ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Σ.Ε.Μ.Φ.Ε.-ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ VII

Άσκηση 1 Οι X, Y είναι τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο $\{-1, 1\}$ για τις οποίες έχουμε

$$\mathbb{P}\big[X = 1\big] = 1/4,\ \mathbb{P}\big[Y = 1|X = 1\big] = 2/3,\ \text{και}\ \mathbb{P}\big[Y = 1|X = -1\big] = 1/3.$$

Ποια είναι η πιθανότητα το τριώνυμο $P(z) = z^2 + Xz + Y$ να έχει πραγματικές ρίζες;

Άσκηση 2 Το (X, Y) είναι ένα τυχαίο διάνυσμα με σ.π.π.

$$f(x,y) = \begin{cases} c(x+y) & \text{για } 0 \le x \le y \le 1 \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

α. Υπολογίστε την σταθερά c.
β. Υπολογίστε την περιθώρια κατανομή των X, Y.

Άσκηση 3 Το (X, Y) είναι ένα τυχαίο διάνυσμα με σ.π.π.

$$f(x,y) = \begin{cases} 6x^{\alpha}y^{\alpha+1} & \text{για } (x,y) \in [0,1] \times [0,1] \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

α. Υπολογίστε την σταθερά α.
β. Υπολογίστε την πιθανότητα των ενδεχομένων $\{X \le 1/3\},\ \{Y > 2X\},\ \{X + Y \ge 1\}$.

Άσκηση 4 Αν η από κοινού σ.π.π. των X, Y είναι συμμετρική, δηλαδή $f(x, y) = f(y, x),\ \forall x, y \in \mathbb{R}^2$ ποια είναι η $\mathbb{P}\big[X > Y\big]$;

Άσκηση 5 Οι τ.μ. X, Y έχουν από κοινού σ.π.π. $f(x, y) = \frac{1}{y}$ για $0 < x < y < 1$ και 0 διαφορετικά.
α) Υπολογίστε την δεσμευμένη σ.π.π. της Y δεδομένου ότι $X = x$.
β) Υπολογίστε την $\mathbb{P}\big[X + Y > 1/2\big]$.

Άσκηση 6 Η από κοινού σ.π.π. των X, Y είναι

$$f(x,y) = cy^{\beta}(1-x)^{\alpha}, \qquad 0 < y < x < 1,$$

όπου $\alpha, \beta > -1$. Να υπολογίσετε
α) Τις περιθώριες σ.π.π. των X, Y
β) Τις δεσμευμένες σ.π.π. $f_{X|Y}$ και $f_{Y|X}$.
γ) Τις δεσμευμένες μέσες τιμές $\mathbb{E}\big[X|Y = y\big]$ και $\mathbb{E}\big[Y|X = x\big]$

Άσκηση 7 Αν η τ.μ. P ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο $[0, 1]$ και η δεσμευμένη κατανομή της X δεδομένου ότι $P = p$ είναι διωνυμική $b(n, p)$ υπολογίστε την (περιθώρια) σ.μ.π. της X.

Άσκηση 8 Αν η τ.μ. X ακολουθεί εκθετική κατανομή $\mathcal{E}xp(\lambda)$. Η δεσμευμένη κατανομή της Y δεδομένης της X είναι $\mathrm{Po}(X)$, δηλαδή για κάθε $x > 0$

$$\mathbb{P}\big[Y = k \,\big|\, X = x\big] = e^{-x}\frac{x^k}{k!},\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

Ποια κατανομή ακολουθεί η Y;

Άσκηση 9 Έστω $\mathcal{A}_N = \{0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \ldots, \frac{N-1}{N}, 1\}$. Οι X, Y είναι τ.μ. με τιμές στο $\mathcal{A}_N$ και από κοινού συνάρτηση μάζας πιθανότητας

$$p_{x,y} := \mathbb{P}\big[X = x,\ Y = y\big] = C|x-y| \qquad \text{για } (x,y) \in \mathcal{A}_N \times \mathcal{A}_N.$$

α. Ποιες είναι η περιθώριες κατανομές τους;
β. Ποια είναι η $\mathbb{E}\big[X\big]$;
γ. Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου $\{X > Y\}$;

Άσκηση 10 Οι X, Y είναι τ.μ. που παίρνουν τιμές στο [0,1]. Η από κοινού σ.κ.π. τους για $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$ δίνεται από την $F(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{2}(x \wedge y)$.
α) Βρείτε τις περιθώριες σ.κ.π. των X, Y και συμπεράνετε ότι καθεμιά τους είναι συνεχής τ.μ.

β) Υπολογίστε την $F(x+h, x+h) + F(x) - F(x, x+h) - F(x+h, x)$ για $0 \le x \le x+h \le 1$. Ποιού ενδεχομένου την πιθανότητα εκφράζει;

γ) Υπολογίστε την $f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$ όπου αυτή υπάρχει και στη συνέχεια το ολοκλήρωμα της f στο $[0,1] \times [0,1]$. Γιατί το αποτέλεσμα δεν είναι 1;

Άσκηση 11 *Σε ένα ντουλάπι υπάρχουν 32 διαφορετικά ζευγάρια παπούτσια. Αν βγάλουμε από το ντουλάπι 20 παπούτσια τυχαία, ποιο είναι το αναμενόμενο πλήθος ζευγαριών που θα απομείνουν;