ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ & ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

Σ.Ε.Μ.Φ.Ε.- ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ VI

Άσκηση 1 Ρίχνουμε δύο ζάρια και έστω X η μικρότερη από τις δύο ζαριές. Ποια είναι η σ.μ.π. της X; Υπολογίστε τη μέση τιμή και τη διασπορά της X. Μπορείτε να κάνετε το ίδιο για n ζάρια;

Άσκηση 2 Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μιας τ.μ. X είναι $f(x) = Ax^{-4}$ για $x > 2$, και μηδέν διαφορετικά. Υπολογίστε την τιμή της σταθεράς A, και στη συνέχεια τη μέση τιμή και τη διασπορά της X. Για ποιές τιμές του r είναι η ροπή τάξης r πεπερασμένη;

Άσκηση 3 Εσείς και $N-1$ φίλοι σας έχετε συμφωνήσει να αγοράσετε από ένα δώρο. Στη συνέχεια θα ανακατέψετε τα δώρα και καθένας θα πάρει ένα δώρο τυχαία. Ποια είναι η πιθανότητα να φύγετε με το δώρο που φέρατε; Ποια είναι η πιθανότητα ώστε τόσο εσείς όσο και ο καλύτερος/η φίλος/η σας να φύγετε καθένας με το δώρο που έφερε; Αν X είναι το πλήθος των ατόμων που θα φύγουν με το δώρο που έφεραν, υπολογίστε τη μέση τιμή και τη διασπορά της τ.μ. X.

Άσκηση 4 Υπολογίστε τη γεννήτρια συνάρτηση της τ.μ. X της Άσκησης 1.

Άσκηση 5 Μια ακέραια τ.μ. X έχει γεννήτρια συνάρτηση

$$G(z) = \left(\frac{z}{3-2z}\right)^4.$$

Υπολογίστε τη μέση και τη διασπορά της X. Ποια είναι η σ.μ.π. της X;

Άσκηση 6 Η τ.μ. X παίρνει τιμές στο $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, \ldots\}$, έχει σ.μ.π. $p(k) = \mathbb{P}\big[X = k\big],\ k \in \mathbb{N}_0$ και μέση τιμή $\mu \in (0, +\infty)$. Θα λέμε την τ.μ. X^* μεροληπτική στο μεγέθος της X, αν έχει σ.μ.π. $p^*(k) = ckp(k),\ k \in \mathbb{N}_0$. Ποια είναι η τιμή της c; Αν $G(z)$ είναι η γεννήτρια συνάρτηση της X, ποια είναι η γεννήτρια συνάρτηση της X^*;

Άσκηση 7 Η τ.μ. X_N ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο σύνολο $\{0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \ldots, \frac{N-1}{N}\}$. Υπολογίστε τη χαρακτηριστική της συνάρτηση και δείξτε ότι καθώς $N \to \infty$, αυτή τείνει στη χαρακτηριστική συνάρτηση μιας τ.μ. με ομοιόμορφη κατανομή στο [0,1].

Άσκηση 8 Αν η τ.μ. X έχει σ.π.π. $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2},\ x \in \mathbb{R}$, δείξτε ότι η χ.σ. της X είναι η $\phi_X(t) = e^{-|t|},\ t \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 9 Αν ϕ είναι η χ.σ. της τ.μ. X, δείξτε ότι $|\phi(t) - \phi(s)|^2 \leq 2\big(1 - Re\,\phi(t-s)\big)$.

Άσκηση 10 Έστω πραγματική τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση κατανομής πιθανότητας F και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f. Η μέση τιμή της X είναι μ και η διασπορά της X είναι $\sigma^2 < +\infty$.
α) Αν ορίσουμε τη συνάρτηση $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ με

$$G(u) = \mathbb{E}\big[(X-u)^2\big],\ u \in \mathbb{R},$$

δείξτε ότι

$$\min_{u\in\mathbb{R}} G(u) = G(\mu) = \sigma^2.$$

β) Αν ορίσουμε τη συνάρτηση $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ με

$$H(u) = \mathbb{E}\big[|X-u|\big],\ u \in \mathbb{R},$$

δείξτε ότι

$$\min_{u\in\mathbb{R}} H(u) = H(d),$$

όπου το $d \in \mathbb{R}$ είναι τέτοιο ώστε $F(d) = \mathbb{P}\big[X \leq d\big] = 1/2$. Ένα τέτοιο d ονομάζεται διάμεσος της τ.μ. X.

Άσκηση 11 Έστω τυχαία μεταβλητή X με μέση τιμή μ, διάμεσο d και πεπερασμένη διασπορά σ^2. Δείξτε ότι

$$|\mu - d| \le \sigma.$$

Άσκηση 12 Έστω τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση κατανομής πιθανότητας $F(x) = e^{-e^{-x}},\ x \in \mathbb{R}$.
α) Βρείτε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της X.
β) Βρείτε τη διάμεσο d της X.
γ) Δείξτε ότι για κάθε $\lambda < 1$ έχουμε

$$\mathbb{E}\big[e^{\lambda X}\big] = \Gamma(1-\lambda).$$

δ) Δείξτε ότι για κάθε $\lambda < 1$ έχουμε $\lim_{x\to\infty} e^{\lambda x}\, \mathbb{P}\big[X > x\big] \to 0$.

Άσκηση 13 Αν η X είναι μια θετική τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) με μέση τιμή $\mathbb{E}\big[X\big] = \mu$ και $V(X) = 1/2$ δείξτε ότι

$$\mathbb{P}\big[\mu - 1 \le X \le 2\mu\big] \ge \frac{1}{2}.$$