε την εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο τομής αυτής με την κάθετο στην διευθετούσα στο σημείο μ.

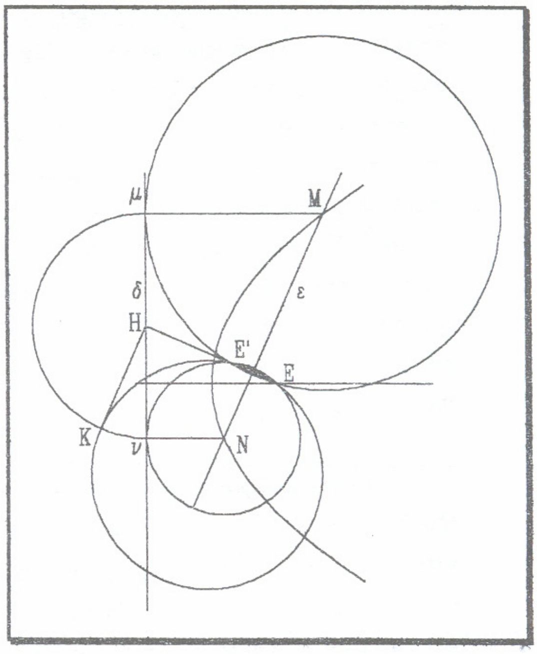
Από την κατασκευή αυτή παρατηρούμε ότι υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των σημείων μ της διευθετούσας και των σημείων Μ της παραβολής.

η΄) ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ ΤΟΜΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ. Έστω παραβολή η οποία δίδεται με την διευθετούσα δ και την εστία Ε και ε τυχούσα ευθεία του επιπέδου της παραβολής. Αν Μ είναι ένα κοινό σημείο της παραβολής και της ευθείας ε, τότε αυτό είναι κέντρο κύκλου, ο οποίος εφάπτεται στην διευθετούσα δ και διέρχεται δια της εστίας Ε. Επομένως, το συμμετρικό Ε' της εστίας Ε ως προς την ευθεία ε είναι σημείο του κύκλου αυτού. Ζητείται, λοιπόν, να κατασκευασθεί κύκλος, διερχόμενος δια των σημείων Ε και Ε' εφαπτόμενος στην ευθεία δ. Αυτό είναι γνωστό ως ένα από τα Απολλώνια προβλήματα, η λύση του οποίου έχει ως εξής: Κατασκευάζουμε τυχόντα κύκλο, διερχόμενο δια των σημείων Ε και Ε', ο οποίος τέμνει την διευθετούσα δ στα σημεία Τ και Τ'. Αν Η είναι το σημείο τομής των ευθειών δ και ΕΕ', τότε έχουμε την σχέση:

$$HT.HT' = HE.HE' = HK^2.$$

Δηλαδή, η δύναμη του σημείου Η, ως προς τον τυχόντα κύκλο, ο οποίος διέρχεται δια των σημείων Ε και Ε', είναι σταθερή και ισούται με το τετράγωνο του τμήματος της εφαπτομένης ΗΚ, στον τυχόντα κύκλο, όπου Κ είναι το σημείο επαφής.

Γιά την κατασκευή, λοιπόν, των σημείων τομής της ευθείας ε με την παραβολή, γράφουμε τυχόντα κύκλο, διερχόμενο διά των σημείων Ε και Ε', ο οποίος τέμνει την διευθετούσα δ στα σημεία Τ και Τ'.



Σχ. 10-3

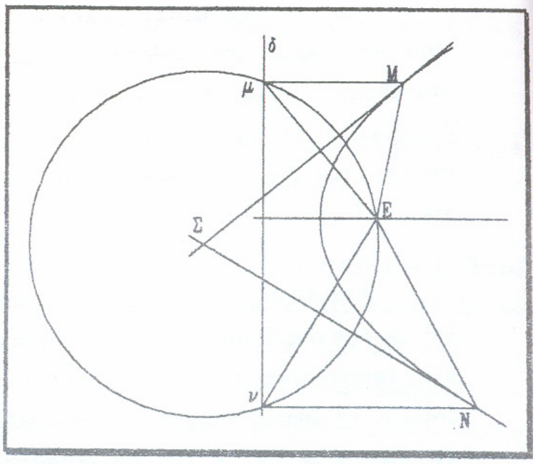
Από το σημείο τομής, Η, της ευθείας ΕΕ' με την διευθετούσα δ, κατασκευάζουμε μία εφαπτομένη του κύκλου αυτού και έστω Κ το σημείο επαφής. Προσδιορίζουμε τα σημεία μ και ν της διευθετούσας δ, τέτοια ώστε Ημ = Ην = ΗΚ. Οι κύκλοι οι οποίοι διέρχονται διά των σημείων (Ε,Ε',μ) και (Ε,Ε',ν) εφάπτονται στην διευθετούσα δ στα σημεία μ και ν αντίστοιχα, διότι:

$$HE.HE' = H\mu^2 \text{ και } HE.HE' = H\nu^2.$$

Τα κέντρα των κύκλων αυτών είναι τα κοινά σημεία της ευθείας ε και της παραβολής.

θ΄) ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΩΝ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ. Εάν ΣΜ είναι εφαπτομένη παραβολής, η οποία διέρχεται δια του σημείου Σ, τότε το σημείο μ, συμμετρικό της εστίας ως προς την εφαπτομένη, κείται στην διευθετούσα δ της παραβολής. Επομένως, τα σημεία Ε και μ ισαπέχουν από το σημείο Σ.

Κατασκευή: Με κέντρο Σ και ακτίνα ΣΕ γράφουμε κύκλο, (Σχ.4), ο οποίος τέμνει την διευθετούσα στα σημεία μ και ν. Οι μεσοκάθετες ευθείες των τμημάτων Εμ και Εν είναι οι εφαπτόμενες της παραβολής, οι οποίες άγονται δια του σημείου Σ. Τα σημεία επαφής είναι τα σημεία τομής Μ και Ν των εφαπτομένων αυτών με τις ευθείες που είναι κάθετες στην διευθετούσα, στα σημεία μ και ν αντίστοιχα.



Σχ. 10-4

Είναι προφανές ότι, εάν ο κύκλος (Σ,ΣΕ) τέμνει την διευθετούσα σε δύο ένα ή κανένα πραγματικά σημεία, θα έχουμε αντιστοίχως δύο μία ή καμμία πραγματικές εφαπτόμενες της παραβολής, διερχόμενες δια του σημείου Σ. Τα σημεία δια των οποίων δεν άγονται πραγματικές εφαπτόμενες προς την παραβολή, λέγονται εσωτερικά σημεία της καμπύλης. Τα σημεία δια των οποίων άγεται μοναδική εφαπτομένη είναι τα σημεία της παραβολής.

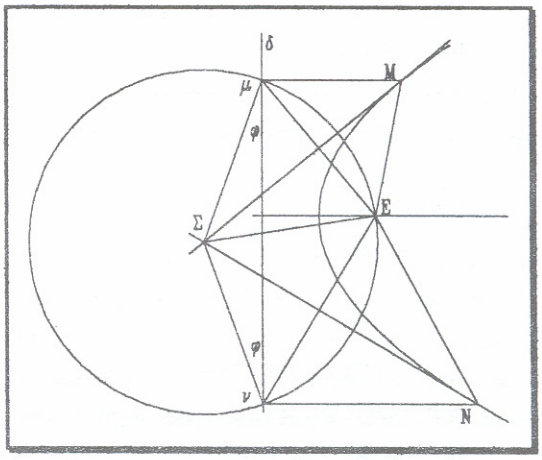
ι΄) ΘΕΩΡΗΜΑ. Εάν ΣΜ και ΣΝ είναι εφαπτόμενες παραβολής στα σημεία Μ και Ν αντιστοίχως, τότε η ευθεία ΣΕ διχοτομεί την γωνία, (ΕΜ,ΕΝ), υπό την οποία φαίνονται τα σημεία επαφής από την εστία.

Επειδή τα σημεία μ και ν, (Σχ.5), είναι συμμετρικά της εστίας ως προς τις εφαπτόμενες ΣΜ και ΣΝ αντίστοιχα, έχουμε:

$$\gamma\omega\nu(E\Sigma,EM) = \gamma\omega\nu(\mu\Sigma,\mu M)$$

$$\gamma\omega\nu(E\Sigma,EN) = \gamma\omega\nu(\nu\Sigma,\nu\tilde{N}).$$

Τα δεξιά μέλη όμως αυτών των ισοτήτων είναι ίσα, διότι αυτές οι γωνίες έχουν μέτρα ίσα με $\varphi+\pi/2$, όπου φ είναι οι παρά την βάση του ισοσκελούς τριγώνου Σμν γωνίες, άρα είναι ίσες.



Σχ. 10-5

ια΄) ΘΕΩΡΗΜΑ. Αν ΣΜ και ΣΝ είναι οι εφαπτόμενες παραβολής στα σημεία Μ και Ν αντίστοιχα, τότε η γωνία των εφαπτομένων ισούται με το μισό της γωνίας υπό την οποία φαίνονται από την εστία Ε της παραβολής τα σημεία επαφής, δηλαδή:

$$2.\gamma\omega\nu(\Sigma M,\Sigma N) = \gamma\omega\nu(EM,EN).$$

Εχουμε, (Σχ.5):

$$2\pi = \gamma\omega\nu(EN,EM) + \gamma\omega\nu(EM,E\Sigma) + \gamma\omega\nu(E\Sigma,EN) =$$

$$= \gamma\omega\nu(EN,EM) + \gamma\omega\nu(\mu M,\mu\Sigma) + \gamma\omega\nu(\nu N,\nu\Sigma).$$

Από την σχέση αυτή και λαμβάνοντας υπ' όψη το προηγούμενο θεώρημα, προκύπτει:

$$\gamma\omega\nu(EN,EM) = \pi-2\varphi.$$

Από το τρίγωνο Σμν, όμως, έχουμε:

$$\pi-2\varphi = \gamma\omega\nu(\Sigma\nu,\Sigma\mu).$$

Επειδή δε οι ευθείες ΣΜ και ΣΝ είναι μεσοκάθετες των τμημάτων Εμ και Εν αντιστοίχως, προκύπτει:

$$\gamma\omega\nu(\Sigma\nu,\Sigma\mu) = 2\ \gamma\omega\nu(\Sigma N,\Sigma E) + 2\ \gamma\omega\nu(\Sigma E,\Sigma M) = 2\ \gamma\omega\nu(\Sigma N,\Sigma M).$$

Επομένως:

$$\gamma\omega\tilde{\nu}(EN,EM) = 2\ \gamma\omega\nu(\Sigma N,\Sigma M).$$

ιβ΄) ΘΕΩΡΗΜΑ. Αν ΣΜ και ΣΝ είναι εφαπτόμενες παραβολής στα σημεία Μ και Ν αντίστοιχα, η γωνία που σχηματίζει η μία εφαπτομένη με την εστιακή ακτίνα ισούται με την γωνία που σχηματίζει η άλλη εφαπτομένη με την παράλληλο προς τον άξονα της παραβολής που άγεται από το σημείο Σ.

Εάν σ είναι το σημείο τομής της καθέτου προς την διευθετούσα από το σημείο Σ, τότε έχουμε, (Σχ.6):

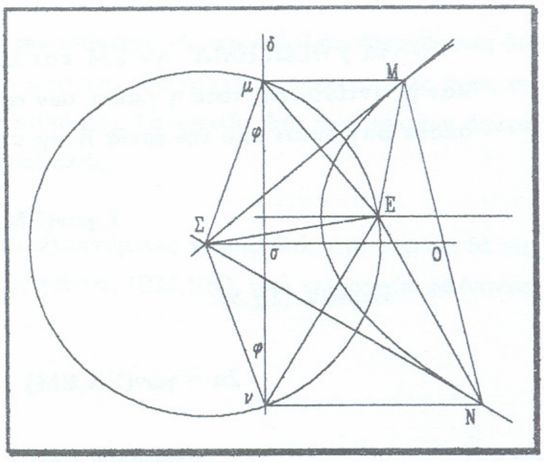
$$\gamma\omega\nu(\Sigma\sigma,\Sigma N) = \gamma\omega\nu(\nu\mu,\nu E)$$

διότι έχουν πλευρές κάθετες μία προς μία.

Επίσης,

$$2\ \gamma\omega\nu(\Sigma M,\Sigma E) = \gamma\omega\nu(\Sigma\mu,\Sigma E)$$

ως εγγεγραμμένη και επίκεντρη αντίστοιχα, που βλέπουν το ίδιο τόξο στον κύκλο (Σ,ΣΕ). Τέλος,



Σχ. 10-6

$$\gamma\omega\nu(\Sigma\mu,\Sigma E) = 2\ \gamma\omega\nu(\Sigma M,\Sigma E)$$

διότι η ευθεία ΣΜ είναι μεσοκάθετη του τμήματος Εμ.

Εκ των ανωτέρω συνάγεται ότι:

$$\gamma\omega\nu(\Sigma M,\Sigma E) = \gamma\omega\nu(\Sigma\sigma,\Sigma N)$$

ιγ΄) ΘΕΩΡΗΜΑ. Αν οι ευθείες ΣΜ και ΣΝ εφάπτονται παραβολής στα σημεία Μ και Ν αντίστοιχα, η διάμεσος ΣΟ του τριγώνου ΣΜΝ είναι παράλληλη στο άξονα της παραβολής.

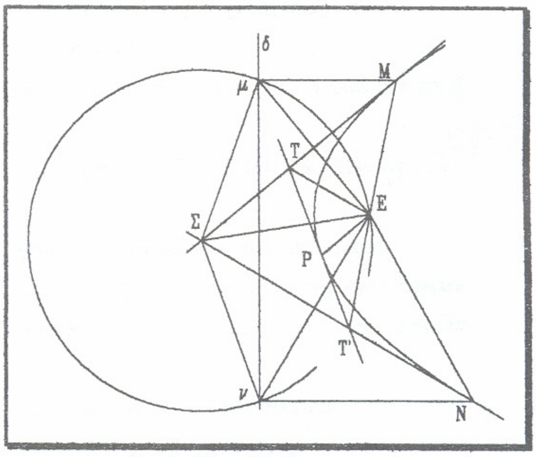
Εάν σ είναι το σημείο τομής της καθέτου προς την διευθετούσα παραβολής, (Σχ.6), η οποία άγεται από το σημείο Σ, τότε η ευθεία Σσ, ως μεσοκάθετος της χορδής μν του κύκλου (Σ,ΣΕ), είναι μεσοπαράλληλος τως ευθείων μΜ και νΝ, διότι και οι τρεις ευθείες είναι κάθετες προς την διευθετούσα. Αρα, η Σσ, ως μεσοπαράλληλος, διχοτομεί το τμήμα ΜΝ, το οποίο έχει άκρα επί των παραλλήλων Μμ και Νν και επομένως η ευθεία ΣΟ είναι διάμεσος του τριγώνου ΣΜΝ.

ιδ΄) ΘΕΩΡΗΜΑ. Τα άκρα του τμήματος μεταβλητής εφαπτομένης το οποίο αποτέμνεται μεταξύ δύο σταθερών εφαπτομένων παραβολής, φαίνεται από την εστία υπό σταθερή γωνία.

Εάν ΣΜ και ΣΝ είναι δύο σταθερές εφαπτόμενες παραβολής στα σημεία Μ και Ν αντίστοιχα, (Σχ.7), διερχόμενες δια του σημείου Σ, και ΤΤ' είναι το τμήμα της εφαπτομένης στο Ρ, το οποίο αποτέμνεται μεταξύ των σταθερών εφαπτομένων ΣΜ και ΣΝ, τότε, εφαρμόζοντας δύο φορές το Θεώρημα της παραγράφου ?? έχουμε:

$$2\ \gamma\omega\nu(ET,EP) = \gamma\omega\nu(EM,EP)$$

$$2\ \gamma\omega\nu(EP,ET') = \gamma\omega\nu(EP,EN).$$



Σχ. 10-7

Προσθέτοντας κατά μέλη τις ισότητες αυτές έχουμε:

$$2\ \gamma\omega\nu(ET,ET') = 2\pi - \gamma\omega\nu(EM,EN)$$

Επομένως, το τμήμα ΤΤ' φαίνεται από την εστία Ε υπό σταθερή γωνία, ίση με το μισό της (κυρτής) γωνίας υπό την οποία φαίνονται από την εστία Ε τα σταθερά σημεία επαφής.

ιε΄) ΘΕΩΡΗΜΑ. Ο περιγεγραμμένος κύκλος περί το τρίγωνο που ορίζουν τρεις εφαπτόμενες παραβολής διέρχεται διά της εστίας αυτής.

Αν ΣΜ, ΣΝ, ΤΤ' είναι τρεις εφαπτόμενες παραβολής στα σημεία Μ, Ν, Ρ αντίστοιχα, (Σχ.8), σύμφωνα με το προηγούμενο Θεώρημα, έχουμε:

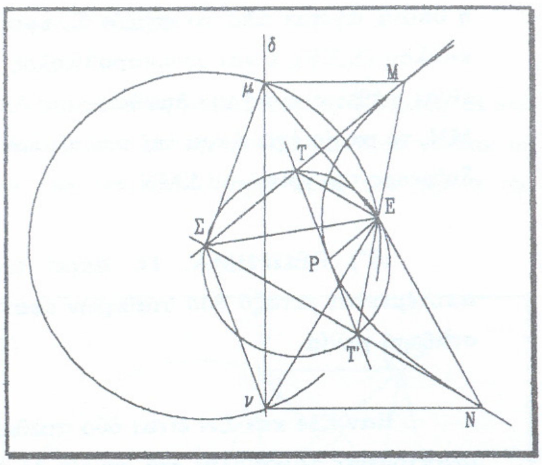
2 γων(ΕΤ,ΕΤ') = 2π - γων(ΕΜ,ΕΝ).

Από το Θεώρημα της παραγράφου ?? προκύπτει ότι:

2 γων(ΣΜ,ΣΝ) = γων(ΕΜ,ΕΝ).

Από τις δύο αυτές ισότητες αυτές έχουμε:

γων(ΕΤ,ΕΤ') + γων(ΣΜ,ΣΝ) = π.

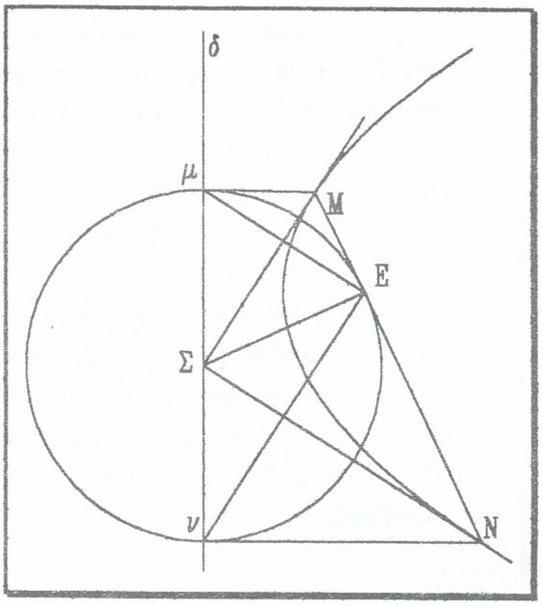


Σχ. 10-8

Παρατηρούμε δηλαδή, ότι δύο απέναντι γωνίες του τετραπλεύρου ΣΤΕΤ' είναι παραπληρωματικές, επομένως το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο στον κύκλο, ο οποίος είναι περιγεγραμμένος περί το τρίγωνο που έχει ως πλευρές τρεις εφαπτόμενες της παραβολής.

ις΄) ΘΕΩΡΗΜΑ. Ο γεωμετρικός τόπος της ορθής γωνίας της οποίας οι πλευρές εφάπτονται παραβολής, είναι η διευθετούσα της παραβολής.

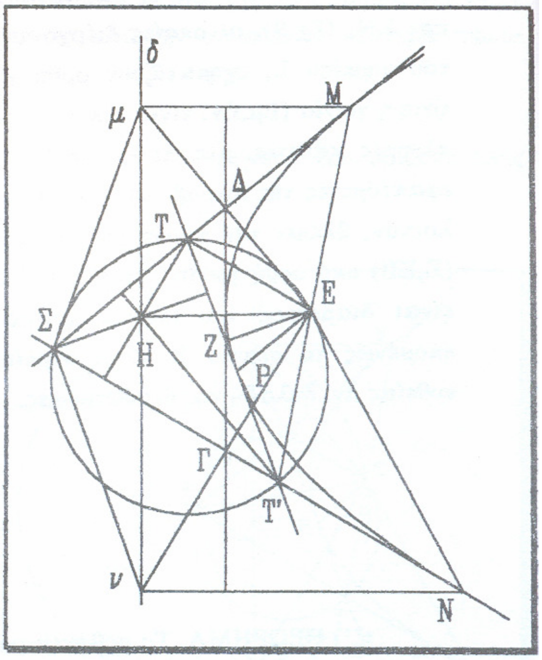
Αν οι εφαπτόμενες παραβολής ΣΜ και ΣΝ, (Σχ.9), οι οποίες διέρχονται διά του σημείου Σ, σχηματίζουν ορθή γωνία, τότε η γωνία (Εμ,Εν) είναι ορθή, διότι έχει πλευρές κάθετες, μία προς μία, προς τις εφαπτόμενες της παραβολής. Το σημείο Ε, λοιπόν, βλέπει την χορδή μν του κύκλου (Σ,ΣΕ) υπό ορθή γωνία. Αρα, η ευθεία μν είναι διάμετρος του κύκλου αυτού και επομένως το σημείο Σ είναι σημείο της ευθείας μν, δηλαδή της διευθετούσας.



Σχ. 10-9

ιζ΄) ΘΕΩΡΗΜΑ. Το ορθόκεντρο του τριγώνου με πλευρές τρεις εφαπτόμενες παραβολής είναι σημείο της διευθετούσας της παραβολής.

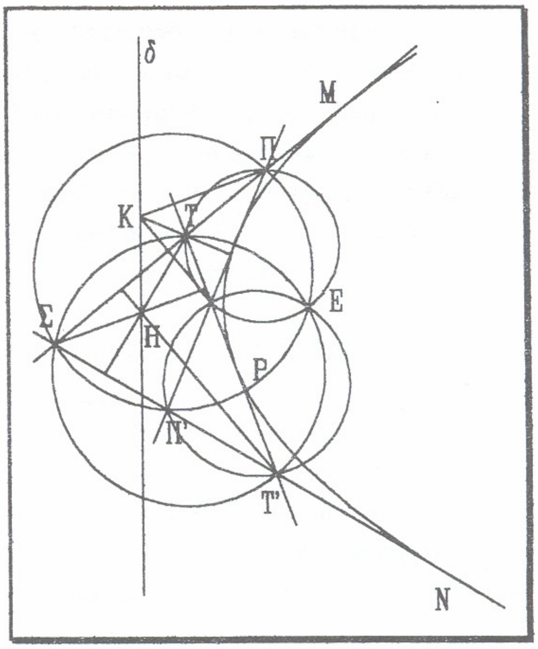
Οι προβολές της εστίας, (Σχ.10), στις εφαπτόμενες της παραβολής κείνται στην κορυφαία εφαπτομένη. Δηλαδή, η κορυφαία εφαπτομένη της παραβολής είναι η ευθεία του Simson η οποία αντιστοιχεί στο σημείο Ε του περιγεγραμμένου κύκλου περί το τρίγωνο ΣΤΤ' και η οποία διέρχεται διά του μέσου του ευθυγράμμου τμήματος ΕΗ, όπου Η είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΣΤΤ'. Επομένως, το ορθόκεντρο του τριγώνου ΣΤΤ' κείται στην διευθετούσα της παραβολής.



Σχ. 10-10

ιη΄) ΘΕΩΡΗΜΑ. Υπάρχει μοναδική παραβολή η οποία εφάπτεται σε τέσσερεις δεδομένες ευθείες, οι οποίες ανά τρεις δεν διέρχονται διά σημείου και ανά δύο δεν είναι παράλληλες.

Ανά τρεις οι δεδομένες ευθείες, (Σχ.11), σχηματίζουν τέσσερα τρίγωνα των οποίων οι πλευρές εφάπτονται παραβολής. Κατασκευάζουμε τους περιγεγραμμένους κύκλους περί τα τρίγωνα αυτά, οι οποίοι διέρχονται και οι τέσσερεις, διά της εστίας Ε της παραβολής.



Σχ. 10-11

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Οι περιγεγραμμένοι κύκλοι περί τα τέσσερα τρίγωνα, τα οποία προκύπτουν από τις πλευρές ενός πλήρους τετραπλεύρου, διέρχονται δι' ενός σημείου, το οποίο είναι το σημείο του Miquel του τετραπλεύρου. Για να ορίσουμε την διευθετούσα δ της παραβολής, χρησιμοποιούμε το Θεώρημα της παραγράφου ?? κατά το οποίο, το ορθόκεντρο του τριγώνου που έχει ως πλευρές τρεις εφαπτόμενες παραβολής έχει ορθόκεντρο κείμενο στην διευθετούσα. Επομένως, τα τέσσερα ορθόκεντρα των τριγώνων που σχηματίζονται με τις εφαπτόμενες αυτές είναι σημεία της διευθετούσας της παραβολής. Στο (Σχ.11) έχουμε προσδιορίσει την διευθετούσα από τα δύο σημεία Η, Κ, ορθόκεντρα δύο εκ των τεσσάρων τριγώνων.

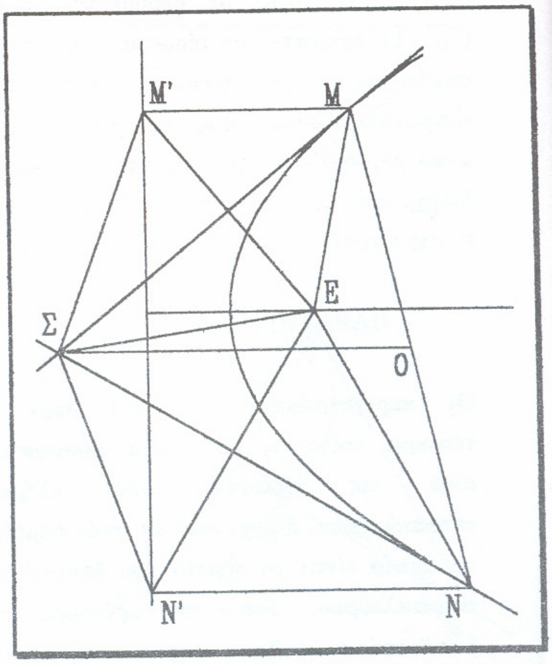
ιθ΄) ΘΕΩΡΗΜΑ. Υπάρχει μοναδική παραβολή της οποίας δίδονται δύο εφαπτόμενες και τα σημεία επαφής.

Εάν δοθούν οι ευθείες ΣΜ και ΣΝ, οι οποίες εφάπτονται στα σημεία Μ και Ν της παραβολής και διέρχονται διά του σημείου Σ, κατασκευάζουμε την διάμεσο ΣΟ του τριγώνου ΣΜΝ. Αυτή διαιρεί την γωνία (ΣΜ,ΣΝ) σε δύο μέρη. Με κορυφές τα Μ και Ν κατασκευάζουμε:

γων(ΜΣ,ΜΕ) = γων(ΣΜ,ΣΟ) και

γων(ΝΣ,ΝΕ) = γων(ΣΝ,ΣΟ),

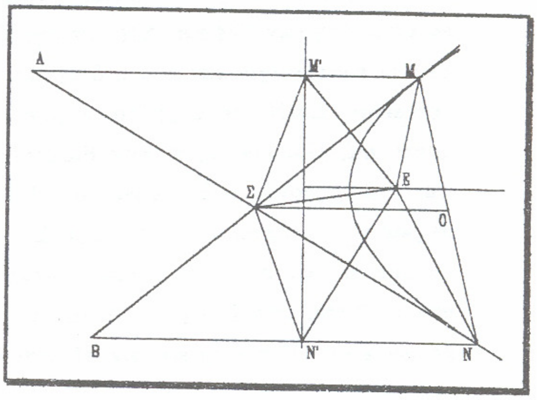
έτσι ώστε το ένα ζεύγος πλευρών αυτών των γωνιών να είναι οι εφαπτόμενες ΜΣ και ΝΣ ενώ το άλλο ζεύγος πλευρών να είναι οι ΜΕ και ΝΕ, κείμενες προς το εσωτερικό της γωνίας (ΣΜ,ΣΝ) και έστω Ε το σημείο τομής αυτών. Κατασκευάζουμε τα τμήματα ΜΜ' και ΝΝ', ίσα προς τα ΜΕ και ΝΕ αντίστοιχα, παράλληλα προς την διάμεσο ΣΟ. Η ευθεία Μ'Ν' είναι κάθετος προς την διάμεσο. Τούτο αποδεικνύεται ως εξής: Η διάμεσος ΣΟ είναι μεσοπαράλληλος των ΜΜ' και ΝΝ'. Επομένως διχοτομεί το ευθύγραμμο τμήμα Μ'Ν'. Από την ισότητα των τριγώνων ΣΜΕ και ΣΜΜ' προκύπτει ότι: ΣΕ=ΣΜ'. Από την ισότητα, επίσης, των τριγώνων ΣΝΕ και ΣΝΝ' προκύπτει ότι: ΣΕ=ΣΝ'. Επομένως, το τρίγωνο ΣΜ'Ν' είναι ισοσκελές και η ΣΟ που είναι διάμεσος θα είναι και ύψος.



Σχ. 10-12

Η παραβολή, λοιπόν, η οποία έχει εστία το σημείο Ε και διευθετούσα την ευθεία Μ'Ν', εφάπτεται των ευθειών ΣΜ και ΣΝ στα σημεία Μ και Ν.

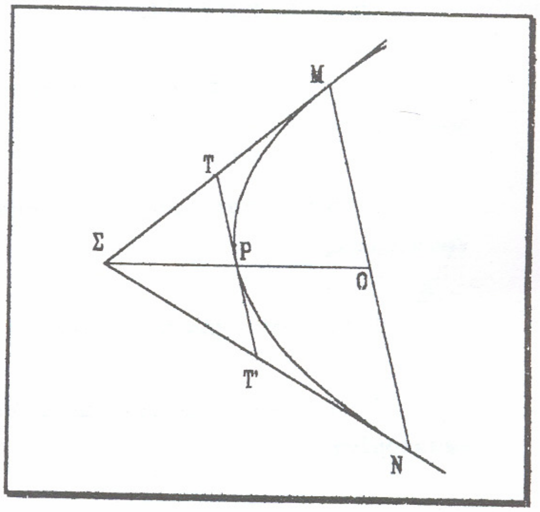
κ΄) ΘΕΩΡΗΜΑ. Εάν Α είναι το σημείο τομής της εφαπτομένης παραβολής στο σημείο Ν αυτής και της παραλλήλου προς τον άξονα αυτής η οποία διέρχεται δια του σημείου Μ, τότε η εφαπτομένη στο Μ διέρχεται διά του μέσου Σ του τμήματος ΑΝ.



Σχ. 10-13

Επειδή το σημείο Σ ανήκει στην μεσοπαράλληλο των ΜΜ' και ΝΝ', έπεται ότι οι διαγώνιοι τού τετραπλεύρου ΜΝΒΑ διχοτομούνται, άρα είναι παραλληλόγραμμο, (Σχ.13).

κα΄) ΘΕΩΡΗΜΑ. Εάν παραβολή εφάπτεται στα σημεία Μ και Ν των ευθειών ΣΜ και ΣΝ, τότε το μέσον Ρ της διαμέσου ΣΟ του τριγώνου ΣΜΝ είναι σημείο της παραβολής και η εφαπτομένη σ' αυτό είναι παράλληλος της ΜΝ.

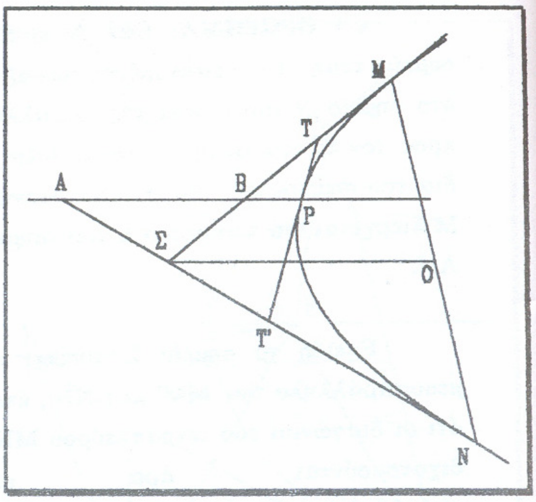


Σχ. 10-14

Η διάμεσος ΣΟ είναι παράλληλος προς τον άξονα της παραβολής. Αν καλέσουμε Ρ το κοινό σημείο της παραβολής και της διαμέσου ΣΟ, τότε, βάσει του προηγούμενου Θεωρήματος, η εφαπτομένη στο σημείο Ρ θα διέρχεται διά του μέσου Τ του τμήματος ΣΜ. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι, η εφαπτομένη στο σημείο Μ θα διέρχεται διά του μέσου Τ' του τμήματος ΣΝ. Αρα, η εφαπτομένη στο σημείο Μ, ως διερχόμενη διά των μέσων των πλευρών ΣΜ και ΣΝ του τριγώνου ΣΜΝ, είναι παράλληλη προς την βάση ΜΝ και διχοτομεί την διάμεσον ΣΟ.

κβ΄) ΘΕΩΡΗΜΑ. Εστω παραβολή εφαπτομένη των ΣΜ και ΣΝ στα σημεία Μ και Ν αντίστοιχα και ΣΟ η διάμεσος του τριγώνου ΣΜΝ. Η τυχούσα ευθεία, που είναι παράλληλος προς την διάμεσο ΣΟ και διέρχεται δια σημείου Ρ της παραβολής, τέμνει τις ΣΜ και ΣΝ στα σημεία Β και Α, τότε η εφαπτομένη στο σημείο Ρ της παραβολής διέρχεται διά των μέσων Τ και Τ' των τμημάτων ΑΝ και ΒΜ.

Η απόδειξη του Θεωρήματος αυτού είναι προφανής από τα προηγούμενα.



Σχ. 10-15

10.1. ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

1. Να κατασκευασθεί η παραβολή της οποίας δίδονται η εστία, ο άξονας και μία εφαπτομένη.

2. Να κατασκευασθεί η παραβολή της οποίας δίδονται η εστία και δύο εφαπτόμενες.

3. Να κατασκευασθεί η παραβολή της οποίας δίδονται η εστία δύο σημεία.

4. Να κατασκευασθεί η παραβολή της οποίας δίδονται η εστία, ένα σημείο και μία εφαπτομένη.

5. Να κατασκευασθεί η παραβολή της οποίας δίδονται η διευθετούσα και δύο εφαπτόμενες.

6. Να κατασκευασθεί η παραβολή της οποίας δίδονται η διευθετούσα και δύο σημεία.

7. Να κατασκευασθεί η παραβολή της οποίας δίδονται η διευθετούσα, ένα σημείο και μία εφαπτομένη.