

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Σ.Ε.Μ.Φ.Ε.-ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ VIII

Άσκηση 1 Η από κοινού σ.π.π. των X, Y είναι $f(x) = 2e^{-x-y}$ αν $0 \leq x \leq y$ και 0 διαφορετικά. Είναι οι X, Y ανεξάρτητες;

Άσκηση 2 Αν X, Y είναι ανεξάρτητες τ.μ. με κατανομή Poisson και παραμέτρους λ, μ αντίστοιχα. Υπολογίστε την δεσμευμένη σ.μ.π. της X δεδομένου ότι $X + Y = n$, δηλαδή την $\mathbb{P}[X = k | X + Y = n]$ για $k = 0, \dots, n$.

Άσκηση 3 Αν οι X, Y είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με σ.κ.π. F_X και F_Y αντίστοιχα, βρείτε την σ.κ.π. της $X \wedge Y = \min\{X, Y\}$, την σ.κ.π. της $X \vee Y = \max\{X, Y\}$ και την από κοινού σ.κ.π. των $X \vee Y$ και $X \wedge Y$.

Άσκηση 4 Αν οι X, Y είναι ανεξάρτητες, ισόνομες τ.μ. με πεπερασμένη διασπορά, υπολογίστε την συνδιακύμανση των τ.μ. $U = \alpha X + \beta Y$ και $V = \beta X - \alpha Y$ για $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 5 Θεωρήστε X, Y, Z τ.μ. ορισμένες στον ίδιο χώρο πιθανότητας με $\mathbb{E}[X^2], \mathbb{E}[Y^2] < \infty$, $\text{Cov}(X, Y) = 1$, $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ και Z ανεξάρτητη από τις X, Y . Υπολογίστε την $\text{Cov}(XZ^2, Y + Z)$.

Άσκηση 6 Θεωρούμε τις τ.μ. X, Y με διασπορά $V(X) = V(Y) = 1$. Η διασπορά του αθροίσματός τους είναι $V(X + Y) = 3$. Μπορεί οι X, Y να είναι ανεξάρτητες; Αν οι X και $X - \alpha Y$ είναι ανεξάρτητες τι μπορούμε να συμπεράνουμε για την σταθερά α ;

Άσκηση 7 Ο Ορφέας και η Ευριδίκη δίνουν ραντεβού για τις 12:30. Οι χρόνοι άφιξης του καθενός είναι ανεξάρτητες τ.μ. με ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα 12:00–13:00. Βρείτε την κατανομή του χρόνου αναμονής αυτού που θα φτάσει πρώτος. Ποια είναι η σ.κ.π του χρόνου που ο Ορφέας περιμένει την Ευριδίκη;

Άσκηση 8 Έστω U τ.μ. με ομοιόμορφη κατανομή στο $[0, 1]$. Αν $X_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$ είναι το i -στό δεκαδικό ψηφίο της U δείξτε ότι οι X_i είναι ανεξάρτητες τ.μ.

Άσκηση 9 Οι χρόνοι εξυπηρέτησης ενός πελάτη από δύο εξυπηρετητές A, B είναι ανεξάρτητες τ.μ. και ακολουθούν εκθετική κατανομή με παραμέτρους α και β αντίστοιχα. Τη χρονική στιγμή 0 οι A, B είναι ελεύθεροι και δέχονται από ένα πελάτη. Υπολογίστε την πιθανότητα να τελειώσει πρώτα η εξυπηρέτηση του πελάτη που εξυπηρετείται από τον A.

Άσκηση 10 Οι X, Y είναι ανεξάρτητες τ.μ. με εκθετική κατανομή $\text{Exp}(\lambda)$. Ορίζουμε $U = X \wedge Y$ και $V = |X - Y|$. Υπολογίστε με ένα διπλό ολοκλήρωμα την πιθανότητα $\mathbb{P}[U \leq u, V \leq v]$ και συμπεράνετε ότι οι U, V είναι ανεξάρτητες τ.μ. με κατανομή $\text{Exp}(2\lambda)$ και $\text{Exp}(\lambda)$ αντίστοιχα. Ερμηνεύστε διαισθητικά αυτό το αποτέλεσμα.

Άσκηση 11 *Οι X, Y είναι ανεξάρτητες τ.μ. με τιμές στο $\mathbb{N}$ και σ.μ.π. $p_n = \frac{1}{\zeta(s)n^s}$ για κάποιο $s > 1$, όπου $\zeta(\cdot)$ είναι η συνάρτηση του Riemann

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

α) Δείξτε ότι αν $2 = p_1 < p_2 < \dots$ είναι η ακολουθία των πρώτων αριθμών τότε τα ενδεχόμενα $E_i = \{p_i/X\}$ είναι ανεξάρτητα.

β) Εξηγήστε γιατί έχουμε $\bigcap_i E_i^c = \{X = 1\}$ και συμπεράνετε την ταυτότητα του Euler

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_i^s}\right).$$

γ) Αν οι X, Y είναι ανεξάρτητες τ.μ. με αυτήν την κατανομή, υπολογίστε την πιθανότητα οι X, Y να είναι σχετικά πρώτοι.