

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Σ.Ε.Μ.Φ.Ε. - ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ IV

Άσκηση 1 Αν F είναι η συνάρτηση κατανομής της τ.μ. X , ποιά είναι η συνάρτηση κατανομής των παρακάτω τυχαίων μεταβλητών; α) $Y = aX + b$ για $a > 0$, β) $Y = aX + b$ για $a < 0$, γ) $Z = X^+ = \max\{0, X\}$, δ) $E = e^X$.

Άσκηση 2 Έστω X τ.μ. με ομοιόμορφη κατανομή στο $[0,1]$. Το πρώτο δεκαδικό ψηφίο της X είναι επίσης μια τ.μ. Ποια είναι η κατανομή της; Ποια είναι η κατανομή του δεύτερου δεκαδικού ψηφίου της X ; του n -οστού δεκαδικού τη ψηφίου;

Άσκηση 3 Μια τ.μ. X έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x < 1 \\ cx^{-5} & , x \geq 1. \end{cases}$$

Υπολογίστε την σταθερά c και στη συνέχεια την πιθανότητα των ενδεχομένων $\{X \in [3, 5]\}$ και $\{X \geq t\}$. Ποια είναι η σ.κ.π. της X ;

Άσκηση 4 Αν η τ.μ. U ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο $[0,1]$ α) υπολογίστε την σ.κ.π. της τ.μ. $X = -\ln(U)$. Ποια γνωστή κατανομή ακολουθεί; β) ποια είναι η πυκνότητα πιθανότητας της τ.μ. $Y = U^2$; γ) της $Z = U^{-2}$;

Άσκηση 5 Αν η τ.μ. X ακολουθεί κατανομή $\text{Exp}(\lambda)$ ποια κατανομή ακολουθεί η τ.μ. $Y = [X]$; (για έναν πραγματικό αριθμό x το ακέραιο μέρος του $[x]$ είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος που είναι μικρότερος ή ίσος του x .)

Άσκηση 6 α) Δείξτε ότι αν η τ.μ. X ακολουθεί κατανομή $G(\lambda, p)$ τότε η $Y = \lambda X$ ακολουθεί επίσης κατανομή Γάμμα, με παραμέτρους $1, p$.
β) Αν $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ βρείτε την σ.π.π. της τ.μ. $Y = X^2$.

Άσκηση 7 Αν η τ.μ. X ακολουθεί κανονική κατανομή $\mathcal{N}(1, 4)$ ποια είναι η πιθανότητα το τριώνυμο $p(z) = z^2 + Xz + 1$ να έχει πραγματικές ρίζες;

Άσκηση 8 Αν η τ.μ. X ακολουθεί κανονική κατανομή $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ εκφράστε την $F(x) = \mathbb{P}[X \leq x | X \geq \mu]$ συναρτήσει της σ.κ.π. Φ της τυπικής κανονικής κατανομής. Από τους πίνακες για την Φ ή με τη βοήθεια του υπολογιστή βρείτε (συναρτήσει των μ, σ) το μικρότερο δυνατό $x \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $F(x) \geq 0.99$.

Άσκηση 9 Αν η τ.μ. X έχει σ.π.π. την $f(x) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$, $x > 0$, υπολογίστε α) την σ.κ.π. της X , β) την σ.κ.π. της $Y = 1/X$ και γ) σ.π.π. της Y . Τι παρατηρείτε;

Άσκηση 10 *Αν η σ.κ.π. F της τ.μ. X είναι γνησίως αύξουσα, δείξτε ότι η τ.μ. $F(X)$ ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο $[0,1]$. Πώς θα μπορούσατε εμπνεόμενοι από την άσκηση να προσομοιώσετε στον υπολογιστή σας μια τυχαία μεταβλητή με σ.κ.π. $F(x) = (1 + e^{-x})^{-1}$ με τη βοήθεια μιας γεννήτριας τυχαίων αριθμών στο $[0,1]$;