

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Σ.Ε.Μ.Φ.Ε. - ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΙΙΙ

Άσκηση 1 Επαναλαμβάνουμε ρίψεις ενός τίμιου ζαριού. Ποια είναι η πιθανότητα να μην εμφανιστεί 1 ή 6 στις πρώτες 5 ζαριές; Ποια είναι η πιθανότητα να εμφανιστεί 6 πριν εμφανιστεί 1 ή 2; Ποια είναι η πιθανότητα να φέρουμε 3 φορές 6 πριν φέρουμε για πρώτη φορά 1 ή 2;

Άσκηση 2 Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Stirling εκτιμήστε ποια είναι η πιθανότητα να φέρουμε ακριβώς 1.000 φορές έξι, αν ρίξουμε ένα ζάρι 6.000 φορές.

Άσκηση 3 Σε μια σειρά από ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli η πιθανότητα επιτυχίας μας στην n -οστή δοκιμή είναι $p_n = \frac{1}{n}$. Δείξτε ότι με πιθανότητα 1 δεν θα σταματήσουμε ποτέ να έχουμε επιτυχίες δοκιμές. Αλλάζει η απάντησή σας και πώς αν $p_n = \frac{1}{n^{1+\epsilon}}$;

Άσκηση 4 Έστω πείραμα τύχης με δύο ισοπίθανα δυνατά αποτελέσματα, επιτυχία και αποτυχία. Το πείραμα επαναλαμβάνεται επ' άπειρον και για $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε το ενδεχόμενο A_n : οι πρώτες n εκτελέσεις ακολουθούνται από ακριβώς $2n$ επιτυχίες. Ποια είναι η πιθανότητα να πραγματοποιηθούν απείρως πολλά από τα A_n ;

Άσκηση 5 Στρίβουμε ένα νόμισμα 4 φορές και συμβολίζουμε με X το μήκος της μεγαλύτερης ακολουθίας από ίδια διαδοχικά αποτελέσματα. Ποια είναι η συνάρτηση κατανομής της X ;

Άσκηση 6 Η πιθανότητα νίκης μας σε μια παρτίδα ενός παιχνιδιού είναι p . Πριν από κάθε παρτίδα έχουμε δικαίωμα να στοιχηματίσουμε ένα ποσό, το οποίο διπλασιάζεται αν κερδίσουμε την παρτίδα και χάνεται αν χάσουμε την παρτίδα. Ξεκινάμε στοιχηματίζοντας 1 στην πρώτη παρτίδα και κάθε φορά που χάνουμε διπλασιάζουμε το στοίχημά μας ώσπου να κερδίσουμε μια παρτίδα. Έχουμε δει ότι με πιθανότητα 1 αυτό θα συμβεί σε πεπερασμένο πλήθος παρτίδων. Ποιο θα είναι το συνολικό μας κέρδος από την αρχή του παιχνιδιού μέχρι και την πρώτη μας νίκη; Αν η τυχαία μεταβλητή K είναι το πλήθος των παρτίδων που παίζουμε μέχρι την πρώτη μας νίκη, ποια κατανομή ακολουθεί η K ; Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε αρχική περιουσία $2^n - 1$ οπότε δεν μπορούμε να αντέξουμε περισσότερες από n χαμένες παρτίδες. Ποια είναι η πιθανότητα να χάσουμε όλη μας την περιουσία πριν προλάβουμε να κερδίσουμε κάποια παρτίδα; Έστω K_n το πλήθος των παρτίδων που παίζουμε μέχρι είτε να σημειώσουμε μια νίκη, είτε να τελειώσει η περιουσία μας, δηλαδή $K_n = \min\{K, n\}$. Ποια είναι η κατανομή του κέρδους μας τη στιγμή K_n ;

Άσκηση 7 Ένας φούρνος εξυπηρετεί ένα χωριό με 200 οικογένειες και κάθε μέρα φτιάχνει 6 κέικ. Ο φούρναρης εκτιμά ότι κάθε μέρα μια οικογένεια έχει πιθανότητα $p = 0.02$ να ζητήσει ένα κέικ ανεξάρτητα από τις άλλες.

α) Υπολογίστε την ακριβή σ.μ.π. των κέικ που πωλούνται κάθε μέρα.

β) Πώς διαμορφώνεται η απάντηση στο 1ο ερώτημα αν χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση Poisson για το πλήθος των οικογενειών που θέλουν να αγοράσουν κέικ σε μια μέρα;

γ) Εκτιμήστε την πιθανότητα του ενδεχομένου να πουληθούν και τα 6 κέικ (θα χρειαστείτε πίνακες για την κατανομή Poisson ή τη βοήθεια του Η/Υ σας.)

Άσκηση 8 Μια διακριτή τ.μ. X παίρνει τιμές στο $\mathbb{N}$ και έχει συνάρτηση μάζας πιθανότητας $p_n = Cn^{-s}$ για κάποια σταθερά C και κάποιο $s > 1$. Ποια πρέπει να είναι η C σαν συνάρτηση του s ; Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου η X να είναι πολλαπλάσιο του 7;

Άσκηση 9 α) Δείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{s-1} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^s} = \frac{1}{s-1}.$$

Υπόδειξη: Ίσως βρείτε χρήσιμο να προσεγγίσετε το άθροισμα από ένα ολοκλήρωμα.

β) Αν $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία από τ.μ. καθεμιά από τις οποίες ακολουθεί την κατανομή της προηγούμενης άσκησης, δείξτε ότι

$$\mathbb{P}[X_n > n^{\frac{2}{s-1}} \text{ i.o.}] = 0.$$

Άσκηση 10 *Στην ταινία “Τρέξε Λόλα τρέξε” η Λόλα έχει 1.000 μάρκα και χρειάζεται να συγκεντρώσει 1.000.000 μάρκα για να σώσει τον φίλο της Ντόνι από τα χέρια της μαφίας. Η Λόλα μπαίνει σ’ ένα καζίνο και προσπαθεί να συγκεντρώσει το ποσό στη ρουλέτα. Μπορεί είτε να ποντάρει σε αριθμό με πιθανότητα επιτυχίας $\frac{1}{38}$ οπότε και παίρνει 36 φορές το ποντάρισμά της αν νικήσει, είτε σε χρώμα με πιθανότητα επιτυχίας $\frac{18}{38}$ οπότε και παίρνει 2 φορές το ποντάρισμά της αν νικήσει. Η Λόλα θέλει να επιλέξει ανάμεσα σε δύο στρατηγικές: α) να ποντάρει συνέχεια 1 μάρκο σε χρώμα μέχρι να συγκεντρώσει το ποσό που χρειάζεται ή να χάσει και β) να ποντάρει όλο το ποσό της σε έναν αριθμό και αν κερδίσει να ποντάρει πάλι τα πάντα στον ίδιο αριθμό. Ποια στρατηγική έχει μεγαλύτερη πιθανότητα επιτυχίας;