ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Σ.Ε.Μ.Φ.Ε.-ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ IX

Άσκηση 1 Ένας φοιτητής έχει να ετοιμάσει ένα φυλλάδιο ασκήσεων στις Πιθανότητες με 11 ασκήσεις και ένα στις Διαφορικές Εξισώσεις με 8. Οι χρόνοι που αφιερώνει ο φοιτητής στη λύση κάθε άσκησης είναι ανεξάρτητες ισόνομες τ.μ. με εκθετική κατανομή $\mathcal{E}xp(\lambda)$. Ποια κατανομή ακολουθεί ο χρόνος P (αντ. D) που ο φοιτητής αφιερώνει στο φυλλάδιο των Πιθανοτήτων (αντ. Διαφορικών Εξισώσεων); Ποια κατανομή ακολουθεί το ποσοστό του χρόνου $Q = P/(P+D)$ που ο φοιτητής αφιερώνει στο φυλλάδιο των πιθανοτήτων; Δείξτε ότι το Q είναι ανεξάρτητο από τον συνολικό χρόνο $S = P + D$ που ο φοιτητής αφιερώνει στη λύση ασκήσεων.

Άσκηση 2 Η τ.μ. X ακολουθεί κατανομή $\chi^2(4)$, ενώ η δεσμευμένη κατανομή της τ.μ. Y με δεδομένη την X είναι ομοιόμορφη στο $[0, X]$, δηλαδή $f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{x}$ για $y \in (0, x)$, και 0 διαφορετικά.

α) Δείξτε ότι οι τ.μ. $Y, X - Y$ είναι ανεξάρτητες, ισόνομες και ακολουθούν κατανομή $\chi^2(2)$.

β) Υπολογίστε την πιθανότητα των ενδεχομένων $\{Y > 1\}$ και $\{X > 2Y\}$.

Άσκηση 3 Φορτίο q βρίσκεται στη θέση (X, Y, Z) όπου X, Y, Z είναι ανεξάρτητες τ.μ. με κατανομή $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Υπολογίστε την σ.π.π. του δυναμικού V στην αρχή των αξόνων και την $\mathbb{E}\big[V\big]$, όπου

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}.$$

Άσκηση 4 Αν οι τ.μ. X, Y είναι ανεξάρτητες, με ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα [0,1] δείξτε ότι οι τ.μ.

$$U = \sqrt{-2\ln X}\cos(2\pi Y) \qquad V = \sqrt{-2\ln X}\sin(2\pi Y)$$

είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν την τυπική κανονική κατανομή. Σ' αυτόν τον υπολογισμό βασίζεται η μέθοδος Box-Muller για την προσομοίωση κανονικών τ.μ. στον υπολογιστή. Βλέπετε πώς;

Άσκηση 5 Οι $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες ισόνομες τ.μ. με κατανομή $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Ορίζουμε $\bar{X} = \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$. Ποια είναι η δεσμευμένη σ.π.π. $f_{X_1|\bar{X}}(x\,|\,\mu)$;

Άσκηση 6 Δείξτε ότι αν το τυχαίο διάνυσμα $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$ ακολουθεί τυπική κανονική κατανομή τότε και το διάνυσμα

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

ομοίως ακολουθεί τυπική κανονική κατανομή. Δηλαδή η $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbb{I}_2)$ μένει αναλλοίωτη από στροφές.

Άσκηση 7 Θεωρήστε n ανεξάρτητες τυπικές κανονικές τ.μ. $X_1, \ldots, X_n$. Ποια είναι η από κοινού σ.π.π. των $X_1, \ldots, X_n$; Χρησιμοποιώντας ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})\; d\mathbf{x} = 1$$

και μετασχηματίζοντας το ολοκλήρωμα σε σφαιρικές συντεταγμένες ($d\mathbf{x} = r^{n-1}drd\sigma$), δείξτε ότι η επιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας στον R^n είναι ίση με

$$|S_n| = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Επιβεβαιώστε ότι ο παραπάνω τύπος δίνει τις γνωστές σας απαντήσεις για $n = 2$ και $n = 3$. Υπολογίστε στη συνέχεια τον όγκο της n-διάστατης μοναδιαίας μπάλας $B_n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots + x_n^2 \le 1\}$.

Άσκηση 8 Ας είναι X, Y ανεξάρτητες, ισόνομες τ.μ. με κατανομή $\mathcal{N}(0,2)$. Ορίζουμε $U = \frac{X+Y}{2}$, $V = \frac{X-Y}{2}$.
α) Ποια είναι η σ.π.π. του τυχαίου διανύσματος (X, Y);
β) Υπολογίστε την σ.π.π. του τυχαίου διανύσματος (U, V). Είναι οι τ.μ. U, V ανεξάρτητες;
γ) Έστω $S \sim \mathcal{N}(0,1)$ ανεξάρτητη από τις X, Y. Υπολογίστε την σ.π.π. του διανύσματος $(U, \sqrt{V^2 + S^2})$.
δ) Θεωρούμε δύο ακόμα ανεξάρτητες τ.μ. Z, W με κατανομή $\mathcal{N}(0,2)$ και ανεξάρτητες από τις X, Y.
Αν $A = \begin{pmatrix} X & Z \\ W & Y \end{pmatrix}$, και $\Lambda_1 \geq \Lambda_2$ είναι οι ιδιοτιμές του συμμετρικού πίνακα $\frac{A+A^\top}{2}$ υπολογίστε την από κοινού κατανομή των Λ_1, Λ_2.

Άσκηση 9 Οι τ.μ. X, Y είναι ανεξάρτητες, ισόνομες και ακολουθούν την τυπική κανονική κατανομή. Αν f είναι η σ.π.π. του ζεύγους (X, Y), για $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ορίζουμε

$$g(x,y) = \begin{cases} f(x,y) + \frac{xy}{2\pi e}, & \text{αν } |x| \leq 1 \text{ και } |y| \leq 1 \\ f(x,y), & \text{δαφορετικά.} \end{cases}$$

α) Δείξε ότι η g είναι σ.π.π. σε δύο διαστάσεις.
β) Αν το ζεύγος τ.μ. (U, V) έχει σ.π.π. την g βρείτε την περιθώρια κατανομή των τ.μ. U και V.
γ) Υπολογίστε τη συνδιακύμανση των τ.μ. U και V.
δ) Είναι σωστή ή λάθος η πρόταση 'Αν καθεμία από τις τ.μ. X και Y ακολουθεί κανονική κατανομή, τότε το ζεύγος (X, Y) ακολουθεί κανονική κατανομή σε 2 διαστάσεις.' Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Άσκηση 10 α) Έστω X τ.μ. με τιμές στο $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ και συνάρτηση μάζας πιθανότητας

$$p(k) = \frac{1}{Z(\lambda)} \frac{\lambda^k}{(k!)^2}, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

όπου $Z(\lambda) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k!)^2}$ για $\lambda > 0$ είναι παράγοντας κανονικοποίησης. Δείξτε ότι $\mathbb{E}\big[X\big] = \dfrac{\lambda Z'(\lambda)}{Z(\lambda)}$ και $\mathbb{E}\big[X^2\big] = \lambda$.

β) Σ' έναν ποδοσφαιρικό αγώνα τα τερμάτα που σημειώνει κάθε ομάδα είναι ανεξάρτητες ισόνομες τ.μ. που ακολουθούν κατανομή Poisson με παράμετρο $\theta > 0$, δηλαδή $\mathbb{P}\big[N_i = k\big] = e^{-\theta} \frac{\theta^k}{k!}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Αν I είναι το ενδεχόμενο το παιχνίδι να τελειώσει ισόπαλο δείξτε ότι

$$\mathbb{P}\big[I\big] = e^{-2\theta} Z(\theta^2).$$

γ) Δείξτε ότι η πιθανότητα ισοπαλίας είναι φθίνουσα συνάρτηση του θ, δηλαδή όσο πιο επιθετικά παίζουν δύο ισοδύναμες ομάδες τόσο πιο σπάνιο είναι το ενδεχόμενο να λήξει ο αγώνας ισόπαλος.