ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Σ.Ε.Μ.Φ.Ε.- ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ V

Άσκηση 1 Σε μια παρτίδα πόκερ κάθε παίκτης παίρνει αρχικά 5 φύλλα από τα 52 της τράπουλας. Λέμε ότι ένας παίκτης έχει καρέ αν έχει 4 ίδια φύλλα (ένα από κάθε κατηγορία), π.χ. 4 άσους, 4 δεκάρια κ.ο.κ. Ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός των παρτίδων που πρέπει να παίξει κάποιος μέχρι να του μοιραστεί ένα καρέ; Ποια είναι προσεγγιστικά η πιθανότητα να μην πάρει κανένα καρέ σε τόσες παρτίδες; να πάρει τρία καρέ σε τόσες παρτίδες;

Άσκηση 2 Η διάρκεια ζωής (σε ώρες) ενός προϊόντος είναι τ.μ. με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \frac{1}{1200} e^{-\frac{x}{1200}},\ x > 0.$$

Κάθε μονάδα του προϊόντος έχει κόστος κατασκευής €5.000, πωλείται προς €7.000, και συνοδεύεται από εγγύηση για τη διάρκεια ζωής της. Συγκεκριμένα, αν αυτή είναι μικρότερη από 1000 ώρες το αντίτιμο της αγοράς επιστρέφεται στον αγοραστή, ενώ το προϊόν πωλείται προς €500 ως παλαιό υλικό.

α) Υπολογίστε το αναμενόμενο κέρδος ανά μονάδα προϊόντος.

β) Ποια διάρκεια ζωής πρέπει να προβλέπει η εγγύηση ώστε το αναμενόμενο κέρδος ανά μονάδα προϊόντος να είναι τουλάχιστον €800;

Άσκηση 3 Η διάρκεια ζωής ενός ανταλλακτικού σε ώρες είναι τ.μ. X με σ.π.π.

$$f(x) = Ce^{-\alpha x^{2/3}}, \qquad x > 0.$$

α) Υπολογίστε την σταθερά C.

β) Υπολογίστε την αναμενόμενη διάρκεια ζωής του ανταλλακτικού.

Άσκηση 4 Η σ.μ.π. μιας τ.μ. X δίνεται από την

$$\mathbb{P}\big[X = m + \frac{1}{k}\big] = k\ 2^{-(m+k+1)},\ m, k \in \mathbb{N}.$$

Υπολογίστε την αναμενόμενη τιμή της τ.μ. X.

Άσκηση 5 Το μέτρο X της ταχύτητας ενός μορίου αερίου μάζας m σε απόλυτη θερμοκρασία T είναι μια τ.μ. με κατανομή Maxwell-Boltzmann. Συγκεκριμένα η σ.π.π. της δίνεται από την

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 e^{-\beta x^2} & \text{για } x > 0 \\ 0 & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

όπου $\beta = \frac{m}{2KT}$ και α είναι μια σταθερά κανονικοποίησης (K είναι η σταθερά του Boltzmann.)

α) Υπολογίστε τη σταθερά α.

β) Υπολογίστε την αναμενόμενη τιμή της X.

γ) Υπολογίστε την αναμενόμενη τιμή της κινητικής ενέργειας $E = \frac{1}{2}mX^2$.

Άσκηση 6 Αν η σ.π.π. f μιας τ.μ. X είναι συμμετρική γύρω από το $\mu \in \mathbb{R}$, δηλαδή $f(\mu + x) = f(\mu - x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δείξτε ότι η διάμεσος της X είναι μ. Αν επιπλέον $\mathbb{E}\big[|X|\big] < +\infty$, δείξτε ότι $\mathbb{E}\big[X\big] = \mu$.

Άσκηση 7 Έχετε ένα μικρό ζαχαροπλαστείο και έχετε καταλήξει στην παρατήρηση ότι το πλήθος των κέικ που πωλούνται κάθε μέρα ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο 8. Η παρασκευή κάθε κέικ σας κοστίζει €5 ενώ η τιμή διάθεσής του είναι €12. Αν ένα κέικ δεν πουληθεί την ημέρα παρασκευής του πετιέται. Πόσα κέικ πρέπει να φτιάχνετε κάθε μέρα ώστε να μεγιστοποιήσετε το αναμενόμενο κέρδος από την πώλησή τους; Θα χρειαστείτε πίνακες ή τη βοήθεια του υπολογιστή.

Άσκηση 8 α) Αν η X είναι μια μη αρνητική συνεχής τ.μ. αποδείξτε ότι $\mathbb{E}\big[X\big] = \displaystyle\int_0^\infty \mathbb{P}\big[X > t\big]dt$.
β) Αν η X είναι μια τ.μ. με τιμές στο $\{0, 1, 2, \ldots\}$ αποδείξτε ότι $\mathbb{E}\big[X\big] = \sum_{k=0}^\infty \mathbb{P}\big[X > k\big] = \int_0^\infty \mathbb{P}\big[X > t\big]dt$.
γ) Αποδείξτε ότι *για οποιαδήποτε* μη αρνητική διακριτή τ.μ. X έχουμε $\mathbb{E}\big[X\big] = \int_0^\infty \mathbb{P}\big[X > t\big]dt$.

Παρατηρήστε λοιπόν ότι, αν ορίσουμε τη μέση τιμή μιας μη αρνητικής τ.μ. X ως

$$\mathbb{E}\big[X\big] = \int_0^\infty \mathbb{P}\big[X > t\big]dt,$$

τότε αυτός ο ορισμός *επεκτείνει* εκείνους που είχαμε δώσει για διακριτές και συνεχείς τ.μ. Αυτό σημαίνει ότι συμφωνεί με τους ορισμούς που είχαμε δώσει κατά περίπτωση (ερωτήματα α΄ και γ΄) και έχει νόημα για οποιαδήποτε μη αρνητική τ.μ. X αφού χρησιμοποιεί μόνο την σ.κ.π. της X $\big(\mathbb{P}\big[X > t\big] = 1 - F(t)\big)$.

Παρατηρήστε τέλος ότι μπορούμε να γράψουμε κάθε τ.μ ως διαφορά δύο μη αρνητικών τ.μ.: $X = X^+ - X^-$, όπου οι X^+ και X^- είναι το θετικό και το αρνητικό μέρος της X αντίστοιχα και ορίζονται ως

$$X^+(\omega) = \max\{X(\omega), 0\} \qquad \text{και} \qquad X^-(\omega) = \max\{-X(\omega), 0\}.$$

Αν οι $\mathbb{E}\big[X^+\big]$ και $\mathbb{E}\big[X^-\big]$ είναι πεπερασμένες, μπορούμε να ορίσουμε $\mathbb{E}\big[X\big] = \mathbb{E}\big[X^+\big] - \mathbb{E}\big[X^-\big]$.
δ) Γράψτε έναν τύπο για τη μέση τιμή μιας τ.μ. X στον οποίο εμφανίζεται μόνο η σ.κ.π. F της X.

Άσκηση 9 *Έστω $G = (V, E)$ ένας πεπερασμένος γράφος όπου V, E είναι τα σύνολα των κορυφών και των ακμών του αντίστοιχα. Βάφουμε κάθε κορυφή του γράφου κόκκινη (ανεξάρτητα από τις άλλες) με πιθανότητα $1/2$.
α. Δείξτε ότι ο αναμενόμενος αριθμός ακμών που τα άκρα τους έχουν διαφορετικά χρώματα είναι $\frac{1}{2}|E|$.
β. Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο ερώτημα δείξτε ότι μπορούμε να διαμερίσουμε το σύνολο V σε δύο υποσύνολα έτσι ώστε τουλάχιστον οι μισές ακμές του γράφου να συνδέουν κορυφές του ενός με κορυφές του άλλου.
Παρατηρήστε ότι το τελικό συμπέρασμα αφορά στη θεωρία γράφων και ότι δεν υπάρχει τίποτα τυχαίο στον ισχυρισμό του! Αυτό είναι ένα παράδειγμα χρήσης της "πιθανοθεωρητικής μεθόδου" (που επινοήθηκε από τον Paul Erdös) για την απόδειξη της ύπαρξης μιας ιδιότητας ανάμεσα στα μέλη μιας κλάσης. Αν σας ενδιαφέρει δείτε και το λήμμα *probabilistic method* στη Wikipedia.

Άσκηση 10 * Ποιο είναι το αναμενόμενο πλήθος φορών που πρέπει να ρίξουμε ένα ζάρι μέχρι να εμφανιστούν όλες οι όψεις του;